

J. CESSAC

G. TREHERNE

physique



classe
terminale **C**

**FERNAND
NATHAN**



ذاكرة المدرسة الجزائرية

الوثائق المدرسية للنظام التربوي الجزائري، العربي، والأجنبي

<https://manuels-anciens.com>



JEAN CESSAC
Inspecteur Général
de l'Instruction Publique

GEORGES TRÉHERNE
Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly

PHYSIQUE

Classe Terminale C

PROGRAMME 1966



FERNAND NATHAN

18, rue Monsieur-le-Prince, Paris-VI^e

172343



AVERTISSEMENT

La mise en place des nouvelles Terminales scientifiques a exigé une importante refonte de notre manuel de la classe de Mathématiques, tant à cause de l'allègement du programme — imposé par une diminution substantielle de l'horaire imparti aux Sciences physiques — qu'en raison d'une rapide évolution de l'enseignement de la Physique.

Avec la très nette réduction de l'Énergétique, la quasi-disparition de l'Acoustique et de l'Électrotechnique, le report en Première de l'Électrostatique, de la production et de l'étude expérimentale du courant alternatif, c'est une dizaine de chapitres qui disparaissent.

Bien que l'étude des moteurs thermiques soit désormais hors programme, il nous a paru cependant nécessaire d'expliquer sommairement le fonctionnement du moteur à explosion — objet d'une très vive curiosité de la part de nos jeunes gens — et celui de la turbine à vapeur, illustration concrète du principe de Carnot.

Dans le chapitre consacré à la résonance mécanique, nous avons inclus un aperçu des propriétés des cordes vibrantes et des tuyaux sonores, considérés comme des résonateurs à fréquences multiples; c'est là un complément utile à l'étude expérimentale des ondes stationnaires et une source d'intéressants exercices.

L'exposé des effets de l'inductance et de la capacité est précédé d'un chapitre d'introduction rappelant les définitions des principales grandeurs électriques, les lois fondamentales de l'Électrocinétique, de l'Électromagnétisme et de l'Induction ainsi que les modalités de leur application au courant alternatif.

D'autre part, le libellé des nouveaux programmes de Physique et de Mathématiques, tant en Première qu'en Terminale, a permis d'alléger et d'améliorer la rédaction de divers chapitres :

- Les rappels de Cinématique, au début du volume, font mieux apparaître le caractère vectoriel des grandeurs « espace », vitesse et accélération;

- Les propriétés des courants de haute fréquence sont mises en parallèle avec celles du courant industriel et permettent d'introduire très simplement les notions d'onde de courant et d'onde hertzienne;

- Les notions d'Électronique, amputées des exposés traditionnels concernant la décharge dans les gaz et les rayons cathodiques, sont présentées sous un jour plus actuel.

Dans cet important travail de refonte et de modernisation, nous avons été guidés par le souci de rester rigoureux tout en nous efforçant d'être clairs et aussi simples que possible. Le corps de chacun des chapitres se limite à l'exposé des acquisitions de base; les compléments, reportés en fin de chapitre sous la forme de lectures et d'exercices complètement résolus, gardent un caractère facultatif permettant d'adapter le niveau de l'enseignement à celui de l'auditoire. Comme précédemment, un index biographique rassemble, en fin de volume, d'importants éléments d'Histoire des Sciences.

Les exercices proposés à la fin de chaque chapitre sont complétés par des problèmes donnés récemment au baccalauréat Mathématiques; les anciens textes de Concours général ont été remplacés par ceux de ces dernières années.

Enfin, l'introduction de la couleur dans les figures les rend plus claires et plus suggestives; l'illustration photographique, presque totalement renouvelée, est à la fois plus large et plus actuelle : elle souligne mieux l'extraordinaire essor des applications de la Physique.

Les auteurs.

PROGRAMME OFFICIEL

(Arrêté du 13 juin 1966)

CLASSE TERMINALE C

Les alinéas précédés d'un astérisque () ne pourront pas faire l'objet d'une question de cours aux épreuves écrites du baccalauréat.*

Dynamique

Chute des corps dans le vide et dans l'air. Étude expérimentale directe de la chute libre.

- * Principe fondamental de la dynamique : effets dynamiques des forces agissant sur un point matériel ; proportionnalité des forces aux accélérations ; notion de masse ; relation fondamentale de la dynamique. Cas de la pesanteur. Principe d'inertie.

Application de la relation fondamentale de la dynamique au mouvement circulaire uniforme et au mouvement rectiligne sinusoïdal.

- * Notions sur la mécanique des systèmes de points matériels : forces extérieures et forces intérieures. Énoncé du théorème du mouvement du centre de gravité ; application au solide animé d'un mouvement de translation ; oscillations de translation d'un corps pesant suspendu à un ressort.

- * Proportionnalité du moment des forces aux accélérations angulaires dans le mouvement de rotation d'un point matériel autour d'un axe.

- * Notion de moment d'inertie. Relation fondamentale de la dynamique appliquée à la rotation d'un solide autour d'un axe. Application au mouvement sinusoïdal de rotation ; pendule de torsion.

- * Quantité de mouvement et moment cinétique ; applications très simples.

- * Le système d'unités international ou S.I. (on indiquera à ce propos comment est constitué un système d'unités).

Énoncé du théorème de l'énergie cinétique ; application au solide animé d'un mouvement de translation ou d'un mouvement de rotation.

- * Résistance de l'air, vitesse limite ; applications.

Pendule pesant. Étude expérimentale. Cas limite du pendule simple.

Energie

Énergie potentielle mécanique d'un système. Transformations mutuelles des énergies mécaniques potentielle et cinétique.

- * Principe de l'état initial et de l'état final.

- * Idée du principe de Carnot. Énoncé du théorème de Carnot (sans aucune démonstration ou justification à partir du principe : on se bornera à donner l'expression du rendement thermique maximal sans aucune indication sur les conditions dans lesquelles cette limite serait atteinte).

Phénomènes périodiques

Définition des mouvements périodiques : période, fréquence. Cas des mouvements sinusoïdaux ; pulsation, phase (cette dernière notion pourra être introduite en étudiant la projection sur un axe fixe d'un vecteur en rotation uniforme).

Propagation d'un ébranlement et d'un mouvement vibratoire sinusoïdal ; vitesse de propagation ; longueur d'onde.

Nature vibratoire du son ; célérité du son, sa valeur, les facteurs dont elle dépend (les méthodes de mesures étant absolument hors du programme).

Composition de mouvements vibratoires de même période et de même direction ; règle de Fresnel. Interférences.

Ondes stationnaires.

- * Notions très sommaires sur les vibrations forcées et la résonance.

Optique physique

Réalisation d'une expérience d'interférences en optique à franges non localisées (on se bornera à une seule expérience au moyen des miroirs de Fresnel ou des trous d'Young, aucun autre dispositif n'étant dans le programme). Nature vibratoire de la lumière, célérité (sans la description d'aucune mesure), longueur d'onde.

- * Existence des radiations ultraviolettes et infrarouges.
- * Réalisation d'une expérience de polarisation rectiligne ; transversalité des vibrations lumineuses.

Électricité et phénomènes corpusculaires

Étude de l'influence de l'inductance et de la capacité en courant alternatif. Impédance d'une portion de circuit (en se limitant au cas d'une portion de circuit ne contenant ni générateur, ni moteur, ni dérivation, on établira au moyen de la règle de Fresnel l'expression de la différence de potentiel entre les extrémités de cette portion de circuit en fonction de ses caractéristiques et de celles du courant).

Puissance moyenne ; facteur de puissance.

Existence des courants de haute fréquence (les modes de production sont en dehors du programme) ; propagation des ondes électromagnétiques.

Effet thermoélectronique ; diode.

Accélération des électrons par un champ électrique ; électron-volt.

Propriétés des faisceaux d'électrons ; oscillographe électronique.

Effet photoélectrique (limité strictement à l'émission d'électrons par un métal pur dans le vide) ; nature corpusculaire de la lumière, photon.

Notions sommaires sur les rayons X.

- * Masse et énergie, énoncé de la relation d'Einstein.

- * Stabilité du noyau atomique, défaut de masse.

Radioactivité α , β^- et β^+ ; nature du rayonnement γ ; demi-vie radioactive.

INTRODUCTION*

1

LES INCERTITUDES DANS LES MESURES PHYSIQUES

1. Les phénomènes physiques.

L'échauffement ou le refroidissement de l'eau, sa transformation en vapeur d'eau par évaporation ou ébullition, ou en glace par congélation, l'échauffement d'un conducteur par effet Joule, la dispersion de la lumière blanche par un prisme sont autant de **phénomènes physiques**.

On appelle ainsi des transformations ou des modifications qui n'affectent pas la *nature* des corps mis en jeu.

Un phénomène physique est généralement une transformation temporaire dont l'effet peut être annulé par celui de la transformation inverse; par exemple, en se vaporisant ou se solidifiant, l'eau reste de l'eau et peut revenir à l'état initial par liquéfaction ou fusion.

2. Les grandeurs ; la mesure des grandeurs.

a. — Imaginons qu'on veuille étudier les phénomènes physiques qui accompagnent le passage du courant électrique dans un fil conducteur : on est amené à mesurer la *longueur* du fil et sa *section*, la *durée* et l'*intensité* du courant, la *masse* en eau d'un calorimètre et la variation de sa *température*...

Une *longueur*, une *section*, une *durée*, une *intensité* de courant, une *masse*, un *accroissement de température*..., sont autant de grandeurs; on voit par ces exemples que le terme **grandeur** a un sens très général : *une grandeur est tout ce qui prend, dans des conditions bien*

définies, une valeur déterminée, qui peut varier (croître ou décroître) si ces conditions elles-mêmes varient.

b. — On exprime la valeur d'une grandeur par un **nombre** qui est le résultat de sa *mesure*.

Mesurer une grandeur, c'est chercher combien de fois elle contient une grandeur de la même espèce choisie comme unité; par exemple, si l'on choisit le mètre pour unité de longueur et si une certaine longueur AB contient 5 fois la longueur d'un mètre, le nombre 5 est la mesure de AB et l'on écrit : $AB = 5 \text{ m}$

Remarquons que trouver combien de fois la longueur du mètre est contenue dans la longueur AB c'est déterminer le **rapport** de ces deux longueurs; on arriverait au même résultat en faisant la **somme** de cinq longueurs d'un mètre et vérifiant que la longueur obtenue est **égale** à celle de AB. D'une manière générale :

Une grandeur est mesurable si l'on sait définir :

*le rapport
ou bien l'égalité et la somme
de deux grandeurs de la même espèce.*

3. La valeur exacte et la valeur approchée d'une grandeur.

Soit à mesurer une certaine grandeur A, une longueur par exemple.

Si l'on recommence plusieurs fois la mesure, avec le même soin, les nombres trouvés sont en général légèrement différents : on n'a aucune raison d'affirmer que l'un plutôt que l'autre de ces nombres exprime la *valeur exacte* de A.

C'est dire que le nombre a, résultat de la mesure d'une grandeur A, n'est qu'une *valeur approchée* de A.

(*) Ces deux chapitres d'introduction rappellent des notions qui ne figurent pas au programme de la classe mais qu'il est important de préciser avant d'aborder l'étude de la Dynamique.

Si a_e est la valeur exacte de A , la différence :

$$\delta a = a - a_e$$

est appelée **erreur absolue** de la mesure.

C'est un nombre *concret* ; de plus, bien qu'elle soit qualifiée d'« absolue », cette erreur est un nombre *algébrique* puisqu'elle peut être positive ou négative.

L'erreur absolue est généralement la « résultante » de plusieurs erreurs de causes diverses :

a. — Les erreurs systématiques.

Ce sont celles qu'entraîne l'emploi de méthodes ou d'instruments imparfaits.

Par exemple, si les divisions de la règle utilisée pour mesurer des longueurs sont toutes un peu trop courtes, les nombres trouvés seront tous un peu trop grands.

Dans toutes les mesures précises, les erreurs systématiques sont autant que possible éliminées par un contrôle soigneux des appareils de mesure et, souvent aussi, par l'emploi successif de méthodes différentes.

b. — Les erreurs accidentelles.

Ces erreurs sont surtout imputables à l'imperfection des sens de l'opérateur ; contrairement aux précédentes, elles sont commises tantôt « en plus », tantôt « en moins » de sorte que, dans une suite de mesures de la même grandeur, les nombres obtenus sont tantôt approchés *par excès*, tantôt approchés *par défaut*.

On diminue les erreurs accidentelles, d'une part, en choisissant des méthodes de mesure bien étudiées et des instruments perfectionnés qui minimisent l'importance des imperfections sensorielles, d'autre part, en s'exerçant à la pratique des mesures ; mais jamais l'expérimentateur le mieux outillé et le plus habile ne peut être sûr d'atteindre la valeur exacte de la grandeur qu'il mesure : aussi doit-on toujours considérer que **le résultat de toute mesure comporte une erreur.**

4. L'incertitude absolue ; la présentation du résultat d'une mesure.

a. — L'erreur absolue δa n'étant pas connue, on doit se contenter d'en rechercher une *limite supérieure* Δa , appelée **incertitude absolue**, telle que :

$$|\delta a| \leq \Delta a$$

Cela veut dire que l'incertitude absolue est une valeur maximale que l'erreur absolue n'atteint probablement pas, mais qu'elle pourrait atteindre dans le cas le plus défavorable, sans toutefois la dépasser.

Comme la valeur approchée a d'une grandeur,

l'incertitude absolue Δa est un nombre essentiellement *positif et concret* ; il doit toujours être suivi du symbole ou du nom de l'unité de mesure.

b. — Si A est une grandeur que l'on a de bonnes raisons de supposer invariable et dont la mesure puisse être recommencée à volonté dans d'aussi bonnes conditions d'une fois à l'autre par le même expérimentateur, on prend souvent :

— pour valeur approchée a de A , la valeur *médiane*, c'est-à-dire la moyenne des résultats extrêmes ;

— pour incertitude absolue Δa , l'écart entre cette valeur médiane et les résultats extrêmes.

Supposons par exemple que la mesure de la largeur d'une feuille de copie, répétée plusieurs fois avec le même soin, ait donné des résultats tous compris entre 209,5 mm et 210,5 mm ; nous prendrons :

— pour valeur approchée : $l \approx 210$ mm ;

— pour incertitude absolue : $\Delta l = 0,5$ mm ;

et nous écrirons le résultat de la mesure :

$$l = 210,0 \pm 0,5 \text{ mm}$$

ce qui signifie que la valeur exacte de la largeur de la feuille est très probablement comprise entre :

$$210 - 0,5 = 209,5 \text{ mm et } 210 + 0,5 = 210,5 \text{ mm}$$

Nous énoncerons ce résultat en disant que la largeur mesurée vaut 210 mm à moins d'un demi-millimètre près.

c. — Quand il n'est pas possible de recommencer la mesure un nombre de fois suffisant (de l'ordre de 4 à 8), on estime l'incertitude Δa à la suite d'une *étude critique de la mesure* tenant compte de la qualité des instruments, de la commodité des lectures sur les graduations utilisées, de l'habileté de l'opérateur et de toutes les circonstances de la mesure qui peuvent avoir une influence sur son résultat.

5. L'incertitude relative ; la précision d'une mesure.

a. — On se rend mieux compte de l'approximation d'une mesure en comparant l'erreur à la grandeur mesurée :

On appelle **erreur relative**, le rapport $\frac{\delta a}{a_e}$ de l'erreur absolue à la valeur exacte.

δa et a_e n'étant pas connues, on doit, là encore, se contenter d'une *limite supérieure*, appelée **incertitude relative**, que l'on calcule en remplaçant l'erreur absolue δa par l'incertitude absolue Δa et en prenant pour a_e la valeur approchée a .

Rapport de deux grandeurs de la même espèce (Δa et a), l'incertitude relative est un nombre *abstrait* que l'on exprime habituellement en pour cent, pour mille, pour dix mille...

Par exemple, l'incertitude relative de la mesure de longueur considérée au paragraphe précédent est :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{0,5}{210} \approx 2,5 \times 10^{-3}$$

soit : 2,5 pour mille.

b. — Il est clair qu'une mesure est d'autant plus précise que l'incertitude du résultat est plus petite, comparée à ce résultat : c'est pourquoi

l'on se sert de l'incertitude relative $\frac{\Delta a}{a}$ pour

caractériser la précision d'une mesure; par exemple, dans le cas précédent, on dira que la mesure a été effectuée à 2,5 millièmes près, ou encore que sa précision est de 2,5 ‰.

6. Les mesures indirectes; les calculs d'incertitudes.

Quand on mesure la masse d'un corps par double pesée (fig. 1), la valeur approchée m est obtenue par différence :

$$m = m_2 - m_1$$

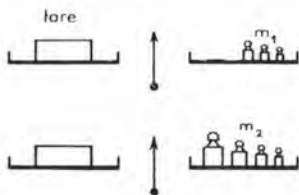


Fig. 1.

Dans la mesure de la résistance « à chaud » d'une lampe électrique ordinaire, on mesure la tension U (en volt) entre ses bornes, l'intensité I (en ampère) du courant qui la traverse et l'on applique la relation d'Ohm :

$$U = RI; \quad R \text{ (ohm)} = \frac{U}{I}$$

Ces exemples montrent que la valeur approchée g d'une grandeur G ne s'obtient pas toujours par comparaison *directe* avec l'unité mais qu'elle peut être *calculée* à partir des valeurs approchées $a, b, \dots$ d'autres grandeurs $A, B, \dots$, grâce à une *relation* entre les nombres $g, a, b, \dots$

Pour obtenir l'incertitude absolue Δg et l'incertitude relative $\Delta g/g$, il faut alors procéder

à un *calcul d'incertitudes* à partir des incertitudes que comportent les nombres $a, b, \dots$; on utilise à cette fin des théorèmes que nous allons rappeler :

a. — Si la grandeur G est une **somme algébrique** de plusieurs grandeurs $A, B, C, \dots$, sa valeur approchée est par exemple de la forme :

$$g = a + b - c \dots$$

Ce qui entraîne, pour l'erreur absolue ⁽¹⁾ :

$$\Delta g = \Delta a + \Delta b - \Delta c \dots$$

Comme on ignore les valeurs et les signes des erreurs absolues $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$, on passe à la limite supérieure en écrivant :

$$\Delta g = \Delta a + \Delta b + \Delta c \dots$$

D'où le **théorème des incertitudes absolues** :

L'incertitude absolue d'une somme algébrique de nombres incertains est égale à la somme arithmétique des incertitudes absolues de ces nombres.

Exemple. — Supposons que les résultats de la double pesée (fig. 1) soient :

$$m_1 = 5,132 \pm 0,001 \text{ g;}$$

$$m_2 = 15,251 \pm 0,001 \text{ g.}$$

Nous aurons :

$$m \approx m_2 - m_1 = 15,251 - 5,132 = 10,119 \text{ g;}$$

$$\Delta m = \Delta m_1 + \Delta m_2 = 0,001 + 0,001 = 0,002 \text{ g;}$$

$$m = 10,119 \pm 0,002 \text{ grammes.}$$

b. — Si la grandeur G est un **produit** ou un **quotient** de deux grandeurs A et B ou C et D , on a :

$$g = a \cdot b \quad \text{ou} \quad g = \frac{c}{d}$$

Ce qui entraîne, pour les erreurs relatives ⁽¹⁾ :

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}, \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta d}{d}$$

Pour passer à la limite supérieure, deux cas sont à considérer :

1° *Les facteurs du produit ou du quotient sont indépendants* (cas le plus fréquent); on remplace alors les erreurs par les incertitudes correspondantes, les valeurs exactes par les valeurs approchées, et, pour le quotient, on ajoute au lieu de retrancher :

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta d}{d}$$

De là l'énoncé du **théorème des incertitudes relatives**, déjà utilisé dans les exercices et les travaux pratiques de Seconde et de Première :

⁽¹⁾ En assimilant les erreurs absolues à des différentielles.

L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient de nombres incertains est égale à la **somme** des incertitudes relatives de ces nombres.

On en déduit que :

— Si $g = a^n$,

$$\frac{\Delta g}{g} = \left| n \right| \frac{\Delta a}{a}.$$

On démontre que cette relation est générale; elle s'applique quel que soit n , positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

— Par suite, si $g = a^n \cdot b^m \cdot c^p \dots$,

$$\frac{\Delta g}{g} = \left| n \right| \frac{\Delta a}{a} + \left| m \right| \frac{\Delta b}{b} + \left| p \right| \frac{\Delta c}{c} + \dots$$

Exemple. — Soit à déterminer la masse volumique de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse et de son arête :

Si m et a désignent les valeurs approchées de la masse et de l'arête du cube, il vient :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3} = m \cdot a^{-3}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3 \frac{\Delta a}{a}$$

2° Les facteurs ne sont pas indépendants :

Dans ce cas, il faut réduire les termes semblables dans l'expression de l'erreur relative avant de passer à la limite supérieure.

Exemple. — Lorsqu'on détermine la densité d'un corps solide par la méthode du flacon (ou l'application du théorème d'Archimède; cours de Seconde), on arrive à la relation :

$$d = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1} \quad (1)$$

où m_1, m_2, m_3 (1) sont les résultats de trois mesures de masses effectuées successivement, à tare constante, avec la même balance.

L'erreur relative de ce quotient s'écrit :

$$\frac{\delta d}{d} = \frac{\delta(m_2 - m_1)}{m_2 - m_1} - \frac{\delta(m_3 - m_1)}{m_3 - m_1}$$

Or : $\delta(m_2 - m_1) = \delta m_2 - \delta m_1$;

$\delta(m_3 - m_1) = \delta m_3 - \delta m_1$

Par suite :

$$\begin{aligned} \frac{\delta d}{d} &= \delta m_1 \left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1} \right) \\ &+ \delta m_2 \left(\frac{1}{m_2 - m_1} \right) - \delta m_3 \left(\frac{1}{m_3 - m_1} \right) \end{aligned}$$

Passons aux incertitudes en remplaçant chacune des erreurs absolues $\delta m_1, \delta m_2, \delta m_3$ par l'incertitude absolue Δm des trois pesées et en prenant son coefficient en valeur absolue :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta d}{d} &= \Delta m \left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1} \right) \\ &+ \Delta m \left(\frac{1}{m_2 - m_1} \right) + \Delta m \left(\frac{1}{m_3 - m_1} \right) \end{aligned}$$

D'où, après simplification :

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{2 \Delta m}{m_3 - m_1}$$

Cette valeur de l'incertitude relative est nettement inférieure à la valeur

$$\frac{\Delta d}{d} = 2 \Delta m \left(\frac{1}{m_3 - m_1} + \frac{1}{m_2 - m_1} \right)$$

qu'aurait fournie l'application directe à la relation (1) des théorèmes sur les incertitudes absolues et relatives. Cela tient à la présence de m_1 à la fois au numérateur et au dénominateur; se placer d'emblée dans le cas le plus défavorable, comme le suppose l'application des théorèmes sur les incertitudes, c'est admettre par exemple que m_1 est *simultanément* une valeur approchée par excès au numérateur et une valeur approchée par défaut au dénominateur, ce qui n'a pas de sens.

7. Les calculs effectués sur des données approchées.

a. — Il arrive que le résultat d'une mesure soit fourni sans indication de son approximation; c'est, en particulier, très souvent le cas pour les nombres qui constituent les données d'un problème de Physique. Il est alors généralement admis que l'incertitude absolue n'excède pas une unité de l'ordre du dernier chiffre (2).

Par exemple, une tension $U \approx 115$ volts est supposée connue à moins de 1 volt près; de même, si l'on donne une résistance sous la forme :

$R \approx 33,26$ ohms, on peut admettre que :

$$R = 33,26 + 0,01 \text{ ohms}$$

Ceci montre que, pour un Physicien, les nombres 115 et 115,0, par exemple, ne sont pas équivalents : le second comporte une incertitude **dix fois plus faible** que le premier.

b. — Partant de données approchées, un calcul ne peut qu'aboutir à un résultat dont l'incertitude sera au moins égale à celle de la donnée la moins précise; c'est pourquoi le nombre des chiffres significatifs conservés dans un résultat ne doit jamais impliquer une précision supérieure à celle des données.

Un nombre à 3 chiffres significatifs, tel par exemple que 512 (ou 5,12, ou encore 0,0512), implique une approximation de $\frac{1}{512} \approx 0,002$

(1) Dans le cas le plus fréquent d'un solide plus dense que l'eau :

Par suite : $m_2 > m_3 > m_1$

$$m_3 - m_1 < m_2 - m_1$$

(2) Pour l'AFNOR (Association Française de Normalisation) c'est une demi-unité de l'ordre du dernier chiffre.

(deux pour mille); or, la précision des mesures physiques courantes excède rarement quelques millièmes : il convient donc, sauf exception, de ne pas conserver plus de 3 chiffres significatifs dans un résultat numérique.

c. — On n'a pas non plus à employer, dans les calculs intermédiaires, les résultats partiels avec tous leurs chiffres; pratiquement, on conserve un chiffre de plus que n'en comportent les données.

Si un nombre incommensurable tel que π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$..., figure comme facteur numérique dans un monôme que l'on se propose de calculer, il convient de lui attribuer une valeur approchée introduisant une erreur systématique relative au plus égale au dixième de la plus faible des incertitudes relatives des autres facteurs du monôme; par exemple, en prenant $\pi = 3,14$, on introduit une erreur relative

$$\frac{\delta\pi}{\pi} \approx \frac{16}{3\,1416} \approx 0,5\,‰$$

que l'on peut considérer comme négligeable si les autres facteurs sont approchés à 0,5 % près.

Bien entendu, dans des calculs numériques approchés, il est souvent avantageux d'employer les *logarithmes*; il est encore plus rapide d'utiliser une *règle à calcul* si, toutefois, on peut se contenter de deux chiffres sûrs dans le résultat final.

d. — Les formules d'approximation.

Il est parfois possible d'abréger un calcul numérique en y remplaçant une formule rigoureuse mais compliquée par une formule plus simple qui conduit approximativement au même résultat; c'est légitime si l'erreur supplémentaire que l'on introduit ainsi systématiquement est négligeable devant celle qui découle de l'imprécision des données.

1°. Supposons qu'on ait à calculer numériquement l'expression :

$$x = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon'),$$

où ε et ε' sont des quantités petites devant 1, inférieures par exemple à 1 centième.

Le calcul algébrique donne :

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon') = (1 + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon\varepsilon')$$

Or, la quantité $\varepsilon\varepsilon'$ est certainement inférieure à :

$$10^{-2} \times 10^{-2} = 10^{-4}$$

Comme le produit $(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon')$ est peu différent de 1, la suppression du terme $\varepsilon\varepsilon'$ entraîne une erreur relative de l'ordre de :

$$\frac{10^{-4}}{1} = 10^{-4} \text{ (un dix-millième).}$$

Cela montre que, dans un calcul numérique approché, un produit de la forme :

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon')$$

peut très souvent être remplacé par la somme :

$$1 + \varepsilon + \varepsilon'$$

L'approximation est d'autant meilleure que les quantités ε et ε' sont plus petites devant 1.

De proche en proche on généralise facilement :

$$(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \dots \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots$$

les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ pouvant être positives ou négatives.

Par exemple le produit $1,0037 \times 0,9978$, s'écrit :

$$(1 + 0,0037)(1 - 0,0022),$$

et vaut approximativement :

$$1 + 0,0037 - 0,0022 = 1,0015,$$

valeur qui diffère du produit exact (1,00149186) de moins de 0,00001 (1 cent-millième).

Dans la relation précédente, si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon$, il vient :

$$(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$$

On démontre que cette formule est applicable quel que soit n , qui peut être positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

Par exemple, si ε est un nombre (positif ou négatif) petit devant 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \varepsilon} &= (1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon \\ \sqrt[n]{1 + \varepsilon} &= (1 + \varepsilon)^{1/n} \approx 1 + \varepsilon/n \\ \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \varepsilon}} &= (1 + \varepsilon)^{-1/n} \approx 1 - \varepsilon/n \end{aligned}$$

2°. On sait d'autre part que, pour des angles petits, les valeurs numériques du *sinus*, de la *tangente* et de l'*angle exprimé en radian* sont très voisines :

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha_{(\text{rd})}$$

L'erreur relative commise en confondant ces valeurs est (1) :

de l'ordre du *millième* pour $\alpha \leq 1/20$ de radian (environ 3°);

de l'ordre du *centième* pour $\alpha \leq 1/6$ de radian (environ 10°).

De même, si α est petit :

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

qui se réduit à : $\cos \alpha \approx 1$, au millième près, quand α n'excède pas 2 à 3 degrés (1).

(1) Voir le haut de la table des rapports trigonométriques, à la fin du manuel.

EXERCICES

1. Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux on mesure les diamètres intérieur (D_1) et extérieur (D_2) et on trouve : $D_1 = 19,5 \pm 0,1$ mm ;

$$D_2 = 26,7 \pm 0,1 \text{ mm.}$$

Donner le résultat de la mesure et sa précision.

$$\text{Rép. : } 3,6 \pm 0,1 \text{ mm ; } 3 \text{ ‰.}$$

2. Calculer l'aire S d'un cercle dont le rayon vaut : $R = 5,21 \pm 0,01$ cm.

Quelle est la précision du résultat obtenu ?

3. Dans une détermination rapide de masse volumique on a trouvé : $m \approx 16,25$ g à 1 ‰ près et $V = 8,5 \pm 0,4$ cm³ ; calculer la masse volumique et la précision du résultat.

$$\text{Rép. : } 1,9 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3 \text{ ; à } 5 \text{ ‰ près.}$$

4. La mesure des dimensions (hauteur et diamètre) d'un cylindre homogène en acier a donné : $h = D = 4,000 \pm 0,005$ cm ; celle de sa masse a conduit au résultat : $m = 392,05 \pm 0,05$ g. Calculer le volume du cylindre et la masse volumique de l'acier dont il est fait.

5. On détermine la constante J (équivalent en joules d'une calorie) en utilisant l'effet Joule ; soit Q la quantité de chaleur (en calorie) dégagée dans un calorimètre par le passage d'un courant continu d'intensité I (ampère) dans une résistance R (ohm) pendant un intervalle de temps t (seconde) ; si R , I et t sont mesurés au millième près, quelle doit être la précision de la mesure de l'accroissement de température du calorimètre pour qu'on obtienne J au centième près ? (On admet que l'incertitude rela-

tive de la masse en eau totale du calorimètre est négligeable devant celle de l'accroissement de température.) Avec quelle incertitude absolue doit-on alors repérer chaque température si la variation de température est 5° ?

$$\text{Rép. : } 6 \text{ ‰ ; } 0,015^\circ.$$

6. Effectuer au dix-millième près les opérations suivantes :

$$1^\circ \frac{1,0037}{0,9978} ; \quad 2^\circ \sqrt{100,18} ; \quad 3^\circ \sqrt[3]{997,9}.$$

7. Calculer $\cos 0,05$ (radian) avec une incertitude relative inférieure au dix-millième.

$$\text{Rép. : } 0,9988.$$

8. l_0 , s_0 , ρ_0 représentent les valeurs approchées de la longueur, la section et la résistivité à 0° d'un conducteur cylindrique ; trouver l'expression de la valeur approchée de la résistance de ce conducteur à une température (pas trop élevée) t° .

Si le coefficient de température vaut $\alpha \approx 4 \times 10^{-3}$ et le coefficient de dilatation linéaire : $\lambda \approx 1,5 \times 10^{-5}$ et si les données l_0 , s_0 et ρ_0 sont approchées à 1 ‰ , jusqu'à quelle température cette expression de R demeure-t-elle acceptable ?

9. Une lentille mince convergente, de distance focale $f = 1$ mètre (connue à 1 mm près), donne d'un objet plan, perpendiculaire à son axe principal, une image réelle située à $150,0 \pm 0,2$ cm de son centre optique. Calculer la distance p de celui-ci à l'objet et indiquer la précision du résultat.

$$\text{Rép. : } p \approx 3 \text{ m, à } 6 \text{ ‰ près.}$$

RAPPELS DE CINÉMATIQUE*

La Cinématique se propose l'étude des mouvements dans leurs rapports avec le temps; on ne s'y préoccupe pas des causes de ces mouvements.

L'état de repos ou de mouvement d'un corps est essentiellement **relatif** : par exemple, dans un avion en vol, un passager endormi est à la fois au repos par rapport à l'avion et en mouvement par rapport au sol; s'il se lève et se déplace, son mouvement par rapport à l'avion sera très différent de son mouvement par rapport au sol.

Ceci fait comprendre qu'un mouvement ne peut se définir que par rapport à un **repère** (ou

système de référence) considéré comme fixe; sauf indication particulière, nous sous-entendrons toujours que les mouvements étudiés sont rapportés à des **repères terrestres**, par exemple à un système d'axes invariablement liés à la Terre.

Pour définir les grandeurs cinématiques, nous envisagerons le cas simple du mouvement d'un **point matériel**, c'est-à-dire d'un corps de dimensions assez petites pour être assimilé à un point; nous l'appellerons le **mobile**. Une bille de très faible diamètre est une représentation approchée d'un tel mobile.

A. LES GÉNÉRALITÉS

1. La position du mobile.

a. — Soit un repère cartésien $Oxyz$ et un mobile M dans l'espace rapporté à ce repère :

— Si les coordonnées x, y, z de M sont invariables, on dit que M est fixe dans le repère considéré;

— Si elles varient d'un instant à l'autre, M est dit en mouvement dans le repère considéré.

La **trajectoire** est le lieu géométrique des positions successives du mobile par rapport au repère choisi; le mouvement est dit **rectiligne** si la trajectoire est une droite; il est **curviligne** dans tous les autres cas.

Dans le cours de Physique, nous n'aurons à étudier que les mouvements de mobiles dont les trajectoires sont des droites ou des courbes planes.

* Le repère peut alors se réduire à un axe Ox porté par la trajectoire rectiligne ou à deux axes Ox et Oy du plan de la trajectoire curviligne.

A chaque instant correspond une position du mobile dans l'espace rapporté au repère considéré; on caractérise chacun de ces instants par un nombre algébrique t , appelé **date**, mesurant l'intervalle de temps qui le sépare d'un instant initial dont la date est prise arbitrairement égale à zéro. Un instant antérieur à l'instant initial a une date négative, alors que tout instant postérieur a une date positive.

b. — A l'instant de date t (1), la position du mobile M peut être caractérisée :

— par les **coordonnées** de M :

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad (1)$$

— ou, ce qui revient au même, par les compo-

(*) Ces notions ont déjà été étudiées dans le cours de Mathématiques de Première. Nous nous bornerons ici à rappeler les définitions et les propriétés qui sont utilisées dans le cours de Physique de Terminale.

(1) On dit encore, plus brièvement, « à l'instant t ».

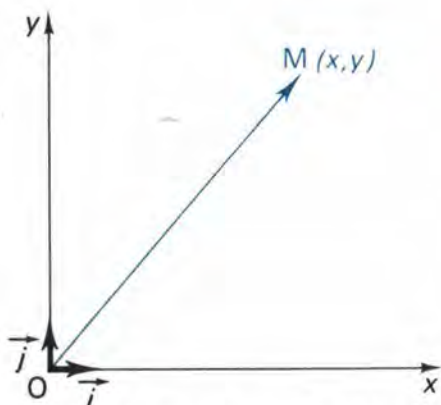


Fig. 1. — Le vecteur-espace du mobile M .
 $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy .

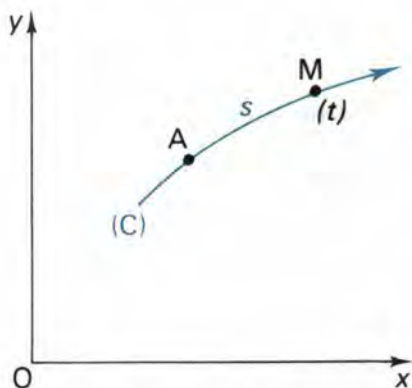


Fig. 2. — L'abscisse curviligne $s = \varphi(t)$ du mobile à l'instant t .

santes du vecteur $\vec{OM}$, appelé **vecteur-espace du mobile M** :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ (fig. 1)}$$

— ou encore, — si l'on a construit la trajectoire (C) à partir des équations cartésiennes (1) et qu'on l'a orientée —, par l'**abscisse curviligne** :

$$\widehat{AM} = s = \varphi(t)$$

A est une origine des abscisses choisie arbitrairement sur la trajectoire (fig. 2); c'est par exemple la position M du mobile à l'instant initial $t = 0$.

La relation $s = \varphi(t)$ est l'**équation horaire** du mouvement de M sur sa trajectoire.

Le graphe de cette fonction $s = \varphi(t)$ constitue le **diagramme du mouvement** (ou de l'espace).

2. La vitesse du mobile.

a. — Si le mobile a la position $M(x, y)$ à l'instant t et la position $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ à l'instant $t + \Delta t$ (fig. 3-a), l'accroissement du vecteur-espace

$$\Delta(\vec{OM}) = \vec{OM}' - \vec{OM}$$

a pour composantes $\Delta x \cdot \vec{i}$ et $\Delta y \cdot \vec{j}$:

$$\Delta(\vec{OM}) = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j}$$

L'accroissement *moyen* du vecteur-espace

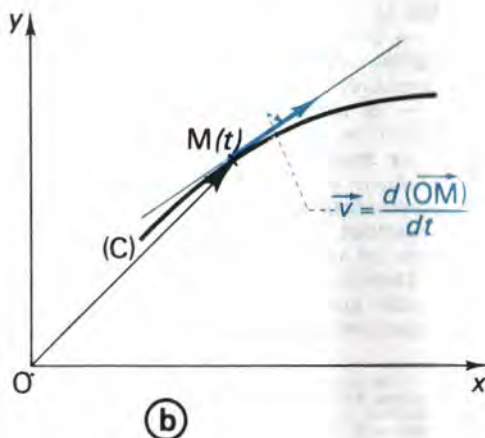
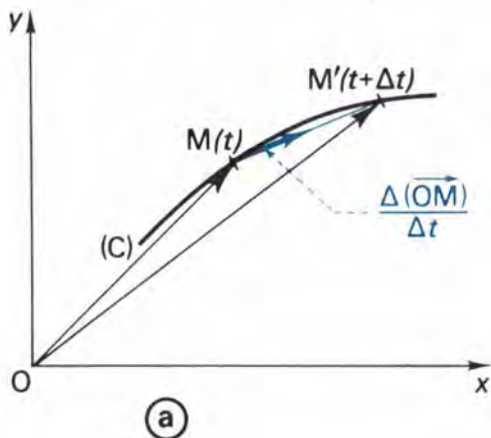


Fig. 3.

$$\frac{\Delta(\vec{OM})}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \vec{j}$$

est appelé **vecteur-vitesse moyenne** du mobile entre les instants t et $t + \Delta t$.

b. — Lorsque Δt tend vers zéro, la vitesse moyenne tend vers une limite $\vec{v}$ qui est la *dérivée du vecteur-espace par rapport au temps*, pour la date t :

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{OM})}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j}$$

Le vecteur $\vec{v}$ est le **vecteur-vitesse instantanée** (ou vitesse vraie) à l'instant t . On montre qu'il est *tangent à la trajectoire*, orienté dans le sens du mouvement (fig. 3-b), et qu'il a pour module :

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \text{ ou encore : } v = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

c. — Les unités de vitesse dérivent des unités de longueur et des unités de temps. Dans le système international d'unités (système SI), l'unité de vitesse est le **mètre par seconde** (m/s ou m. s⁻¹).

On peut aussi utiliser le **kilomètre par heure** (km/h) :

$$1 \text{ km/h} = 1/3,6 \text{ m/s}$$

3. L'accélération du mobile.

a. — L'hodographe du mouvement ; le vecteur accélération.

D'un point O' quelconque pris comme origine, si l'on trace pour toute valeur de t un vecteur

$\vec{O'm}$ équipollent au vecteur-vitesse $\vec{v}$, le lieu géométrique de l'extrémité m de ce vecteur constitue l'**hodographe** du mouvement du mobile M. Aux instants t et $t + \Delta t$, par exemple, correspondent les positions M et M' du mobile sur la trajectoire C (fig. 4-a) et les positions m et m' de l'extrémité du vecteur O'm sur l'hodographe H (fig. 4-b).

Soit $\vec{\gamma}$ le vecteur-vitesse du point mobile m ; il renseigne sur les variations (en direction et module) du vecteur O'm équipollent à $\vec{v}$ (fig. b) comme le vecteur-vitesse $\vec{v}$ renseigne sur les variations du vecteur-espace OM (fig. a).

$$\text{Nous avons vu que : } \vec{v} = \frac{d(\vec{OM})}{dt}$$

$$\text{De même : } \vec{\gamma} = \frac{d(\vec{O'm})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Par suite, le vecteur $\vec{\gamma}$ est égal à la *dérivée seconde de OM par rapport au temps*, pour la date t considérée :

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2(\vec{OM})}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j}$$

Le vecteur $\vec{m\Gamma}$, équipollent à $\vec{\gamma}$ (fig. a), est appelé le **vecteur-accélération** à l'instant t ; il caractérise la variation du vecteur-vitesse à cet instant. Notons que ce vecteur se place toujours du côté *concave* de la trajectoire C.

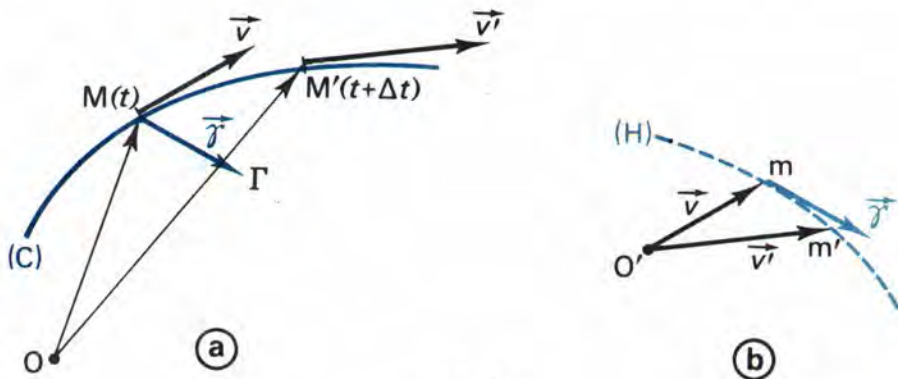


Fig. 4.

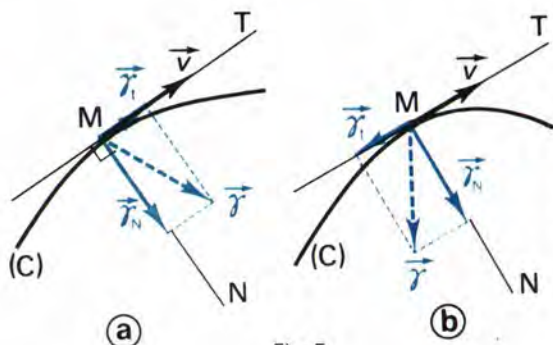


Fig. 5.

b. — L'accélération tangentielle et l'accélération normale.

Projetons le vecteur-accelération sur la *tangente* MT et sur la *normale* MN à la trajectoire au point M (fig. 5); nous obtenons deux composantes rectangulaires de $\vec{\gamma}$:

— L'**accélération tangentielle** $\vec{\gamma}_t$, qui caractérise la variation du *module* du vecteur-vitesse $\vec{v}$;

— L'**accélération normale** $\vec{\gamma}_N$, qui caracté-

rise la variation de la *direction* du vecteur $\vec{v}$.

On démontre que ces composantes du vecteur-accelération $\vec{\gamma}$ à l'instant t ont pour valeur :

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad \gamma_N = \frac{v^2}{\rho}$$

ρ est le *rayon de courbure* de la trajectoire au point M. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, ρ est évidemment le rayon de cette trajectoire.

Si, à l'instant t considéré, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}_t$ ont *même sens*, cela signifie que le module de la vitesse est croissant : on dit alors que le mouvement de M est *accélééré* (fig. 5-a); dans le cas contraire, le module de la vitesse est décroissant, le mouvement est dit *retardé* (fig. 5-b).

D'autre part, si l'accélération tangentielle $\vec{\gamma}_t$ est constamment *nulle*, le module de la vitesse v est constant et le mouvement est dit *uniforme*.

c. — Les unités d'accélération.

Elles dérivent des unités de vitesse et des unités de temps. Dans le système SI, l'unité d'accélération est le **mètre par seconde, par seconde** (m/s^2 , ou $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

B. L'APPLICATION AU CAS PARTICULIER DES MOUVEMENTS RECTILIGNES

Nous avons vu que dans ce cas le repère se réduit à un axe Ox dont le support est confondu avec la trajectoire (fig. 6).

Le vecteur-vitesse instantanée $\vec{v}$, tangent à la trajectoire, admet aussi celle-ci pour support; d'autre part, le rayon de courbure ρ de la trajectoire étant *infini*, la composante normale de l'accélération ($\gamma_N = \frac{v^2}{\rho}$) est constamment

nulle de sorte que le vecteur-accelération $\vec{\gamma}$, confondu avec sa composante tangentielle ($\gamma_t = \frac{dv}{dt}$), est également porté par la trajectoire.

4. Le mouvement rectiligne uniforme.

Soit un mobile M décrivant la droite Δ . Par rapport au repère Ox admettant Δ pour support, l'abscisse x du point M à l'instant t

est la valeur algébrique du vecteur-espace $\vec{OM}$.

Au même instant, la valeur algébrique du vecteur-vitesse,

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{OM})}{dt}, \text{ est : } v = \frac{dx}{dt}$$

et celle du vecteur-accelération,

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2(\vec{OM})}{dt^2}$$

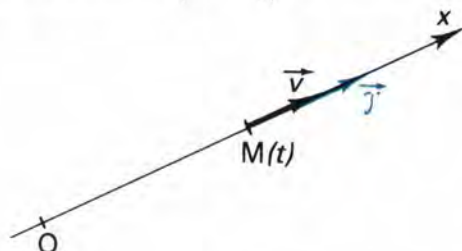


Fig. 6.

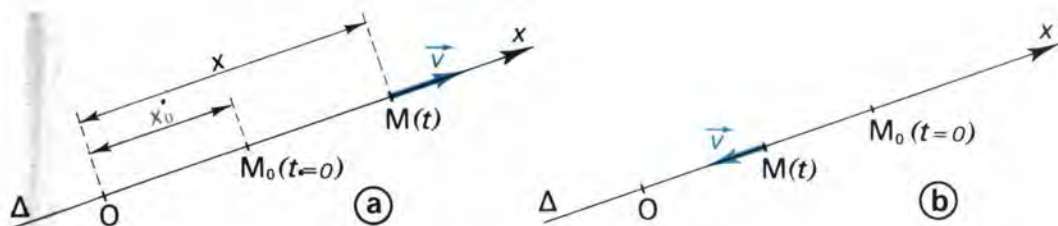


Fig. 7. — Le mouvement rectiligne uniforme.

Le vecteur-vitesse $\vec{v}$ est orienté dans le sens du mouvement.

En a : v est *positive* ; le mouvement a le sens *positif* sur l'axe Ox.

En b : v est *négative* ; le mouvement a le sens *négatif* sur l'axe Ox.

est :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Si γ est *nulle à tout instant*, v est une *constante* : on dit alors que le mouvement de M est **rectiligne uniforme**.

L'équation horaire d'un tel mouvement s'obtient en prenant la primitive de $v = \text{constante}$ par rapport à la variable t :

$$x = vt + C^{\text{te}}$$

La constante, égale à la valeur de x pour $t = 0$, représente l'*abscisse initiale* x_0 (fig. 7). Par suite :

$$x = vt + x_0$$

Ainsi, l'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme est une fonction du **premier degré** par rapport au temps. Cela signifie en particulier que le mobile parcourt des espaces égaux en des temps égaux.

Rassemblons les équations qui caractérisent le mouvement rectiligne uniforme :

$$\begin{aligned} \gamma &= 0 \\ v &= C^{\text{te}} \\ x &= vt + x_0 \end{aligned}$$

Il importe de noter que :

— Le signe et la valeur algébrique v du vecteur-vitesse dépendent du sens positif choisi sur le repère Ox (fig. 7-a et b).

— Le signe de l'abscisse initiale x_0 dépend à la fois du sens positif choisi sur le repère et du choix de l'origine O des abscisses.

Si l'on choisit comme origine O la position du mobile à l'instant initial $t = 0$, l'abscisse initiale x_0 est nulle et l'équation horaire du mouvement se réduit à :

$$x = vt$$

5. Le mouvement rectiligne uniformément varié.

a. — Les équations du mouvement.

Un mouvement rectiligne est dit **uniformément varié** lorsque son accélération est constante.

La primitive par rapport à t de la relation de définition $\gamma = C^{\text{te}}$ donne l'équation de la valeur algébrique du vecteur-vitesse à l'instant t :

$$v = \gamma t + v_0,$$

où v_0 est la *vitesse initiale*, c'est-à-dire la valeur algébrique du vecteur-vitesse à l'instant initial $t = 0$.

D'autre part, la primitive par rapport à t de l'équation de la vitesse donne l'équation horaire du mouvement, $x = f(t)$:

$$x = 1/2 \gamma t^2 + v_0 t + x_0,$$

dans laquelle x_0 est l'*abscisse initiale*, c'est-à-dire l'abscisse à l'instant initial $t = 0$.

Ainsi, l'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniformément varié est une fonction du **deuxième degré** par rapport au temps.

Rassemblons dans un tableau les équations générales du mouvement rectiligne uniformément varié :

$$\begin{aligned} \gamma &= C^{\text{te}} \\ v &= \gamma t + v_0 \\ x &= 1/2 \gamma t^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned}$$

Là encore, il importe de remarquer que les lettres qui figurent dans ces équations représentent des valeurs *algébriques*.

En particulier :

— Les signes de γ et de v_0 dépendent du sens positif choisi sur l'axe Ox ;

— Le signe de x_0 dépend à la fois du sens

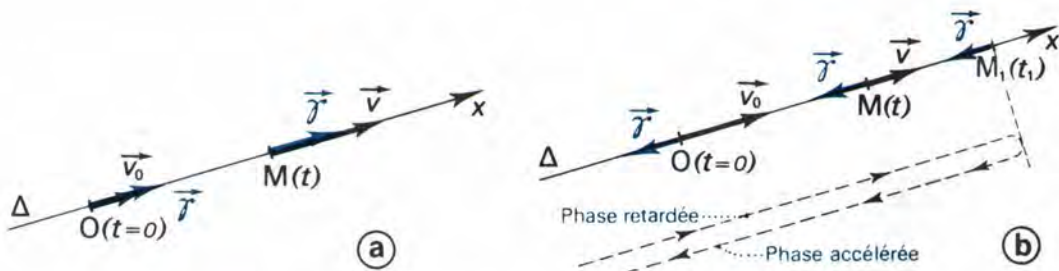


Fig. 8. — Le mouvement rectiligne uniformément varié.

positif sur Ox et du choix de l'origine O des abscisses.

Si l'on choisit pour O la position du mobile à l'instant initial $t = 0$, l'équation horaire se réduit à :

$$x = 1/2 \gamma t^2 + v_0 t$$

Dans ce qui suit, pour simplifier, nous admettons ce choix particulier de l'origine des abscisses.

b. — Mouvement uniformément accéléré et uniformément retardé (ou décélééré).

— Si γ et v_0 ont même signe, le module du vecteur-vitesse croît avec t ; le mouvement est **accélééré** dans le sens de γ et de v_0 (fig. 8-a).

— Si γ et v_0 sont de signes contraires, le module du vecteur-vitesse commence par décroître, s'annule pour une valeur t_1 de t telle que :

$$v = \gamma t_1 + v_0 = 0 \quad ; \quad t_1 = -\frac{v_0}{\gamma}$$

puis croît à partir de cet instant t_1 .

Le mouvement est donc

— **uniformément retardé** (ou décélééré)

dans le sens de v_0 pour $t < t_1$;

— puis **uniformément accéléré** dans le sens de γ pour $t > t_1$ (fig. 8-b) ⁽¹⁾.

L'étude de la chute libre avec vitesse initiale verticale (chapitre suivant) nous fournira un exemple concret de mouvement uniformément varié (p. 25).

c. — Quelques propriétés du mouvement uniformément varié.

1° L'hodographe d'un tel mouvement est une droite; le point mobile m (§ 3-a) la parcourt

⁽¹⁾ Ces résultats montrent que la nature (accélérée ou retardée) du mouvement n'est pas liée au signe de v , puisque ce signe dépend du sens positif sur la trajectoire, lequel est choisi arbitrairement. En particulier, ce serait une faute de dire que le mouvement est accéléré quand v est positif, retardé quand v est négatif.

d'un mouvement *uniforme* en s'éloignant de O' si le mouvement est *accélééré*, en se rapprochant de O' si le mouvement est *retardé*.

2° L'élimination de la variable t entre les équations :

$$v = \gamma t + v_0$$

$$x = 1/2 \gamma t^2 + v_0 t$$

donne une relation entre les valeurs de la vitesse et de l'abscisse correspondante :

$$v^2 - v_0^2 = 2 \gamma x$$

3° Si le mobile part de l'origine O des abscisses à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale ($v_0 = 0$), les équations précédentes se simplifient :

$$v = \gamma t$$

La vitesse acquise est proportionnelle au temps mis pour l'acquérir.

$$x = 1/2 \gamma t^2$$

L'espace parcouru à partir du départ est proportionnel au carré du temps mis pour le parcourir.

Enfin, $v^2 = 2 \gamma x$:

Le carré du module du vecteur-vitesse est proportionnel à l'abscisse.

4° Calculons les segments (ou « espaces ») que parcourt un mobile en mouvement uniformément varié pendant des intervalles de temps successifs de même valeur (quelconque) θ , à partir d'un instant t quelconque.

Utilisons l'équation horaire sous sa forme la plus simple ⁽¹⁾ :

$$x = 1/2 \gamma t^2$$

$$x_1 = 1/2 \gamma (t + \theta)^2 = 1/2 \gamma t^2 + \gamma t \theta + 1/2 \gamma \theta^2$$

$$x_2 = 1/2 \gamma (t + 2\theta)^2 = 1/2 \gamma t^2 + 2\gamma t \theta + 4/2 \gamma \theta^2$$

$$x_3 = 1/2 \gamma (t + 3\theta)^2 = 1/2 \gamma t^2 + 3\gamma t \theta + 9/2 \gamma \theta^2$$

⁽¹⁾ Voir l'exercice n° 5.

d'où :

$$x_1 - x = \gamma t \theta + 1/2 \gamma \theta^2$$

$$x_2 - x_1 = \gamma t \theta + 3/2 \gamma \theta^2$$

$$x_3 - x_2 = \gamma t \theta + 5/2 \gamma \theta^2$$

Les différences $x_1 - x$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ... représentent respectivement les espaces parcourus entre les instants t et $t + \theta$, $t + \theta$ et $t + 2\theta$, $t + 2\theta$ et $t + 3\theta$, ... Nous constatons qu'ils forment une progression arithmétique de raison $\gamma \theta^2$; en particulier, si l'intervalle de temps θ vaut 1 unité de temps, la raison de la progression est la valeur algébrique γ de l'accélération du mouvement. Ainsi,

dans un mouvement rectiligne uniformément varié, les espaces parcourus pendant des intervalles de temps successifs de même valeur θ forment une progression arithmétique de raison $\gamma \theta^2$.

Nous admettrons sans démonstration la réciproque de ce théorème.

6. Les mouvements rectilignes des projections M_x et M_y d'un point mobile M sur les axes Ox et Oy.

Soit un mobile M animé d'un mouvement dont la trajectoire (C) est une courbe plane, c'est-à-dire tout entière contenue dans le plan du repère cartésien Oxy (fig. 9).

Projetons M orthogonalement sur Ox et Oy; lorsque M décrit la courbe (C), les points projections M_x et M_y décrivent respectivement les droites qui supportent Ox et Oy.

— Les équations horaires

$$x = f(t) \quad ; \quad y = g(t)$$

des mouvements rectilignes des points M_x

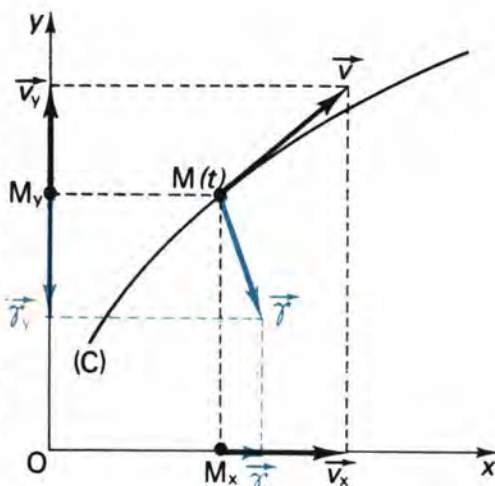


Fig. 9.

et M_y sont les coordonnées du mobile M à l'instant t dans le repère Oxy;

— Les vecteurs-vitesses $\vec{v}_x$ et $\vec{v}_y$ de M_x et M_y sont les projections sur Ox et Oy du vecteur-vitesse $\vec{v}$ du mobile M au même instant :

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

— De même, les vecteurs accélérations $\vec{\gamma}_x$ et $\vec{\gamma}_y$ de M_x et M_y sont les projections du vecteur-accelération $\vec{\gamma}$ du mobile M au même instant :

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_x + \vec{\gamma}_y$$

EXERCICES

1. L'équation horaire d'un mouvement rectiligne est : $x = 5(5 - t)$, avec x exprimé en m et t en s ; quelle est la nature du mouvement ? Calculer la valeur algébrique du vecteur-vitesse ; préciser la position du mobile à l'instant $t = 0$ par rapport à l'origine O des abscisses.

Rép. : mouvement rectiligne uniforme ; $v = -5$ m/s ; M_0 à 25 m à partir de O dans le sens positif du repère orienté Ox.

2. Un mobile chemine sur un axe $X'OX$ orienté positivement de X' vers X , avec un vecteur-vitesse de valeur algébrique constante $v = -72$ km/h.

1° Représenter le vecteur-vitesse à l'échelle de 0,5 mm pour 1 m/s.

2° L'abscisse à l'instant $t = 0$ étant $x_0 = 50$ m, calculer les abscisses du mobile aux instants $t = \pm 5$ s et la date du passage par l'origine O des abscisses.

3. Démontrer que si un mouvement rectiligne est uniformément varié, la vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 est égale :

a) à la moyenne arithmétique des vitesses vraies à ces instants ;

b) à la vitesse vraie à l'instant $\frac{t_1 + t_2}{2}$.

4. Un mobile, en mouvement sur un axe $X'X$, orienté positivement de X' vers X , a un vecteur-accelération constant de valeur algébrique $\gamma = -2$ m/s² ; la valeur algébrique du vecteur-vitesse à l'instant initial $t = 0$ est $v_0 = 10$ m/s.

En choisissant pour origine O des abscisses la position du mobile à l'instant $t = 0$:

a) Déterminer la date à laquelle le vecteur-vitesse s'annule pour changer de sens et l'abscisse correspondante ;

b) Déterminer les dates et les valeurs algébriques des vitesses correspondant aux abscisses : 1° $x = 0$; 2° $x = 9$ m ; 3° $x = -11$ m ;

c) Placer sur l'axe les positions du mobile aux dates précédemment calculées et se rendre compte de son cheminement ; calculer le chemin effectivement parcouru entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 10$ s.

Rép. : a) 5 s ; 25 m ; b) 1° 0 et 10 s ; ± 10 m/s ; 2° 1 et 9 s ; ± 8 m/s ; - 1 et 11 s ; ± 12 m/s ; c) 50 m.

5. Démontrer que dans un mouvement uniformément varié, les espaces parcourus pendant des intervalles de temps successifs de même valeur θ forment

une progression arithmétique de raison $r = \gamma\theta^2$ en utilisant l'équation horaire sous sa forme la plus générale :

$$x = 1/2 \gamma t^2 + v_0 t + x_0$$

6. L'équation horaire d'un mouvement rectiligne est : $x = 5(t^2 + 2)$ m ; déterminer l'abscisse du mobile à l'instant $t = 0$, la valeur algébrique de la vitesse initiale et celle du vecteur-accelération.

7. Deux mobiles ont des mouvements uniformément variés le long du même axe $X'X$, orienté positivement de X' vers X ; les valeurs algébriques de leurs vecteurs-accelérations sont 1 m/s² et -2 m/s² et leurs abscisses à l'instant initial $t = 0$ valent : $x_1 = 0$; $x_2 = 150$ m ; déterminer la date et l'abscisse de leur croisement sachant que leurs vitesses initiales sont nulles.

Rép. : $t = \pm 10$ s ; $x = 50$ m.

8. Sur une portion rectiligne ABCD de voie ferrée où s'effectuent des travaux, un train arrivant en A avec une vitesse de module égal à 54 km/h a la marche suivante :

— De A à B, tel que $AB = 125$ m, un mouvement uniformément retardé réduisant la vitesse en B à la valeur de 36 km/h ;

— De B à C, pendant 1 minute, un mouvement uniforme ;

— De C à D, un mouvement uniformément accéléré tel que la vitesse reprenne la valeur 54 km/h en 20 secondes.

En prenant pour origine des abscisses le point A, pour sens positif le sens de la marche et pour instant initial $t = 0$ l'instant du passage en A, déterminer les équations horaires des trois phases et calculer l'espace parcouru de A à D.

Tracer les diagrammes de l'espace $x = f(t)$, de la vitesse $v = f'(t)$, et de l'accélération $\gamma = f''(t)$ pour l'ensemble des trois phases.

Échelles : 1 cm pour $x = 50$ m, $v = 2$ m/s, $\gamma = 0,1$ m/s², $t = 10$ s.

9. L'équation de la valeur algébrique du vecteur-vitesse d'un mobile en mouvement rectiligne est : $v = 2(4 + t^2)$ m/s. Sachant qu'à la date $t = 3$ s l'abscisse du mobile est 52 m, trouver la vitesse initiale, l'équation $\gamma = f''(t)$ de l'accélération et l'équation horaire du mouvement.

LA CHUTE LIBRE



La *Dynamique* est l'étude des relations entre les mouvements et leurs causes; ces causes sont des **forces**, puisqu'on appelle force *tout ce qui produit ou modifie le mouvement d'un corps* (cours de seconde).

Nous étudierons d'abord le mouvement d'un corps dû à son **poids**; rappelons en effet que tout corps est soumis à un poids, force verticale, dirigée vers le bas, appliquée au *centre de gravité* et dont l'intensité dépend du corps et du lieu. Dans une portion d'espace terrestre dont les dimensions sont petites devant le rayon de la Terre, le poids d'un corps peut être considéré comme une *force pratiquement constante en direction, sens et intensité*.

Le mouvement d'un corps soumis à la *seule* action de son poids est appelé une **chute libre**; dans l'étude de la chute libre d'un corps, nous nous limiterons à la recherche des caractéristiques cinématiques du mouvement du centre de gravité du corps considéré.

1. L'expérience du tube de Newton; la première loi.

Si nous abandonnons en même temps un morceau de métal et une feuille de papier, par exemple, nous observons que ces deux corps se comportent différemment au cours de leur chute et parviennent au sol après des temps de chute différents : le corps métallique tombe rapidement alors que le centre de gravité de la feuille décrit plus lentement une trajectoire beaucoup plus capricieuse.

De telles chutes ne sont pas libres, puisque l'air soumet les corps à des forces dont l'effet dynamique tend à s'opposer à celui de leurs poids; un corps en contact avec l'air est en effet

soumis à une *poussée d'Archimède* (opposée au poids de l'air déplacé) et, s'il se meut dans l'air, à des *forces résistantes* qui dépendent de la forme du corps et dont l'intensité croît très vite avec la vitesse du corps par rapport à l'air (chap. 11).

Si, comme l'a fait Newton ⁽¹⁾, on élimine l'influence de l'air en utilisant un long tube de verre dans lequel le vide a été réalisé (au moins approximativement), on constate que des corps aussi différents qu'une bille de plomb, un fragment de papier ou une petite plume d'oiseau s'accompagnent tout au long de leur chute (fig. 1); on en déduit la **première loi de la chute libre** :

Fig. 1. — Le tube de Newton. ►

On retourne brusquement le tube bout pour bout :

— a) Dans le vide, les corps partis du haut ensemble arrivent en même temps en bas du tube ;

— b) Dès qu'on ouvre le robinet du tube, on observe que les temps de chute sont d'autant plus différents qu'on laisse rentrer plus d'air dans le tube.



⁽¹⁾ Voir les notices biographiques des savants en fin de volume.

Dans le vide, au même lieu, tous les corps ont même mouvement de chute. Soulignons ce fait, étonnant a priori : un corps lourd ne tombe pas plus vite qu'un corps léger.

Comme l'étude expérimentale de la chute libre est difficilement réalisable dans le vide, on opère dans l'air, mais de façon que la poussée d'Archimède et la résistance de l'air soient négligeables devant le poids du corps utilisé. Celui-ci est choisi de *forte densité*, de forme aérodynamique et sa chute est étudiée à *son début*, entre l'instant où il est abandonné sans vitesse initiale et un instant voisin pour lequel la vitesse acquise est encore assez faible.

2. La recherche de la trajectoire du centre de gravité; la deuxième loi de la chute libre.

Suspendons le corps à un fil; lorsque l'équilibre est réalisé, l'ensemble constitue un « fil à plomb » matérialisant la verticale du point de suspension.

Plaçons un fragment de craie au point où cette verticale perce le sol, diminuons la longueur du fil sans changer le point de suspension, puis brûlons le fil : le corps tombe et écrase la craie, preuve qu'au cours de la chute son centre de gravité n'a pas quitté la verticale (fig. 2). Nous vérifions ainsi la **deuxième loi** :

La chute libre sans vitesse initiale est un mouvement rectiligne de direction verticale.

3. La nature du mouvement; la troisième loi de la chute libre.

Les observations précédentes montrent qu'une chute libre est manifestement un mouvement *varié* dont la vitesse augmente rapidement. Un exercice nous montrera qu'un corps, abandonné sans vitesse initiale, parcourt près de 5 mètres au cours de la première seconde de chute; par suite, si l'on n'étudie la chute que dans ses deux premiers mètres, on est amené à mesurer des intervalles de temps *inférieurs à une seconde*, ce qui exige l'utilisation d'un chronomètre perfectionné commandé électriquement, ou l'emploi de méthodes d'enregistrement.

a. — Une expérience de cours donnant directement la loi de la variation de l'abscisse en fonction du temps.

On mesure les temps de chute $t_1, t_2, t_3, \dots$ correspondant à des hauteurs de chute données : $z_1, z_2, z_3, \dots$. Le dispositif expérimental à double circuit électrique (fig. 3) permet de faire coïncider le départ et l'arrivée de la bille avec la mise en marche et l'arrêt du chronomètre; on élimine ainsi l'erreur (de l'ordre du 1/10 de seconde) qu'entraînerait inévitablement la commande manuelle du chronomètre.

Si l'on évalue les quotients $z_1/t_1^2, z_2/t_2^2, z_3/t_3^2, \dots$ et leurs domaines d'incertitude, compte tenu d'une incertitude absolue de l'ordre de quelques millisecondes sur les temps de chute et d'un

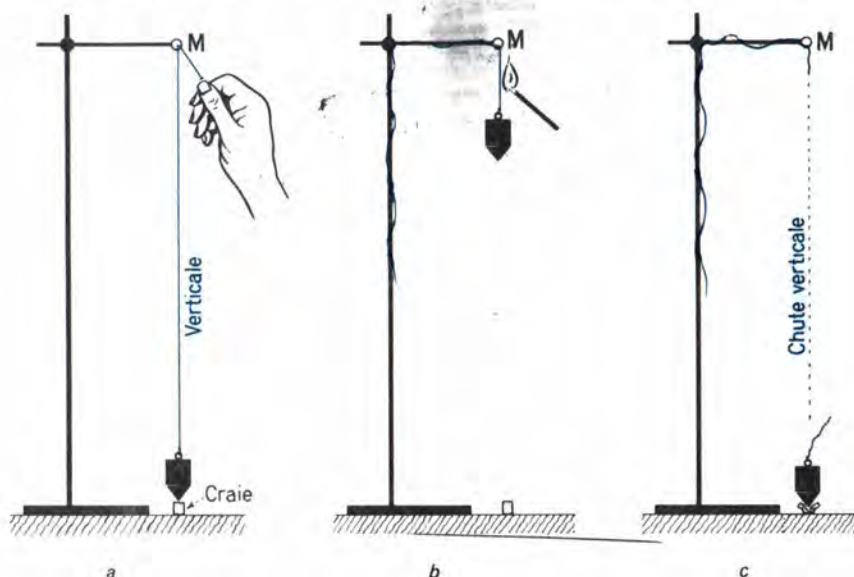


Fig. 2.

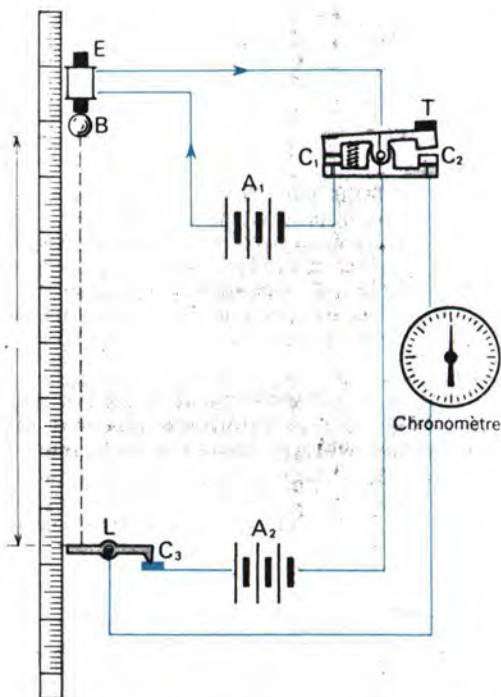


Fig. 3. — L'étude expérimentale directe de la chute libre.

Une bille en acier doux est immobilisée en B par l'attraction d'un électro-aimant E.

En appuyant sur le bouton T, on ouvre en C_1 le circuit de l'électro-aimant et l'on ferme en C_2 celui du chronomètre : la bille est libérée et, simultanément ⁽¹⁾, le chronomètre se met en marche. Le choc de la bille sur le levier L arrête le chronomètre par ouverture du circuit en C_3 .

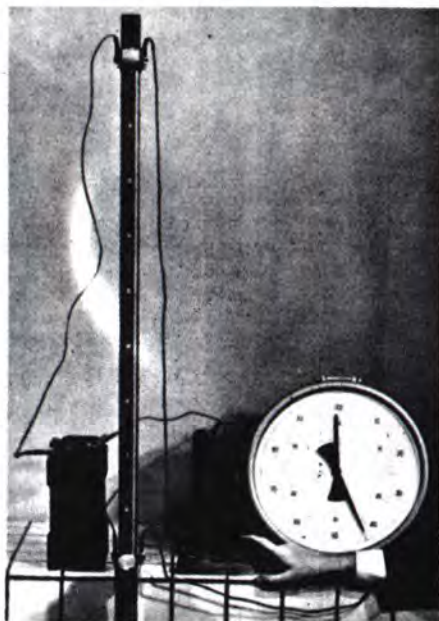
On lit la hauteur de chute z sur une règle verticale graduée en millimètres et le temps de chute t sur le cadran du chronomètre gradué en millisecondes.

millimètre sur les hauteurs de chute, on trouve que ces domaines présentent une bande commune, preuve que les quotients sont égaux aux erreurs de mesure près.

Ainsi, l'expérience montre que dans une chute libre sans vitesse initiale, les espaces parcourus à partir du point de départ sont proportionnels aux carrés des temps mis pour les parcourir :

$$\frac{z}{t^2} = C^{te} \quad (1)$$

⁽¹⁾ En fait, un petit intervalle de temps sépare l'ouverture de C_1 et la fermeture de C_2 ; on peut le réduire en utilisant un dispositif plus perfectionné que le simple basculeur C_1C_2 représenté sur la figure.



La bille vient de tomber.

Pour $z = 0,90$ m, le chronomètre indique : $t \approx 0,430$ s.

On en déduit :

1° La troisième loi de la chute libre : Le mouvement de chute libre est uniformément accéléré;

2° Une valeur approchée du module de l'accélération $\vec{g}$ de ce mouvement :

L'origine des abscisses étant le point de départ et l'origine des dates l'instant du départ, l'équation horaire se réduit en effet à :

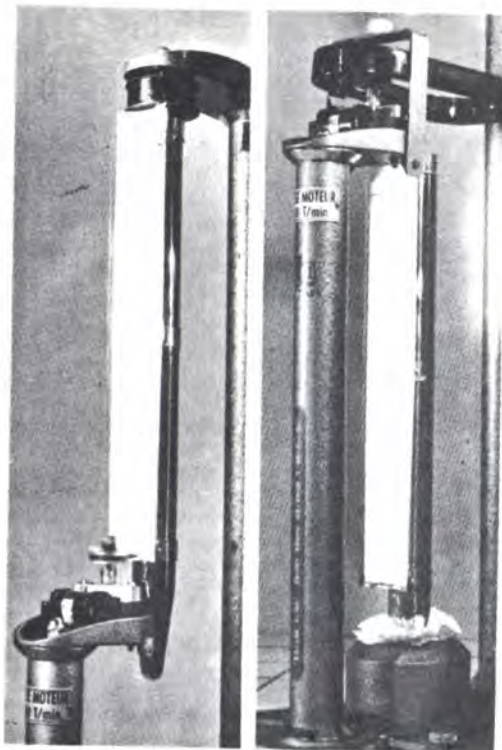
$$z = 1/2 g t^2,$$

de sorte que la constante de la relation (1) représente la moitié du module g de l'accélération.

On trouve ainsi que l'accélération $\vec{g}$, dite **accélération de la pesanteur**, a partout en France une valeur un peu inférieure à 10 m/s^2 ; la chute libre est donc un mouvement dont la vitesse s'accroît très rapidement.

b. — L'étude de la chute libre par des méthodes d'enregistrement.

Pour montrer que la chute libre est un mouvement d'accélération constante $\vec{g}$, on peut aussi



(a)

(b)

Appareil à jet d'encre.

Un cylindre, porteur d'une feuille de papier blanc, tombe en *chute libre* devant un encreur rotatif (visible au bas de la photo a) tournant à vitesse constante et émettant un fin jet d'encre.

— En a, le cylindre vu en position haute *avant* la chute ;

— En b, *après* la chute, la feuille porte les traces du jet d'encre. La mesure des distances séparant ces traces le long d'une même verticale montre qu'elles sont en *progression arithmétique*.

vérifier que les espaces parcourus pendant des intervalles de temps successifs de *même valeur* Δt forment une progression arithmétique de raison $r = g \Delta t^2$ (p. 19).

Divers dispositifs ont été conçus à cette fin, qui utilisent par exemple la chute d'une bille devant un appareil chronophotographique⁽¹⁾ (fig. 5 et exercice résolu n° 3) ou la chute d'une plaque sur laquelle s'inscrivent les oscillations d'une lame vibrante (fig. 7 et exercice n° 2) ou, mieux encore, les traces d'un jet d'encre lancé par un encreur rotatif (photo ci-contre).

Des expériences précises concernant la chute libre ont été réalisées au *Bureau International des Poids et Mesures* au moyen d'un dispositif de chronophotographie très perfectionné :

Une règle divisée, en platine iridié, étalonnée au préalable par comparaison au mètre étalon, est abandonnée *dans le vide* en face d'un repère fixe ; l'ensemble est éclairé par une suite rapide d'éclairs très brefs et très régulièrement espacés, permettant d'obtenir une centaine de photographies par seconde sur un film à grande vitesse de déroulement. En comparant sur les photographies successives les positions du repère par rapport à la graduation de la règle, on peut mesurer de façon très précise les espaces parcourus en des temps connus (évalués à partir de l'intervalle séparant deux éclairs) et par suite déterminer g à moins d'un millionième près.

Nous verrons que **l'accélération de la pesanteur varie avec la latitude et l'altitude du lieu** (p. 34).

On appelle *accélération normale de la pesanteur*, le module g_0 du vecteur accélération $\vec{g}$ à la latitude 45° et à l'altitude zéro :

$$g_0 = 9,80665 \text{ m/s}^2$$

En France, au niveau de la mer, ce module est voisin de :

$g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$

⁽¹⁾ C'est-à-dire permettant d'enregistrer une suite de photographies à des instants rapprochés et très régulièrement échelonnés.

EXERCICES

I. — EXERCICES RÉSOLUS

1. Chute libre sans vitesse initiale.

A l'instant $t = 0$ on abandonne sans vitesse initiale un corps dont le centre de gravité M est en O (fig. 4-a).

Calculons l'abscisse $\overline{OM} = z$ à l'instant $t = 1$ seconde, la vitesse de chute à cet instant, puis à l'instant où $z = 2$ m. (On néglige l'influence de l'air.)

Compte tenu du choix précédent de l'origine des abscisses et de l'origine des dates, l'équation horaire du mouvement de chute libre sans vitesse initiale s'écrit :

$$z = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

On en déduit :

— la vitesse de chute à la date t :

$$v = gt \quad (2)$$

— la relation entre la vitesse et l'abscisse :

$$v^2 = 2gz \quad (3)$$

Pour $t = 1$ seconde,

— la relation (1) donne : $z = \frac{9,81}{2} \approx 4,9$ m

— et la relation (2) : $v = 9,81$ m/s

Pour $z = 2$ m, la relation (3) donne :

$$v = \sqrt{2 \times 9,81 \times 2} \approx 6,26 \text{ m/s.}$$

2. Chute libre avec vitesse initiale verticale de bas en haut.

A l'instant $t = 0$ où son centre de gravité M est en O (fig. 4-b), un corps est lancé vers le haut avec une vitesse initiale verticale $\vec{v}_0$ dont le module est 4 m/s. Calculons l'abscisse $\overline{OM}_1$ du point culminant où la vitesse s'annule en changeant de sens, la date correspondante, puis la date du retour en O et la vitesse à cette date :

Nous avons affaire à un mouvement uniformément varié, d'accélération $\vec{g}$, comprenant une première phase retardée de O à M_1 et une seconde phase accélérée lors de la descente à partir de M_1 .

Avec le choix des origines précisé ci-dessus, l'équation horaire, valable pour les deux phases, s'écrit :

$$z = 1/2 gt^2 + v_0 t \quad (1)$$

On en déduit immédiatement

— la valeur algébrique de la vitesse à la date t :

$$v = gt + v_0 \quad (2)$$

— et la relation entre la vitesse et l'abscisse :

$$v^2 - v_0^2 = 2gz \quad (3)$$

L'axe OZ étant orienté vers le bas, la valeur algébrique de la vitesse initiale est négative et celle de l'accélération est positive :

$$v_0 = -4 \text{ m/s}; \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

L'abscisse de M_1 est donnée par (3) où l'on fait $v = 0$:



Fig. 4.

$$0 - v_0^2 = 2gz_1; \quad z_1 = -\frac{v_0^2}{2g} \approx -\frac{16}{19,6} \approx -0,82 \text{ m}$$

En faisant $v = 0$ dans la relation (2) on obtient la date t_1 correspondante :

$$0 = gt_1 + v_0; \quad t_1 = \frac{-v_0}{g} = \frac{4}{9,81} \approx 0,41 \text{ s}$$

Les dates des passages en O sont données par (1) pour $z = 0$:

$$0 = 1/2 gt^2 + v_0 t = (1/2 gt + v_0)t$$

$$\begin{cases} t' = 0 \\ t'' = -\frac{2v_0}{g} \approx 0,82 \text{ s} \end{cases}$$

On voit que $t'' = 2t_1$, c'est-à-dire que la phase retardée (de O à M_1) et la phase accélérée (de M_1 à O) ont même durée.

Quant à la vitesse au passage par O , on l'obtient en faisant $z = 0$ dans (3) :

$$v^2 = v_0^2; \quad v = \pm v_0 = \pm 4 \text{ m/s.}$$

La valeur négative correspond à $t = t' = 0$, la positive à $t = t''$; d'ailleurs, pour toute position comprise entre O et M_1 on trouverait ainsi deux vitesses opposées correspondant, l'une à l'aller, l'autre au retour : c'est dire qu'il y a symétrie dans le temps pour les 2 phases OM_1 et M_1O du mouvement.

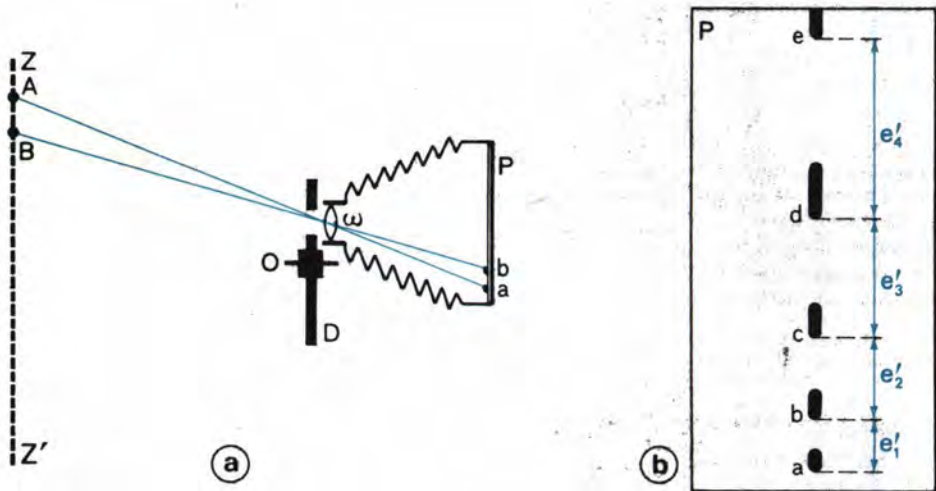


Fig. 5. — La chronophotographie d'une chute libre.

a. Une bille bien éclairée, tombant le long de la verticale ZZ' , est photographiée à de courts intervalles de temps successifs de même valeur θ . A cette fin, l'objectif de l'appareil photographique est placé derrière un obturateur rotatif, constitué par un disque D percé de trous régulièrement espacés et tournant d'un mouvement uniforme autour de son axe O .

b. Sur la plaque sensible P , les images obtenues sont des taches de plus en plus longues, à cause de l'accroissement rapide de la vitesse de chute de la bille; les segments $e'_1, e'_2, \dots$ sont proportionnels aux espaces $AB, BC, \dots$ parcourus par la bille pendant les intervalles de temps successifs θ :

3. La détermination de g par chronophotographie.

Dans l'étude chronophotographique de la chute d'une bille (fig. 5), la mesure des espaces e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 enregistrés sur la plaque donne :

$$e'_2 - e'_1 \approx e'_3 - e'_2 \approx e'_4 - e'_3 = 3,84 \pm 0,01 \text{ mm.}$$

Sachant que le grandissement linéaire de l'objectif photographique est $1/10$ et que l'obturateur espace les photographies successives de la bille de

$$\theta = 1/16 \pm 0,0001 \text{ seconde,}$$

calculons le module g de l'accélération de la pesanteur :

Une homothétie de centre ω et de rapport 10 montre que les espaces $AB, BC, \dots$ parcourus par la bille pendant des intervalles de temps successifs de valeur θ forment une progression arithmétique de raison :

$$r = 3,84 \pm 0,01 \text{ cm.}$$

$$\text{Or : } r = g \theta^2; \text{ par suite : } g = r/\theta^2$$

$$g \approx \frac{3,84}{(1/16)^2} = 3,84 \times 256 = 983 \text{ cm/s}^2,$$

$$\text{soit : } g = 9,83 \text{ m/s}^2.$$

La précision de cette détermination s'exprime par :

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta r}{r} + 2 \frac{\Delta \theta}{\theta}$$

$$\text{Or : } \Delta r = 0,01 \text{ cm; } \Delta \theta = 0,0001 \text{ s}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{0,01}{3,84} + \frac{2 \times 0,0001}{1/16} \approx 0,006 \text{ (six pour mille)}$$

Nous en déduisons :

— L'incertitude absolue sur g :

$$\Delta g \approx g \times 0,006 \approx 0,06 \text{ m/s}^2.$$

— La présentation du résultat de la mesure de g :

$$g = 9,83 \pm 0,06 \text{ m/s}^2.$$

II. — EXERCICES PROPOSÉS

1. Dans une expérience de chute réalisée avec la machine de Morin (fig. 6) on trouve, pour des intervalles de temps θ représentés par les longueurs :

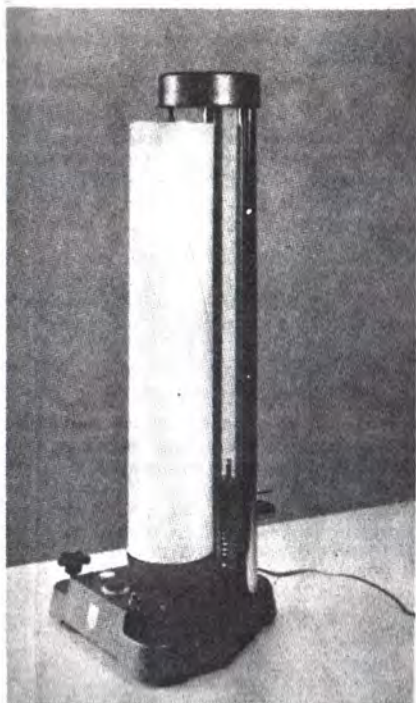
$$AA' = BB' = CC' = DD' = 2 \text{ cm,}$$

des espaces parcourus e_1, e_2, e_3, e_4 , croissant sensiblement en progression arithmétique de raison :

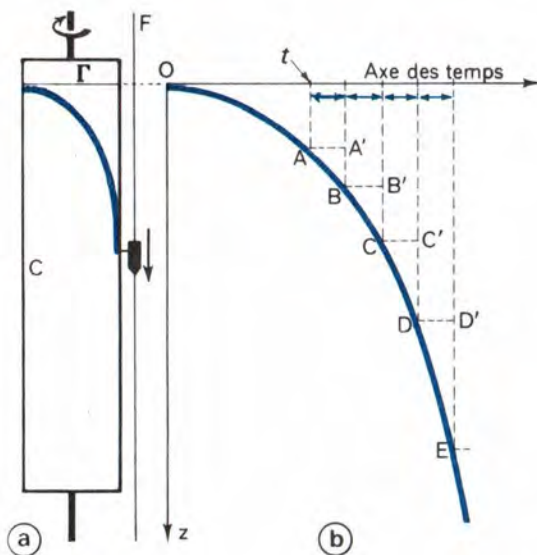
$$r = 7,0 \pm 0,5 \text{ mm.}$$

Sachant que le cylindre enregistreur a un diamètre $D = 12 \text{ cm}$ et fait uniformément 2 tours par seconde, déterminer le module g de l'accélération de la pesanteur et indiquer la précision de cette détermination (en négligeant l'erreur sur θ).

Quelle est la nature de la courbe OABCD ? Justifier la réponse.



▲ La machine de Morin.
(Document Eurosap-Deyrolle.)



▲ Fig. 6. — Le principe de la machine de Morin.
a) Une feuille de papier est fixée sur un cylindre enregistreur C, qu'un moteur fait tourner d'un mouvement *uniforme* autour de son axe vertical. Un corps dense P, de forme cylindroconique, inscrit sa chute grâce à un crayon appuyant légèrement sur le cylindre; il est maintenu sur sa trajectoire verticale par des fils F qui lui servent de guides.
b) Sur le papier déroulé, la circonférence Γ donne l'axe des temps Ot puisque, la rotation du cylindre étant *uniforme*, des longueurs égales y représentent des intervalles de temps égaux. Les segments $A'B$, $B'C$, $C'D$, $D'E$ représentent les espaces e_1 , e_2 , e_3 , e_4 parcourus par le corps P au cours d'intervalles de temps successifs de même valeur θ .

(a) (b)

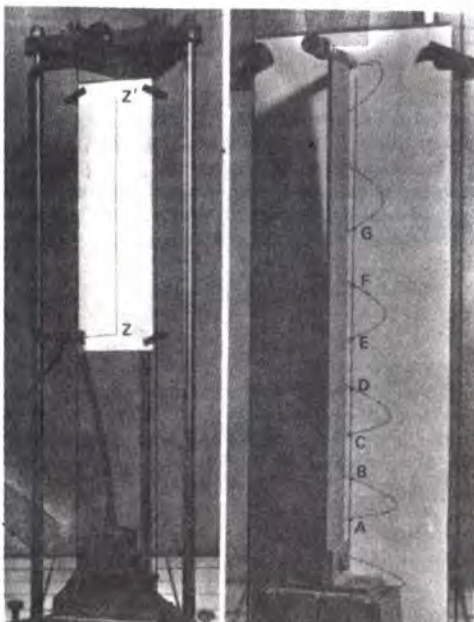
Fig. 7. — Le principe du dispositif à lame vibrante. ▶

a) Une lourde plaque P, guidée par des glissières, tombe devant une lame vibrante L munie d'un style inscripteur s. Dans une première chute, la lame ne vibrant pas, le style inscrit l'axe vertical ZZ' ; dans une seconde chute, la lame vibre et le style inscrit la courbe sinusoïdale de la figure b.

b) Les segments AB, BC, CD, DE représentent les espaces e_1 , e_2 , e_3 , e_4 parcourus par la plaque au cours d'intervalles de temps successifs dont la valeur est la durée (*constante*) d'une demi-oscillation de la lame L.

2. Dans une expérience de chute utilisant un **appareil à lame vibrante** (fig. 7) on trouve que les segments AB, BC, CD,... sont sensiblement en progression arithmétique de raison $r \approx 2,45$ cm; quel est l'intervalle de temps constant séparant 2 passages consécutifs de la lame vibrante par sa position d'équilibre? ($g \approx 9,8$ m/s²).

Rép. $\theta \approx 0,05$ s.



3. 1° Un diapason inscrit ses oscillations sur une plaque enfumée mobile. On mesure les longueurs occupées sur la plaque par l'enregistrement de 5 vibrations consécutives et l'on trouve pour ces longueurs : $AB = 13$ mm, $BC = 29$ mm, $CD = 45$ mm, $DE = 61$ mm, $EF = 77$ mm. Montrer que ces mesures vérifient que le mouvement de la plaque est uniformément accéléré.

2° On inscrit en même temps sur la plaque des signaux donnés par un chronomètre et séparés par un intervalle de $1/5$ de seconde. Le premier de ces signaux s'inscrit en un point M situé entre A et B tel que $AM = 4,5$ mm; le suivant coïncide avec le point F. Calculer le nombre d'oscillations par seconde du diapason.

3° Calculer l'accélération du mouvement de la plaque et sa vitesse au moment de l'inscription du point A. (Bacc.)

4. Un corps, en chute libre le long d'un axe vertical OZ (orienté vers le bas), a une vitesse $v = 44,6$ m/s à l'abscisse $z = 100$ m; déterminer la vitesse initiale puis la date correspondant à $z = 100$ m sachant que O est la position du mobile à l'instant initial

$t = 0$. Envisager les cas d'une vitesse initiale vers le haut et vers le bas.

Rép. : $v_0 = \pm 5,4$ m/s; $t = 4$ s (si $v_0 > 0$) ou $5,1$ s (si $v_0 < 0$).

5. Un corps abandonné sans vitesse initiale d'un point situé à la distance verticale h du sol, arrive au sol avec une vitesse $v = 39,2$ m/s; en supposant la chute libre, calculer la hauteur h et la durée de la chute ($g \approx 9,8$ m/s²).

6. Une balle est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de 20 m/s; deux secondes plus tard une autre balle est lancée dans des conditions identiques; quand et où aura lieu la rencontre? (On suppose les chutes libres; $g \approx 10$ m/s²).

Rép. : 3 secondes après le départ de la 1^{re}, à 15 m du point de lancement vers le haut.

7. Une pierre est abandonnée sans vitesse initiale à l'orifice d'un puits; l'observateur entend le bruit du choc de la pierre sur l'eau 4 secondes après l'abandon; à quelle profondeur l'eau est-elle située? (Le bruit est une perturbation de l'air qui chemine à la vitesse constante de 340 m/s; on suppose la chute libre; $g \approx 10$ m/s²).

LES BASES FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE

A. LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

1. L'énoncé du principe ; sa signification.

a. — Nous ne considérons, provisoirement, que des mobiles de dimensions assez petites pour être assimilés à des **points matériels**. Une bille de très faible rayon peut être considérée, en première approximation, comme une représentation concrète d'un point matériel.

b. — L'étude expérimentale de la chute libre d'une petite bille montre que, soumise en un

lieu donné à la seule action de son poids $\vec{P}$, force pratiquement *constante* en direction, sens et grandeur, la bille prend un mouvement dont l'accélération est un vecteur $\vec{g}$

— de même direction et de même sens que le poids $\vec{P}$;

— de module g pratiquement *constant*.

Il est possible de mesurer avec précision, en divers lieux :

— d'une part, le poids $\vec{P}$ de la même bille;

— d'autre part, l'accélération $\vec{g}$ de son mouvement de chute libre; on constate que ces deux grandeurs vectorielles varient légèrement d'un lieu à un autre mais qu'elles ont partout même direction et même sens et que le rapport $\frac{\vec{P}}{\vec{g}}$ de leurs modules conserve une valeur constante, indépendante du lieu.

Nous résumerons ces faits expérimentaux en disant que le poids $\vec{P}$ de la bille et l'accélération $\vec{g}$ que cette force communique à la bille sont des vecteurs proportionnels :

$$\frac{\vec{P}}{\vec{g}} = \text{Constante}$$

c. — Le principe fondamental de la Dynamique postule que la relation précédente, fournie par l'étude expérimentale de la chute libre d'un point matériel, ne fait qu'exprimer, dans un cas particulier, une propriété tout à fait générale. Nous l'énoncerons sous la forme suivante :

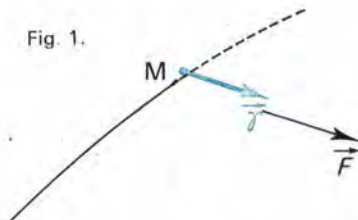
Si, à un instant quelconque, un point matériel est soumis à une force quelconque $\vec{F}$, il est animé d'un mouvement dont l'accélération à cet instant est un vecteur $\vec{\gamma}$ (fig. 1):

— de même direction et de même sens que le vecteur force $\vec{F}$;

— de module γ proportionnel à l'intensité F de la force. Par exemple, si l'intensité de la force prend, à divers instants successifs, les valeurs $F_1, F_2, F_3, \dots$, le module de l'accélération prend, aux mêmes instants, les valeurs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$, telles que :

$$\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \frac{F_3}{\gamma_3} = \dots = \text{Constante}.$$

Fig. 1.



Cet énoncé se résume par la relation vectorielle :

$$\vec{F} = \text{Constante}$$

Comme tous les principes généraux de la Physique, le principe fondamental de la Dynamique trouve sa justification dans l'accord entre les conséquences qui s'en déduisent et les faits d'observation et d'expérience. Par exemple, dans les centres de recherches nucléaires, lorsqu'on peut matérialiser les trajectoires de particules électrisées, on constate qu'elles se confondent avec les trajectoires que l'on calcule à partir du principe fondamental de la Dynamique (1).

d. — Il importe de bien comprendre que ce principe exprime une relation de cause à effet entre la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un point matériel et la variation au cours du temps de la vitesse $\vec{v}$ de ce point matériel.

En effet, entre deux instants t et $t + \Delta t$ séparés par un intervalle de temps Δt très petit mais cependant mesurable, la vitesse du point matériel varie de $\vec{v}$ à $\vec{v} + \Delta \vec{v}$ et l'on a :

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \approx \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\gamma}$$

La relation $\vec{F} = C^{te}$, ou $\vec{F} = \vec{\gamma} \cdot C^{te}$, peut alors s'écrire :

$$\vec{F} \approx \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \cdot C^{te}$$

ou

$$\vec{F} \cdot \Delta t \approx \Delta \vec{v} \cdot C^{te}$$

Cela signifie qu'au cours de l'intervalle de temps Δt , la force $\vec{F}$ inflige au point matériel une variation de vitesse $\Delta \vec{v}$. Cette variation peut se borner à une variation du module du vecteur-vitesse, comme dans le cas d'une chute libre sans vitesse initiale, ou bien à un changement de la direction de ce vecteur $\vec{v}$, comme nous le

verrons dans le cas du mouvement circulaire uniforme. Plus généralement, le module et la direction du vecteur-vitesse varient simultanément : le mouvement de chute d'une bille qu'on lance dans une direction non verticale nous en fournira un exemple concret (p. 43, § 4).

e. — Le cas d'un point matériel soumis à plusieurs forces.

Il est exceptionnel qu'un corps en mouvement soit soumis à une seule force. La chute libre, qui suppose l'intervention exclusive du poids, n'est observable en toute rigueur que dans le vide. Une goutte de pluie, par exemple, est à la fois soumise à son poids et à la résistance de l'air et nous verrons que le mouvement qu'elle prend sous l'action simultanée de ces forces est très différent d'une chute libre.

Lorsque le mobile est — comme cette goutte d'eau — assimilable à un point matériel, les forces qu'il subit sont nécessairement concourantes ; par suite, elles admettent une **résultante**,

représentée par un vecteur $\vec{F}$ égal à la somme géométrique des vecteurs qui représentent ces forces :

C'est alors à cette résultante $\vec{F}$ que l'accélération $\vec{\gamma}$ du mouvement est proportionnelle.

2. Le principe de l'inertie.

Supposons que l'ensemble des forces qui s'exercent sur un point matériel ait une **résultante nulle** ($\vec{F} = 0$) ; le point matériel n'a pas d'accélération ($\vec{\gamma} = 0$), sa vitesse $\vec{v}$ ne change donc ni en grandeur, ni en direction :

— s'il est initialement au repos, il reste au repos ;

— s'il a une vitesse $\vec{v}$ à l'instant où la résultante $\vec{F}$ devient nulle, il conserve cette vitesse tant que $\vec{F}$ reste nulle. En d'autres termes :

Un point matériel soumis à un ensemble de forces dont la résultante est nulle est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Cet énoncé est connu sous le nom de *principe de l'inertie* ; ce n'est en fait qu'une conséquence du principe fondamental de la Dynamique.

Pour illustrer ce principe, imaginons que l'on puisse réaliser une surface parfaitement plane et rigoureusement horizontale. Placée sur un tel plan, une petite bille subirait de la part de ce

(1) A condition que leurs vitesses restent faibles par rapport à celle de la lumière dans le vide ($c \approx 300\,000$ km/s).

plan une réaction R qui, en l'absence de *tout* frottement, serait opposée à son poids $\vec{P}$, de sorte que la résultante des forces s'exerçant sur la bille serait *nulle*.

Si, par un léger choc, on donnait une vitesse initiale à la bille, elle la conserverait et la bille serait animée d'un mouvement rectiligne et uniforme.

3. Le système de référence.

Nous avons vu que les caractéristiques d'un mouvement, en particulier son accélération, ne sont définies que par rapport à un système de référence donné.

En toute rigueur, le principe fondamental de la Dynamique s'applique à des mouvements que l'on rapporte aux *axes de Copernic*; on désigne ainsi des

axes de référence joignant le centre de gravité du système solaire à trois étoiles fixes. On montre d'ailleurs qu'il reste valable lorsqu'on rapporte les mouvements à *tout autre système d'axes animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport aux axes de Copernic*.

Les repères terrestres n'étant pas en translation uniforme par rapport au repère de Copernic — puisque la Terre gravite autour du Soleil en tournant sur elle-même — l'application du principe fondamental en Mécanique terrestre ne peut être qu'une approximation; en fait, l'erreur systématique est négligeable devant l'incertitude des mesures et *cette approximation est tout à fait légitime*, sauf dans quelques rares expériences qui mettent justement en évidence le mouvement de la Terre par rapport aux axes de Copernic.

Dans ce cours, quand le système de référence auquel se rapporte un mouvement ne sera pas précisé, il sera sous-entendu que le mouvement est considéré par rapport à un *repère terrestre* (axe ou système d'axes liés à la Terre).

B. LA NOTION DE MASSE LA RELATION ENTRE LE POIDS ET LA MASSE

4. La définition dynamique de la masse d'un point matériel; la formule fondamentale de la Dynamique.

a. — Considérons un mobile assimilable à un *point matériel*, par exemple une sphère métallique de très faible rayon. D'après le principe fondamental de la Dynamique, si ce mobile est, à un instant quelconque, soumis à des forces

dont la résultante est une force $\vec{F}$, l'accélération $\vec{\gamma}$ de son mouvement à cet instant est telle que le rapport $\vec{F}/\vec{\gamma}$ conserve une *valeur positive constante* quelle que soit $\vec{F}$, que cette résultante soit constante ou qu'elle varie à chaque instant.

Cette constante positive $\vec{F}/\vec{\gamma}$ est une grandeur *scalaire* qui ne dépend *que* du point matériel considéré et le *caractérise*; on l'appelle sa *masse* et on la désigne par la lettre m :

Cette constante positive $\vec{F}/\vec{\gamma}$ est une grandeur scalaire qui ne dépend que du point matériel considéré et le caractérise; on l'appelle sa *masse* et on la désigne par la lettre m :

$$\vec{F}/\vec{\gamma} = m, \text{ ou : } \boxed{\vec{F} = m \vec{\gamma}}$$

b. — La relation $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ contient à la fois l'énoncé du principe fondamental de la Dynamique et la définition dynamique de la masse d'un point matériel; on l'appelle *la relation fondamentale de la Dynamique du point matériel*.

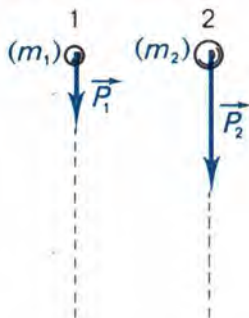


Fig. 2.

5. La masse « inerte » et la masse « pesante ».

a. — Soit par exemple deux petites billes 1 et 2 dont les poids $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ (fig. 2), comparés en un *même* lieu, ont des modules P_1 et P_2 tels que :

$$P_1 = 1/2 P_2$$

Supposons que ces billes soient abandonnées en chute *libre* : elles prennent la *même* accélération $\vec{g}$, caractéristique du lieu.

Si m_1 et m_2 désignent les masses des deux billes, la relation fondamentale de la Dynamique, appliquée aux mouvements de chute de ces deux points matériels, s'écrit :

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{g} \quad \vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$$

Nous en tirons : $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\vec{P}_1}{\vec{P}_2} = \frac{P_1}{P_2} = 1/2$ (1)

Ainsi, **les masses des billes sont proportionnelles à leurs poids**. Nous trouvons là l'explication de la troisième loi de la chute libre : si l'accélération de la pesanteur — donc la variation de la vitesse de chute par unité de temps — est la *même* pour les deux billes, bien que la

force $\vec{P}_2$ qui entraîne l'une soit deux fois plus intense que la force $\vec{P}_1$ qui entraîne l'autre, c'est parce que la masse de la première est deux fois plus grande que celle de l'autre.

Ce résultat, établi dans le cas particulier de la chute libre, est général : *la force qui communique à un point matériel une accélération donnée est d'autant plus intense que la masse du point matériel est plus grande.*

On en conclut que la masse caractérise **l'inertie** du point matériel, c'est-à-dire la difficulté plus ou moins grande de faire varier sa vitesse; de là vient le nom de **masse inerte** donné à la constante scalaire m , définie par la relation fondamentale de la Dynamique :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

b. — La notion de masse a déjà été introduite en Seconde sans faire intervenir le mouvement d'un point matériel. Rappelons brièvement cette définition *statique* de la masse :

Si l'on mesure les poids des billes **1** et **2** en un autre lieu, on trouve que les modules P'_1 et P'_2 diffèrent légèrement de P_1 et P_2 mais que leur rapport n'a pas varié :

$$\frac{P'_1}{P'_2} = \frac{P_1}{P_2} = 1/2$$

Cette valeur constante du rapport des deux poids, *indépendante du lieu*, s'explique de la manière suivante :

Ce que nous appelons les poids $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ des deux billes sont des **forces de pesanteur**; en première approximation ⁽¹⁾, nous pouvons les considérer comme les forces attractives que la Terre exerce sur la *matière* des billes et il est naturel de penser que si P_2 vaut deux fois P_1 , c'est parce que la bille **2** contient une quantité de matière deux fois plus grande que la bille **1**.

Ces forces attractives varient évidemment avec les positions que les billes occupent par rapport à la Terre mais, du fait que d'un lieu à un autre les quantités de matière contenues dans les billes ne changent pas, la force de pesanteur qui s'exerce

sur **2** est, en tout lieu, deux fois plus intense que celle qui s'exerce sur **1**.

Pour exprimer que les billes contiennent des quantités de matière déterminées et constantes, on leur attribue respectivement des **masses** M_1 et M_2 dont le rapport est, *par définition*, égal au rapport constant de leurs poids :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{P_1}{P_2} = 1/2$$
 (2)

Ainsi définie, la masse M d'un point matériel apparaît comme une constante scalaire liée à ce point matériel et *caractérisant la quantité de matière qu'il contient*. Pour la distinguer de la *masse inerte* définie ci-dessus, on l'appelle la **masse pesante**.

Rapprochons la relation (1) de la relation (2); nous obtenons :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

La masse pesante est proportionnelle à la masse inerte.

c. — En résumé, à tout point matériel sont liées deux constantes scalaires : la *masse inerte* et la *masse pesante* de ce point matériel; comme elles sont *proportionnelles*, un choix convenable des unités de mesure permet de les mesurer par un *même nombre m*. Cela revient à les considérer comme *deux aspects d'une même grandeur* : la *masse du point matériel*, caractérisant à la fois l'inertie et la *quantité de matière* de ce point matériel.

6. Les unités SI de masse et de force.

a. — Du fait que les masses de deux points matériels sont proportionnelles à leurs poids (relations **1** et **2**), un dynamomètre ou une balance, qui permettent de comparer les poids, permettent aussi de comparer les masses et, par suite, de les *mesurer* si l'on a défini une unité de masse.

L'unité SI de masse est le **kilogramme** (kg), *masse du prototype international* (fig. 2 du chap. 12), en platine iridié, déposé au Bureau International des Poids et Mesures (à Sèvres, dans la banlieue de Paris).

b. — L'unité SI de force est le **newton** (N); elle dérive des unités SI de masse et d'accélération (m/s^2) par la relation $\vec{F} = m\vec{\gamma}$; en effet, si :

$$m = 1 \text{ kg et } \gamma = 1 \text{ m/s}^2, F = 1 \times 1 = 1 \text{ N}$$

Ainsi, le newton est l'intensité d'une force qui communique à un mobile de masse 1 kg une accélération de 1 m/s^2 .

⁽¹⁾ Voir la lecture en fin de chapitre.

En France, on utilise fréquemment une autre unité de force : le **kilogramme-force**, égal à l'intensité du poids du kilogramme étalon à Paris.

Si un mobile de masse $m = 1 \text{ kg}$ est abandonné en chute libre à Paris, son poids lui communique une accélération de module $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ et l'on a :

$$P = mg, \text{ soit : } P \approx 1 \times 9,81 = 9,81 \text{ N}$$

Comme P vaut alors 1 kgf, par définition, nous constatons que :

$$1 \text{ kilogramme-force} \approx 9,81 \text{ newtons}$$

7. Le champ de pesanteur.

a. — Tout point matériel, quelle que soit sa position dans l'espace entourant la Terre, est soumis à une force de pesanteur $\vec{P}$ que l'on appelle le *poids* du point matériel.

Cet espace est donc un *champ de forces de pesanteur* pour les points matériels, comme l'espace qui entoure un corps électrisé est un champ de forces électrostatiques pour les charges électriques (cours de Première); on l'appelle plus brièvement le **champ de pesanteur**.

En un lieu quelconque de ce champ de pesanteur, des points matériels de masses pesantes $m_1, m_2, m_3, \dots$, sont soumis à des poids $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots$, liés à ces masses par la relation de proportionnalité (§ précédent) :

$$\frac{\vec{P}_1}{m_1} = \frac{\vec{P}_2}{m_2} = \frac{\vec{P}_3}{m_3} = \dots = \text{Cte} \quad (3)$$

Cette constante, quotient d'une grandeur vectorielle par une grandeur scalaire, est une grandeur vectorielle $\vec{g}$ qui ne dépend que du lieu; on l'appelle le **vecteur champ de pesanteur** au lieu considéré. Comme les poids $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$, ce vecteur est dirigé de haut en bas suivant la verticale du lieu et son module g mesure l'intensité de la pesanteur en ce lieu.

Ainsi, d'après (3), le poids $\vec{P}$ d'un point matériel est lié à sa masse pesante m par la relation :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

— le facteur scalaire m ne dépend que de la quantité de matière contenue dans le point matériel;

— le facteur vectoriel $\vec{g}$ ne dépend que du lieu; il y caractérise le phénomène de pesanteur en direction, sens et intensité. Tout point matériel de masse m , situé en ce lieu, est soumis à un

poids $\vec{P}$ de mêmes direction et sens que $\vec{g}$ et de module :

$$P = mg \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ en kilogramme;} \\ g \text{ en newton par kilogramme;} \\ P \text{ en newton } (^1). \end{array} \right.$$

Remarque importante.

Si le point matériel est abandonné en chute libre au lieu considéré, son poids $\vec{P}$ lui communique une accélération $\vec{g}$ donnée par la relation fondamentale de la Dynamique : $\vec{P} = m\vec{g}$.

Dans cette relation, m désigne la masse inerte du point matériel, mais comme les conventions relatives aux unités de mesure ont été faites de façon que la masse inerte et la masse pesante soient mesurées par le même nombre, l'accélération du mouvement de chute libre en un lieu est représentée par un vecteur de mêmes direction, sens et module que le vecteur champ de pesanteur en ce lieu.

Ainsi, le vecteur $\vec{g}$, caractéristique du lieu, représente deux grandeurs d'espèces différentes : une accélération (en m/s^2) et un poids par unité de masse (en N/kg); ces grandeurs sont en tout lieu proportionnelles parce qu'elles y sont toutes deux liées au même phénomène de pesanteur, mais leurs valeurs numériques ne sont égales que par suite d'un choix convenable des unités de mesure.

Du fait de cette égalité, la détermination de l'accélération de la pesanteur en un lieu donne en même temps l'intensité de la pesanteur en ce lieu; par exemple, à Paris (et, pratiquement partout en France) :

$$g \text{ (accélération du mouvement de chute libre)} \approx 9,81 \text{ m/s}^2$$

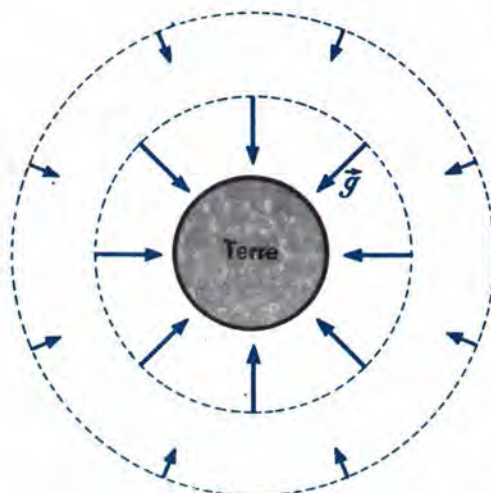
$$g \text{ (intensité de la pesanteur)} \approx 9,81 \text{ N/kg}$$

b. — Un lieu donne, une ville par exemple, est une portion de l'espace terrestre dont les dimensions sont très petites, comparées au rayon de la Terre ($R \approx 6400 \text{ km}$). Le fait expérimental que les verticales des divers points d'un tel lieu sont très sensiblement des droites parallèles indique que le champ de pesanteur peut y être considéré comme pratiquement uniforme; en

tout point de ce lieu, le vecteur $\vec{g}$ a sensiblement mêmes direction, sens et module.

Par contre, d'un lieu à un autre, la direction

(¹) La relation $P = mg$, comme la relation fondamentale $F = m\vec{a}$, n'est valable qu'avec les unités appartenant au même système d'unités. En unités SI, la masse étant mesurée en kilogramme, l'intensité d'un poids, comme celle d'une force quelconque, est nécessairement mesurée en newton; il est absolument exclu de l'exprimer en kilogramme-force!



◀ Fig. 3. — Le champ de pesanteur.

l'inverse du carré de la distance au centre de la Terre ⁽¹⁾. Par exemple, du sol de France à une altitude égale au rayon de la Terre, la valeur de g passe de 9,81 N/kg à $9,81/4 \approx 2,45$ N/kg; si un engin spatial s'élevait à l'altitude 6 400 km, le poids de chacun de ses éléments matériels serait réduit au quart de ce qu'il est au niveau du sol.

8. Les limites de la validité de la relation fondamentale de la dynamique.

La relation fondamentale $\vec{F} = m\vec{a}$, sur laquelle est fondée la *Mécanique classique* (dite « newtonienne ») et qui suppose la masse invariable, ne s'applique pas à certains mouvements tels que le mouvement de particules lancées dans le vide à des vitesses proches de celle de la lumière (300 000 km/s), ou le mouvement d'électrons se déplaçant à l'intérieur même des atomes.

Pour rendre compte des faits, il faut alors utiliser des théories plus générales, la *Mécanique relativiste* d'Einstein dans le premier cas, la *Mécanique ondulatoire* dans le second.

La suite de ce cours nous donnera l'occasion d'appliquer certaines lois de la Mécanique relativiste; nous verrons alors que l'invariabilité de la masse n'est qu'une première approximation, puisque, en toute rigueur, la masse d'un corps augmente en même temps que sa vitesse et, d'une manière générale, dépend de l'énergie qu'il possède. Les exemples que nous traiterons nous montreront d'ailleurs que, dans tous les phénomènes physiques et chimiques ordinaires, les variations de la masse sont trop faibles pour être mesurables, de sorte qu'il est parfaitement légitime de les négliger.

⁽¹⁾ Voir la lecture en fin de chapitre.

et le module de $\vec{g}$ varient avec la latitude et l'altitude (fig. 3) :

— Au niveau du sol, le module de g ne varie que faiblement; par exemple, de l'équateur aux pôles, g augmente de 9,78 N/kg à 9,83 N/kg, ce qui représente une variation relative de l'ordre de 5 millièmes ⁽¹⁾;

— Le long d'une verticale, g diminue comme

⁽¹⁾ Dans une région relativement peu étendue, l'intensité de la pesanteur présente de très petites variations relatives (de l'ordre des dix millièmes) dues à des différences de nature des couches terrestres superficielles; la mise en évidence de ces variations permet de déceler la présence, dans le sous-sol, de couches denses (minerais) ou légères (pétrole).

C. NOTIONS SUR LA MÉCANIQUE DES SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS

9. Les systèmes matériels; le poids et la masse d'un système matériel.

a. — On appelle **système matériel** tout ensemble de points matériels. Un corps quelconque, qu'il soit solide, liquide ou gazeux, que sa matière soit homogène ou hétérogène, constitue un système matériel, car on peut le considérer comme résultant de la réunion de petites portions de matière assimilables à des points matériels. A fortiori, tout ensemble de corps est un système matériel.

Un système matériel est :

— *déformable* si les distances entre les points matériels qui le composent sont variables; c'est

le cas d'un ressort, d'un fil de torsion, d'une balle élastique, ..., ou encore du système solaire, comprenant le Soleil, les planètes et leurs satellites;

— *indéformable* si, au contraire, ses éléments matériels demeurent dans des positions relatives invariables. Ce que nous appelons un *solide*, tel qu'une masse marquée, une pierre, un projectile avant son éclatement, ... est un système matériel pratiquement indéformable.

b. — Considérons un système matériel quelconque, déformable ou indéformable; chacun des points matériels qui le composent a une masse $m_1, m_2, m_3, \dots$ et un poids $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots$

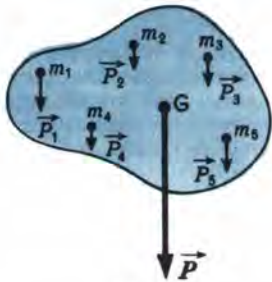


Fig. 4.

(fig. 4). L'ensemble de ces poids élémentaires constitue un système de *forces parallèles et de même sens* dont la résultante $\vec{P}$ est donnée par la somme vectorielle :

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \dots \quad (4)$$

— Cette résultante $\vec{P}$ représente le **poids du système matériel considéré**;

— Son point d'application G est le **centre de gravité du système matériel**.

c. — Si $\vec{g}$ désigne le vecteur champ de pesanteur caractéristique du lieu où est situé le système matériel, les poids élémentaires ont pour expressions :

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}; \quad \vec{P}_2 = m_2 \vec{g}; \quad \vec{P}_3 = m_3 \vec{g}; \dots$$

Portons dans (4) :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} + m_3 \vec{g} + \dots \\ &= (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) \vec{g} \\ &= m \vec{g} \end{aligned}$$

Le facteur scalaire $m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ représente la **masse du système matériel considéré**. Ainsi, la masse d'un système matériel est égale à la somme des masses des points matériels qui le composent.

10. Les forces intérieures et les forces extérieures à un système matériel.

a. — Le cas général d'un système quelconque.

Sur un système matériel s'exercent généralement un ensemble de forces que l'on peut classer en forces *intérieures* et forces *extérieures* au système, étant entendu que le système considéré a été défini au préalable de façon précise.

— Les forces *intérieures* sont celles que chaque point matériel (ou chaque partie) du système exerce sur les autres points matériels (ou les autres parties) de ce système. Conformément au

principe de l'égalité de l'action et de la réaction (Newton), les forces *intérieures* sont deux à deux opposées; par exemple, la force qu'un point matériel A du système exerce sur un autre point matériel B de ce système est *opposée* à celle que B exerce sur A.

— Les forces *extérieures* sont les forces exercées sur le système matériel par des corps ou des agents qui ne font pas partie de ce système. Précisons cette distinction à l'aide de quelques exemples simples :

Pour un corps A considéré isolément, son poids $\vec{P}$ est une force extérieure; par contre, si l'on considère le système formé par A et la Terre,

le poids $\vec{P}$, force d'attraction exercée par la Terre sur le corps A, est une force *intérieure* au système alors que toutes les autres forces s'exerçant sur A (par exemple, la poussée de l'air, la force musculaire développée par la main qui le soutient ou la traction du fil auquel il est suspendu) sont des forces *extérieures*.

Examinons maintenant le cas d'un train : selon que le système considéré est, par convention, la locomotive seule ou le train tout entier, la force que l'ensemble des wagons exerce sur la locomotive est une force extérieure ou une force intérieure.

b. — Le cas particulier d'un corps solide.

Dans la plupart de nos exercices de Dynamique, nous nous proposerons d'étudier le mouvement d'un corps *solide*, c'est-à-dire d'un corps pratiquement *indéformable*.

Pour un solide considéré isolément, les forces *intérieures* sont les forces de cohésion qui assurent l'indéformabilité du solide en maintenant tous ses points matériels dans des positions invariables les uns par rapport aux autres; elles ne jouent aucun rôle dans le mouvement du solide.

Seules, les forces extérieures déterminent le mouvement d'un solide; il faudra donc commencer par en dresser un inventaire complet. Nous en ferons généralement deux groupes :

— 1^o Les **forces appliquées**, parmi lesquelles figureront les forces exercées par les corps en contact avec le solide (poussée d'Archimède, résistance de l'air, forces de frottement, force ou couple développés par une personne ou un moteur, ...) et les *actions à distance*, telles que le poids du solide, une force électrique, une force magnétique, ...

— 2^o Les **forces de liaison**, qui limitent les possibilités de mouvement du solide. Par exemple, une boule assujettie à rouler sur un plan fixe est constamment soumise de la part du plan à une

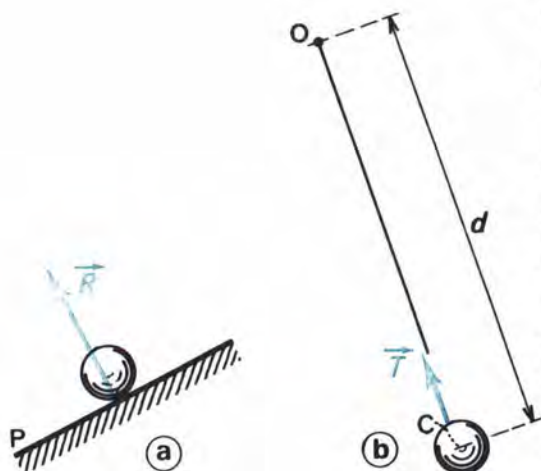


Fig. 5.

force de contact $\vec{R}$ que l'on appelle la *réaction du plan* (fig. 5-a); si la boule est liée à un point fixe O par un fil inextensible, celui-ci, tant qu'il reste tendu, exerce sur la boule une force de liaison $\vec{T}$, la *tension du fil*, qui impose au centre C de se mouvoir à distance d constante du point O (fig. 5-b).

La résolution de quelques exercices de Dynamique nous montrera que *les forces de liaison ne sont pas connues a priori*; c'est en étudiant le mouvement que l'on peut les déterminer.

11. La réduction des forces extérieures s'exerçant sur un système matériel; le théorème du centre de gravité.

a. — Le cas général.

On démontre que l'ensemble des forces extérieures qui s'exercent sur un système matériel quelconque peut être réduit à une *force unique* $\vec{F}$,

appliquée au centre de gravité du système, et à un *couple*.

Corrélativement, le mouvement d'un solide — pour lequel n'interviennent que ces seules forces extérieures — peut être décomposé en

- un déplacement du centre de gravité;
- une rotation du système autour du centre de gravité.

Ce mouvement complexe est par exemple celui d'une sphère ou d'un cylindre roulant sur un plan ou celui d'un projectile qui décrit une trajectoire en tournant sur lui-même.

Très souvent, nous nous bornerons à étudier le seul mouvement du centre de gravité et nous pourrons appliquer à ce mouvement la relation fondamentale de la Dynamique du point matériel en utilisant le *théorème du centre de gravité*, que nous admettrons sans démonstration :

Le centre de gravité G d'un système matériel quelconque a même mouvement qu'un point matériel libre dont la masse serait la masse totale du système et auquel seraient appliquées toutes les forces extérieures qui s'exercent sur ce système.

b. — Le cas particulier du mouvement de translation d'un solide.

Un solide initialement au repos, soumis à des forces extérieures admettant une *résultante* $\vec{F}$ dont la droite d'action passe par le centre de gravité, prend un mouvement de *translation* ayant les caractères suivants :

— Tous les points du solide décrivent des trajectoires qui se déduisent les unes des autres par des *translations*;

— Leurs vitesses sont à chaque instant représentées par des *vecteurs* $\vec{v}$ *équipollents*.

L'étude du mouvement du solide se confond alors avec celle du mouvement de l'un de ses points, de son centre de gravité en particulier.

Nous trouverons des exemples de translations de solides parmi les exercices traités au chapitre suivant (glissement d'un solide sur un plan incliné; va-et-vient d'un monte-charge ou d'un corps suspendu dans un ascenseur).

EXERCICES

1. Deux points matériels, de masses m_1 et $m_2 = 2m_1$, initialement au repos, sont mis en mouvement par des forces qui admettent respectivement les résultantes $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, constantes en direction, sens et intensités.

Montrer que les mouvements sont rectilignes, uniformément accélérés.

Calculer le rapport des intensités F_1 et F_2 des deux résultantes qui communiquent aux deux points matériels des accélérations $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$ dont les modules sont :

1° égaux ;

2° tels que $\gamma_1 = 4 \gamma_2$.

Calculer, dans ce second cas, les valeurs de F_1 et F_2 sachant que $m_1 = 10^{-3}$ kg et que $\gamma_1 = 10$ m/s².

2. Un satellite artificiel de masse $m = 600$ kg gravite autour de la Terre à une altitude constante $z = 300$ km.

Calculer son poids $\vec{P}$ en admettant que la Terre est une sphère de rayon $R = 6\,400$ km et que l'intensité de la pesanteur g_0 au niveau de la mer est pratiquement constante et égale à 9,8 N/kg.

3. On considère le système matériel formé par trois masses marquées $m_1 = 0,5$ kg, $m_2 = 1$ kg et $m_3 = 2$ kg, supposées rigidement liées et disposées de façon que leurs centres de gravité soient sur la même verticale (fig. 6).

1° Déterminer la position G du centre de gravité du système sur le segment G_1G_3 ;

2° Calculer le poids du système, l'intensité de la pesanteur étant $g = 9,8$ N/kg ;

3° Déterminer la nature du mouvement et l'accélération que prend le système, initialement au repos, quand on lui applique une force constante $\vec{F}$, verticale, de bas en haut, d'intensité $F = 5$ kgf.

(On néglige la poussée d'Archimède et la résistance de l'air.)

4. Un petit avion de tourisme, de masse totale $m = 1$ tonne, est animé d'un mouvement de *translation rectiligne, horizontal et uniforme*. Les actions de l'air sur les ailes et le fuselage admettent une résultante $\vec{R}$, de bas en haut, dont la droite d'action passe par le centre de gravité G de l'avion et fait un angle de 30° avec la verticale.

On demande les caractéristiques de la force motrice $\vec{F}$ développée par la rotation de l'hélice.

(On admettra que l'intensité de la pesanteur, à l'altitude de la trajectoire du centre de gravité de l'avion, garde une valeur pratiquement constante $g \approx 9,8$ N/kg).

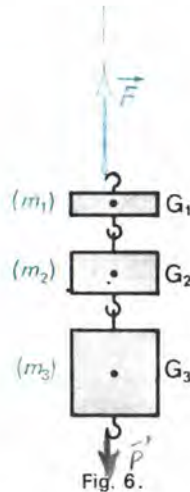


Fig. 6.

LECTURE

La gravitation universelle.

Pour expliquer le mouvement de la Lune autour de la Terre et celui des planètes autour du Soleil, Newton, partant des lois de Kepler sur le mouvement des astres et utilisant le principe de l'égalité de l'action et de la

réaction, formula, dès 1680, la loi fondamentale de la gravitation universelle. On peut énoncer cette loi sous la forme suivante :

Deux points matériels quelconques exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction opposées dont l'intensité commune est proportionnelle à leurs masses m et m' et inversement proportionnelle au carré de leur distance d (fig. 7) :

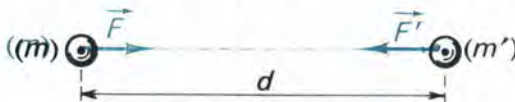


Fig. 7.

$$F = \varepsilon \frac{mm'}{d^2}$$

(1)

Le coefficient de proportionnalité ε ne dépend que des unités employées pour mesurer les masses, les longueurs et les forces; on l'appelle la *constante de la gravitation*.

A partir de cette relation, on démontre que l'action qu'une sphère homogène (ou formée de couches concentriques homogènes) exerce sur des points matériels extérieurs à cette sphère est la même que si toute la masse de la sphère était concentrée en son centre.

Ces résultats ont été vérifiés par de nombreuses expériences de laboratoire, utilisant notamment un dynamomètre spécial, extraordinairement sensible, fondé sur la torsion d'un fil long et fin. On a pu ainsi déterminer la constante de la gravitation avec une précision de l'ordre du millièème :

$$\varepsilon \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ unité S.I.}$$

Pour fixer les idées sur l'intensité des forces de gravitation, évaluons par exemple la force d'attraction mutuelle entre deux sphères homogènes de masses $m = m' = 20 \text{ kg}$ dont les centres sont à 1 m l'un de l'autre :

$$F = \varepsilon \frac{mm'}{d^2} \approx 6,67 \times 10^{-11} \frac{20 \times 20}{1} \approx 2,67 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Comme un newton vaut une centaine de grammes-force, nous constatons que la force calculée est *extrêmement faible*, de l'ordre des millionièmes de gf; c'est pourquoi, en Mécanique terrestre, on néglige les forces de gravitation entre les corps, exception faite, bien entendu, pour l'attraction que la Terre exerce sur ces corps et qui constitue le phénomène de la *pesanteur*.

En effet, la force de pesanteur (ou poids $\vec{P}$) qui s'exerce

sur un point matériel représente très sensiblement ⁽¹⁾ la résultante des attractions gravitationnelles dues à la Terre, à la Lune, aux autres planètes et au Soleil. Comme les attractions des corps extra-terrestres sont très faibles,

comparées à celles de la Terre, le poids $\vec{P}$ d'un point matériel se confond pratiquement avec l'attraction que la Terre exerce sur ce point matériel.

Si l'on admet en outre que la Terre est une sphère formée de couches concentriques homogènes, la relation (1) permet d'exprimer l'intensité P du poids d'un point matériel en fonction de sa masse m , de la masse M de la Terre et de la distance D du point au centre de la Terre :

$$P = \varepsilon \frac{mM}{D^2}$$

Rapprochons cette expression de la relation $P = mg$; nous obtenons :

$$mg = \varepsilon \frac{mM}{D^2}$$

$$g = \varepsilon \frac{M}{D^2}$$

Cette relation donne la masse de la Terre ($M \approx 6 \times 10^{24} \text{ kg}$) connaissant l'intensité g de la pesanteur en un lieu situé à la distance D du centre de la Terre. D'autre part, elle rend compte du fait que la valeur de g varie en raison inverse du carré de cette distance D au centre de la Terre.

⁽¹⁾ A l'influence près de la rotation de la Terre.

L'APPLICATION DE LA RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE A DES MOUVEMENTS RECTILIGNES

1. Le glissement d'un solide sur un plan incliné sans frottement.

a. — L'application des principes.

Considérons un solide abandonné sur un plan incliné dont les lignes de plus grande pente font l'angle α avec le plan horizontal (fig. 1).

Faisons l'inventaire des forces extérieures qui sollicitent le solide :

— 1° Au centre de gravité G s'applique le

poids $\vec{P} = m\vec{g}$ du solide;

— 2° Le plan exerce sur le solide une **réaction** $\vec{R}$, force de liaison dont la droite d'action YY' est perpendiculaire au plan parce que les frottements sont négligeables (1).

La perpendiculaire YY' et le vecteur $\vec{P}$ déterminent un plan, choisi comme plan de figure : il coupe le plan incliné suivant une ligne de plus grande pente MM' . Projétons $\vec{P}$ orthogonalement sur GY et sur GX , parallèle à MM' : les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ représentent un système de forces équivalent au poids $\vec{P}$.

La composante $\vec{F}'$ agissant seule sur le plan, la réaction $\vec{R}$ du plan est opposée à $\vec{F}'$, conformément au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

La résultante des forces extérieures s'exerçant sur le solide se confond donc avec la composante $\vec{F}$, de module constant :

(1) Le plan est par exemple en téflon ou en fornicia et la face du solide en contact avec ce plan est plane et polie. S'il y avait

frottements, la réaction $\vec{R}$ serait inclinée en sens contraire du mouvement.

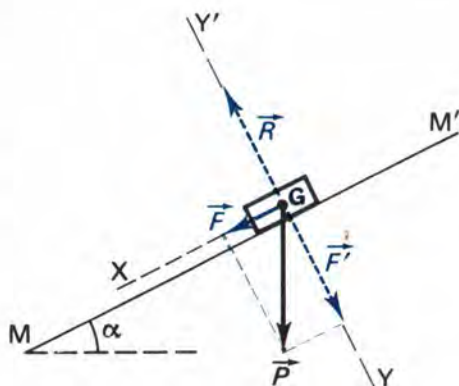


Fig. 1.

$$F = P \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

Comme la droite d'action de $\vec{F}$ passe par le centre de gravité G, cette résultante communique au solide un **mouvement de translation rectiligne**, parallèle aux lignes de plus grande pente du plan incliné.

Les caractéristiques de ce mouvement sont celles du mouvement du centre de gravité, considéré comme un point matériel libre, de même masse m que le solide et soumis à la seule force $\vec{F}$, constante en direction, sens et module.

D'après la relation fondamentale de la Dynamique, c'est un mouvement rectiligne **uniformément accéléré** dont le vecteur-accelération,

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ a pour module :}$$

$$\gamma = \frac{mg \sin \alpha}{m}, \text{ soit : } \boxed{\gamma = g \sin \alpha}$$

Pour un plan d'inclinaison α donnée, l'accélération ne dépend donc *que* du lieu; elle est en particulier indépendante de la masse du solide. Nous avons là un exemple de **chute ralentie**, ne différant d'une chute libre que par une accélération plus faible, égale à une fraction d'autant plus petite de l'accélération du mouvement de chute libre que le plan est moins incliné.

b. — La vérification expérimentale.

Il est difficile d'obtenir un glissement sans frottement; la figure 2 représente schématiquement un dispositif permettant d'étudier expérimentalement la chute ralentie d'un solide, suspendu à la chape d'une poulie légère roulant sur un fil rectiligne dont on peut faire varier l'inclinaison α par rapport à l'horizontale; la masse de la poulie étant négligeable devant celle du cylindre qui constitue le mobile, celui-ci a pratiquement même mouvement que s'il glissait sans frottement sur le fil.

— 1^o Si $t_1, t_2, t_3, \dots$ sont les temps mis par le solide pour parcourir des espaces de valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots$ on vérifie que :

$$\frac{x_1}{t_1^2} \approx \frac{x_2}{t_2^2} \approx \frac{x_3}{t_3^2} \approx \dots \approx \text{constante } a.$$

Les espaces parcourus à partir du départ étant proportionnels aux carrés des temps mis à les parcourir, le mouvement est **uniformément accéléré**, d'accélération γ telle que :

$$\frac{1}{2} \gamma = a; \quad \gamma = 2a$$

— 2^o En recommençant pour d'autres valeurs $\alpha', \alpha'', \dots$ de l'angle d'inclinaison, on trouve des accélérations $\gamma', \gamma'', \dots$ telles que :

$$\frac{\gamma}{\sin \alpha} \approx \frac{\gamma'}{\sin \alpha'} \approx \frac{\gamma''}{\sin \alpha''} \approx \dots \approx g$$

L'accélération est donc bien **proportionnelle au sinus de l'angle d'inclinaison**.

2. Le monte-charge; la tension d'un câble.

Considérons un monte-charge simple, fait d'un câble d'acier auquel on accroche le fardeau à monter et qui peut s'enrouler sur un treuil dont l'axe de rotation est horizontal (fig. 3-a). Nous supposons que le **mouvement de translation vertical** imposé au fardeau est

uniformément accéléré au départ;
uniforme en cours de route;
uniformément retardé à l'arrivée.

Proposons-nous de calculer la valeur que prend la **tension du câble** pendant chacune des trois phases du mouvement.

La tension est une force de liaison que l'on définit comme suit : **le câble étant supposé**

coupé en A (fig. 3-b), la tension $\vec{T}$ est la force qu'il faudrait appliquer au point A pour que

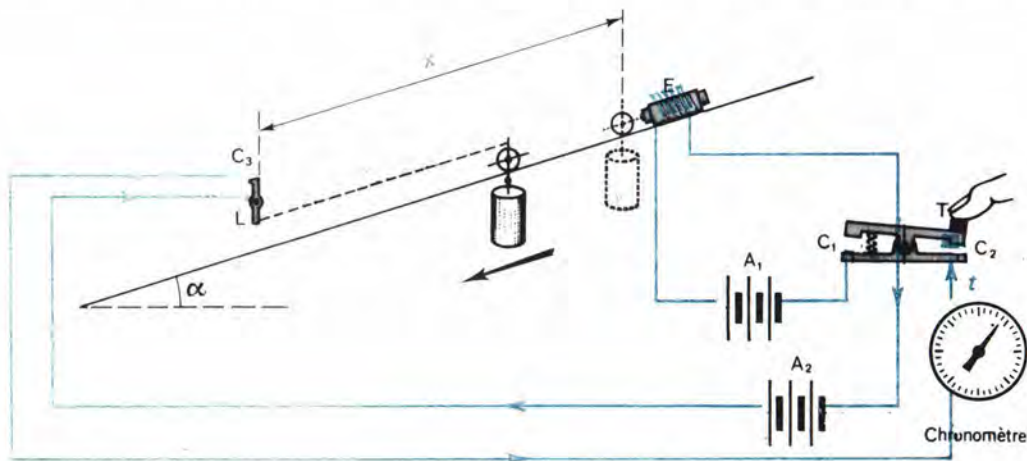


Fig. 2. — La vérification expérimentale de la relation $\vec{F} = m\vec{\gamma}$.

La commande électrique du chronomètre est analogue à celle qui a été utilisée dans l'étude de la chute libre (fig. 3, p. 23).

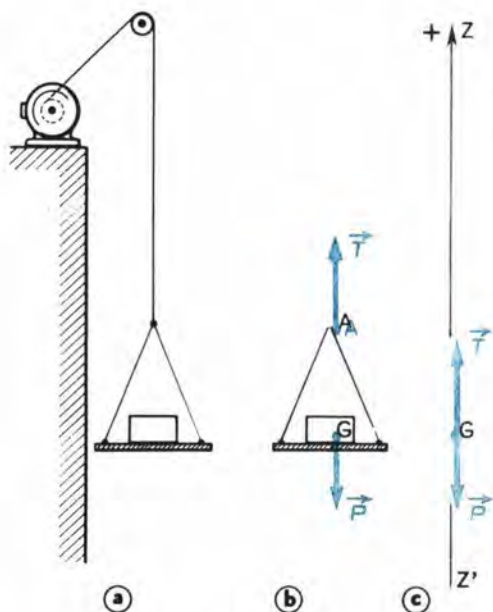


Fig. 3.

le fardeau conserve le mouvement qu'il avait avant la coupure.

Isolons le centre de gravité G du fardeau (fig. 3-c); son mouvement est le même que celui d'un point matériel libre dont la masse serait la masse m du fardeau et où seraient transportées les forces extérieures qui s'exercent sur le fardeau. Abstraction faite des *résistances passives* (forces de frottement et résistance de l'air), ces

forces se limitent ici à la tension $\vec{T}$ du câble et au poids $\vec{P} = m\vec{g}$ du fardeau.

Soit γ l'accélération des mouvements uniformément variés correspondant aux phases de démarrage et d'arrêt. Appliquons la relation fondamentale de la Dynamique au mobile G lorsqu'il est animé de l'un ou l'autre de ces mouvements variés :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma} \quad (1)$$

Si nous orientons l'axe vertical $Z'Z$ qui sert de support aux vecteurs $\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{\gamma}$ et $\vec{g}$, cette relation vectorielle se traduit par la relation algébrique :

$$P + T = m\gamma$$

$$\text{ou : } m\vec{g} + T = m\gamma; \quad \boxed{T = -m(g - \gamma)} \quad (2)$$

Ainsi, la tension du câble dépend de l'accélération du mouvement imposé au fardeau.

Application numérique.

Supposons que la masse du fardeau soit $m = 100 \text{ kg}$ et que le module de l'accélération soit 1 m/s^2 . Prenons 10 N/kg pour module du vecteur $\vec{g}$.

Si l'axe $Z'Z$ est orienté positivement vers le haut :

$\vec{g}$ a le sens négatif, d'où $g = -10 \text{ N/kg}$.

γ a tantôt le sens positif, tantôt le sens négatif.

1° Au démarrage en montant ou au cours de l'arrêt en descendant :

$$\begin{aligned} \gamma &= +1 \text{ m/s}^2 \\ T &= -m(g - \gamma) = -100(-10 - 1) \\ &= 1100 \text{ newtons.} \end{aligned}$$

L'intensité de la tension est supérieure à celle du poids (1 000 N).

2° Au cours de l'arrêt en montant ou au démarrage en descendant :

$$\begin{aligned} \gamma &= -1 \text{ m/s}^2 \\ T &= -m(g - \gamma) = -100(-10 + 1) \\ &= 900 \text{ newtons.} \end{aligned}$$

L'intensité de la tension est inférieure à celle du poids.

3° Lorsque le mouvement est uniforme, $\gamma = 0$ et la relation (2) se réduit à :

$$T = -mg$$

elle exprime alors que la tension du câble est opposée au poids du fardeau, comme si le fardeau était immobile.

3. Dynamomètre dans un ascenseur. La notion de force d'inertie.

a. — Soit un solide quelconque S , de masse m , accroché à un dynamomètre fixé à la paroi d'un ascenseur (fig. 4-a). Nous pouvons toujours supposer que le solide S est suspendu à l'extrémité du ressort par l'intermédiaire d'un fil; il est alors clair que le nombre lu sur la gra-

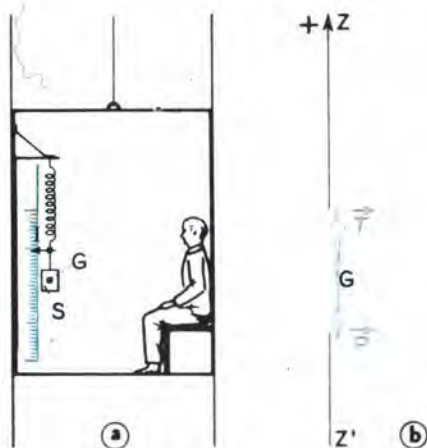


Fig. 4.

duction en face de l'index I du dynamomètre mesure à chaque instant l'intensité de la tension du fil.

Calculons cette *tension* lorsque l'ascenseur est animé d'un mouvement de translation vertical, que nous supposons encore :

- uniformément accéléré* au départ;
- uniforme* en cours de route;
- uniformément retardé* à l'arrivée.

Comme dans le cas du monte-charge (§ 2), l'application de la relation fondamentale de la Dynamique au mouvement du centre de gravité G du solide S, soumis au poids $\vec{P} = m\vec{g}$ de ce solide et à la tension $\vec{T}$ du fil (fig. 4-b), conduit à la relation vectorielle :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma} \quad (1)$$

celle-ci se traduit, sur l'axe vertical orienté Z'Z, par la relation algébrique :

$$mg + T = m\gamma$$

ou :

$$T = -m(g - \gamma) \quad (2)$$

La valeur absolue $|T|$ de cette tension est donnée à chaque instant par le dynamomètre.

D'après les conclusions du paragraphe précédent, cette valeur, comparée à l'intensité $m|g|$ du poids du corps suspendu, est :

supérieure au poids lorsque l'ascenseur démarre en montant ou s'arrête en descendant;

inférieure au poids lorsque l'ascenseur s'arrête en montant ou démarre en descendant;

égale au poids pendant le mouvement *uniforme* de l'ascenseur.

Elle représente, pour l'observateur entraîné par l'ascenseur, le **poids apparent** du corps suspendu au dynamomètre.

Remarques.

I. — Si l'ascenseur, après rupture de son câble, tombe en chute *libre*, son accélération $\vec{\gamma}$ serait égale au vecteur $\vec{g}$ et la relation (2) donnerait :

$$T = 0.$$

Pendant la chute libre, l'index du dynamomètre serait donc au *zéro* de la graduation; le poids apparent serait *nul*.

II. — La masse m du solide S est constante; l'intensité g de la pesanteur l'est pratiquement aussi. Par suite, d'après (2), la lecture au dynamomètre ne change que si la valeur γ de l'accélération varie; le dynamomètre pourrait donc être gradué en accélérations et servir d'*accéléromètre*.

b. — Ces problèmes de Dynamique peuvent être traités d'une autre manière. On sait, en effet, que l'état de repos ou de mouvement d'un corps est essentiellement relatif : lorsque l'on dit que le mobile G (fig. 4) est animé d'un mouvement uniforme ou uniformément varié, on sous-entend que ce mouvement est rapporté à un repère fixe par rapport à la Terre, par exemple à un observateur immobile qui, d'un palier, regarderait monter ou descendre l'ascenseur.

Si l'on choisit un *repère entraîné avec le mobile*, ce mobile occupe une position fixe par rapport au repère. Pour expliquer cet équilibre apparent, constaté par un observateur placé dans l'ascenseur, on doit écrire, conformément aux lois de la Statique, que le point matériel G est soumis à un ensemble de forces dont la somme géométrique est nulle.

Comme les forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$ qui s'exercent en G ne constituent pas un système de forces équivalent à zéro lorsque le mouvement de l'ascenseur est varié, l'observateur de l'ascenseur est conduit à considérer qu'une troisième force $\vec{F}'$ intervient, telle que :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}' = 0$$

Or, par rapport à la Terre, le mobile G et l'observateur entraîné avec lui ont l'accélération $\vec{\gamma}$ donnée par la relation de la Dynamique :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$$

En écrivant cette relation sous la forme :

$$\vec{P} + \vec{T} - m\vec{\gamma} = 0$$

on voit que $\vec{F}'$ a pour expression :

$$\vec{F}' = -m\vec{\gamma}$$

A cette force $\vec{F}'$, de même direction que le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ mais de *sens contraire*, d'intensité $m|\gamma|$, on donne le nom de **d'inertie**.

Il importe de bien comprendre la particularité d'une force d'inertie :

Pour un observateur lié à la Terre (qui regarderait monter ou descendre l'ascenseur) il n'y a pas de force d'inertie; le mouvement du point matériel G, de masse m , est déterminé par les seules forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$.

La force d'inertie $\vec{F}' = -m\vec{\gamma}$ n'intervient que pour un observateur entraîné lui-même dans le mouvement d'accélération $\vec{\gamma}$ et qui veut

exprimer le fait que le point matériel G est immobile par rapport à lui.

c. — Ainsi, les problèmes concernant le mouvement d'un point matériel peuvent se traiter de deux façons différentes :

1° On peut **rapporter le mouvement à un observateur lié à la Terre** et appliquer au point matériel la relation fondamentale de la Dynamique. Pour le centre de gravité du solide S, cette manière d'opérer nous a conduit à la relation :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{r}' \quad (1)$$

2° On peut ramener le problème de Dynamique à un problème de Statique en considérant **un observateur entraîné avec le point matériel**.

Pour cet observateur, le point matériel paraît immobile, donc *en équilibre*; on est ainsi amené à écrire que la somme géométrique des forces qui s'exercent sur le point matériel, *augmentée de la force d'inertie* $\vec{F}' = -m\vec{r}'$, est nulle.

Dans le cas du mobile G précédent, cette seconde façon de procéder conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}' = 0$$

$$\vec{P} + \vec{T} - m\vec{r}' = 0 \quad (3)$$

La comparaison des relations (1) et (3) montre avec évidence que les deux méthodes conduisent au même résultat (1).

4. Le mouvement d'un projectile.

Considérons une bille assimilable à un point matériel M de masse m , lancée d'un point O avec une vitesse $\vec{v}_0$ dont la direction fait l'angle α avec le plan horizontal (fig. 5).

Si nous supposons que le mouvement s'effectue *dans le vide*, la seule force qui s'exerce sur le mobile M à partir de l'instant du départ est

son poids $\vec{P}$, force *verticale*, constante en direction, sens et intensité dans une portion d'espace où le champ de pesanteur est pratiquement uniforme; par suite, la trajectoire de M sera tout entière dans le plan horizontal contenant le vecteur $\vec{v}_0$.

Dans ce plan, considérons l'axe horizontal OX et l'axe vertical OZ, orientés comme l'indique la figure 5. Nous allons caractériser le mou-

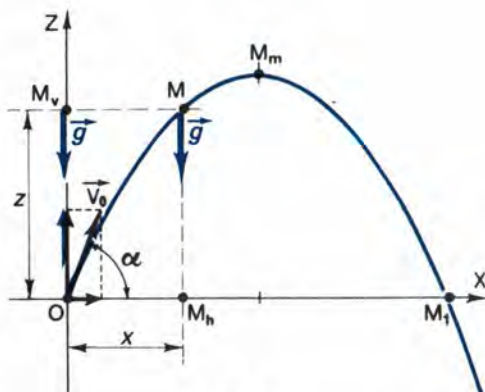


Fig. 5.

vement *curviligne* du point M à partir des mouvements *rectilignes* de ses projections M_h et M_v sur ces deux axes (p. 19, § 6).

Prenons comme instant initial $t = 0$ l'instant du départ :

1° Les vitesses *initiales* des points M_h et M_v sont les projections de la vitesse initiale $\vec{v}_0$ sur les axes, soit :

$$\begin{cases} \vec{v}_0 \cos \alpha, \text{ pour } M_h; \\ \vec{v}_0 \sin \alpha, \text{ pour } M_v. \end{cases}$$

2° D'après la relation fondamentale de la Dynamique, le mobile M, de masse m , a une accélération constante,

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}$$

égale à l'accélération du mouvement de chute libre.

Le vecteur $\vec{g}$, étant vertical, n'a pas de composante parallèle à OX et il est égal à sa composante parallèle à OZ; par suite :

— le mouvement de M_h sur OX est un **mouvement uniforme** ($\gamma = 0$), d'équation horaire :

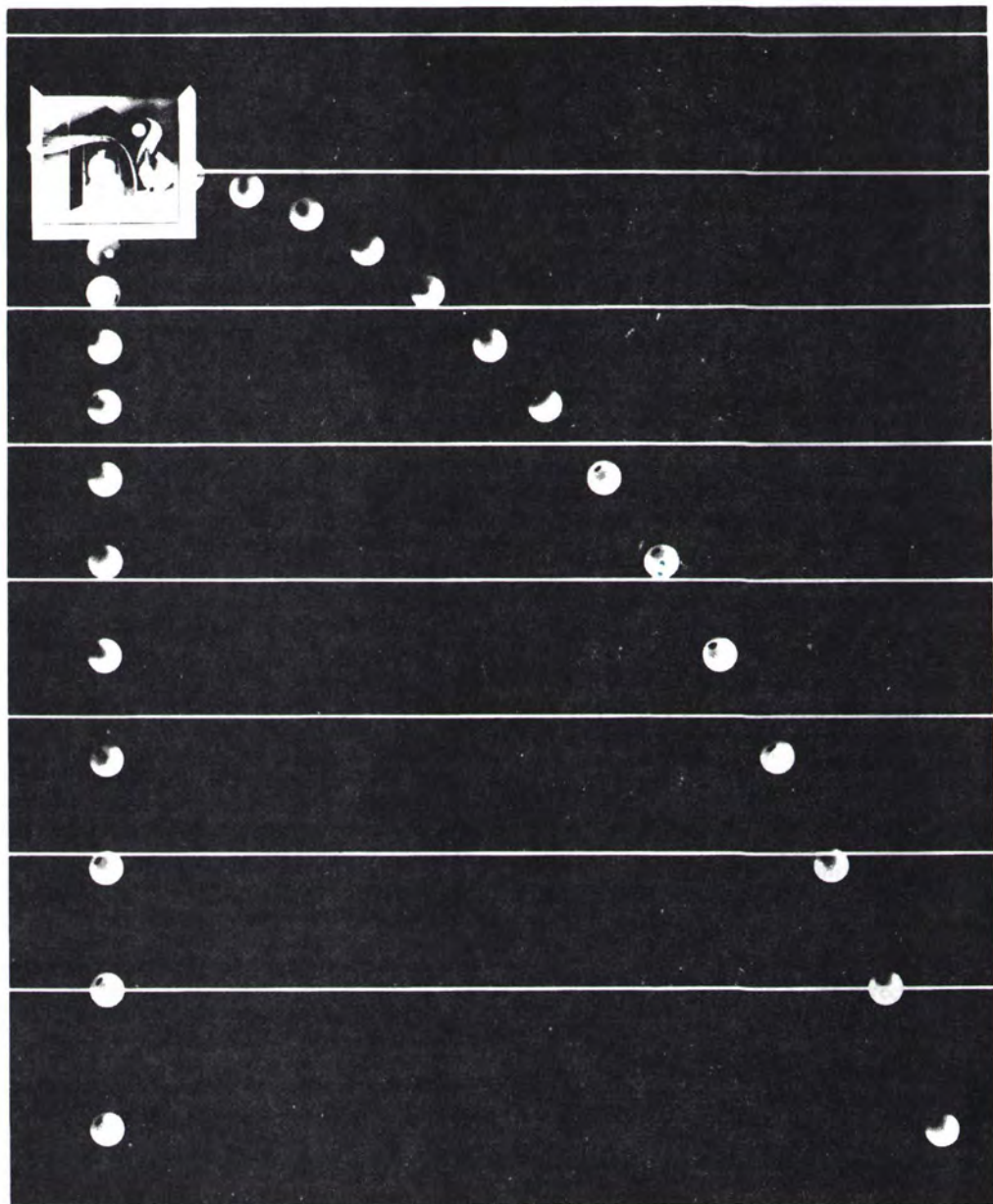
$$x = (v_0 \cos \alpha) t \quad (4)$$

— le mouvement de M_v sur OZ est un **mouvement uniformément varié** dont l'accélération est le vecteur $\vec{g}$; son équation horaire est donc :

$$z = \frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha) t \quad (5)$$

g désignant la valeur *algébrique* du vecteur accélération $\vec{g}$.

(1) Voir en complément l'exercice résolu n° 2.



La chronophotographie de deux billes partant au même instant.

L'une des billes est abandonnée sans vitesse initiale ; l'autre est lancée avec une vitesse initiale *horizontale* v_0 . La photographie montre nettement que les deux billes traversent *simultanément* les mêmes plans horizontaux, matérialisés par les lignes blanches.

Comme ces équations horaires donnent, à chaque instant t , les coordonnées OM_h et OM_v du mobile M à cet instant, il suffit d'éliminer t entre (4) et (5) pour obtenir l'équation $z = f(x)$ de la trajectoire de M :

$$z = \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x \quad (6)$$

C'est une équation de la forme : $z = ax^2 + bx$ (1), donc **le mobile décrit une parabole d'axe vertical, passant par l'origine O .**

On trouvera une étude complémentaire de ce mouvement dans l'exercice résolu n° 3.

Remarques.

1° Pour $\alpha = 0$ (vitesse initiale $\vec{v}_0$ horizontale), les coordonnées du point mobile M deviennent :

$$x = v_0 t \quad z = \frac{1}{2} g t^2$$

Le mouvement projeté sur l'axe OZ est alors identique au mouvement de chute libre sans vitesse initiale.

La photo de la p. 44 montre comment on en obtient une très bonne vérification expérimentale par chronophotographie.

2° Lorsqu'on lance un projectile quelconque, une bouteille par exemple, en lui imprimant en même temps un mouvement de rotation, seul

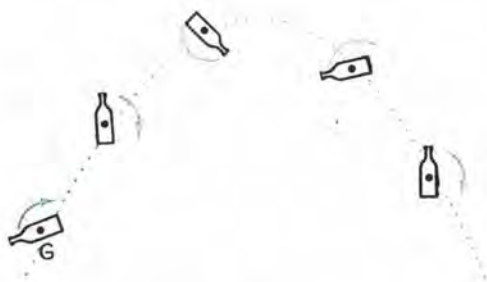


Fig. 6.

son centre de gravité G prend le mouvement parabolique représenté par les équations précédentes. Les autres points décrivent des trajectoires très différentes car la bouteille ne cesse de tourner autour de son centre de gravité (fig. 6).

3° Il est bien entendu que le projectile est supposé *dans le vide*. Dans l'air, le mouvement n'est approximativement parabolique que si la résistance de l'air est petite comparée au poids; cela suppose un projectile **dense et une vitesse initiale faible**.

Dans le cas des projectiles des armes à feu, les vitesses initiales (de plusieurs centaines de m/s) sont trop considérables pour que cette approximation soit valable; en fait, la résistance de l'air réduit beaucoup la portée OM_1 (fig. 5) et la trajectoire du centre de gravité diffère notablement d'une parabole.

(1) Compte tenu de l'orientation de l'axe OZ , g est < 0 , de sorte que le coefficient de x^2 , $\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$, est *néglatif*.

EXERCICES

I. EXERCICES RÉSOLUS

1. La machine d'Atwood : accélération du mouvement et tension du fil dans le cas où l'on néglige la masse de la poulie et les frottements.

La figure 7 représente schématiquement une machine d'Atwood ; sa légende en indique le fonctionnement.

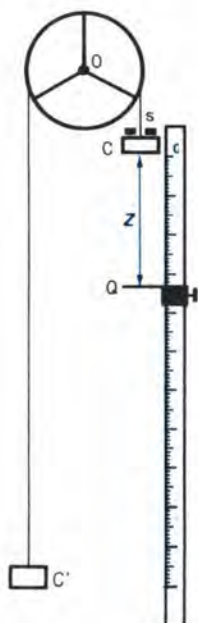


Fig. 7. — Machine d'Atwood.

Deux disques identiques, C et C', sont reliés par un fil fin qui passe dans la gorge d'une poulie très légère, pouvant tourner (sans frottement appréciable) autour de son axe horizontal O.

Le disque C porte une surcharge s qui met tout le système en mouvement.

Les espaces parcourus se mesurent le long de la règle graduée, depuis le départ (au zéro) jusqu'au curseur plein Q. Un métronome donne les durées de ces parcours.

Désignons par M la masse commune des disques C et C' et par m celle de la surcharge s.

Sous l'action de la surcharge s, les solides C + s (fig. 8-a) et C' (fig. 8-b) prennent des mouvements de translation verticaux de sens contraires. Appliquons la relation fondamentale de la Dynamique aux mouvements des centres de gravité G et G' de ces solides,

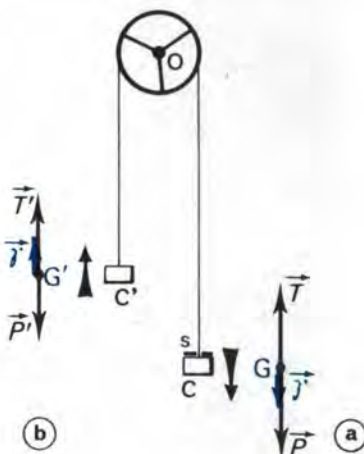


Fig. 8.

considérés comme des points matériels de masses $M + m$ et m :

1° Le point matériel G est soumis au poids $\vec{P} = (M + m) \vec{g}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil ; l'accélération $\vec{\gamma}$ de son mouvement satisfait donc, à chaque instant, à la relation vectorielle :

$$\vec{P} + \vec{T} = (M + m) \vec{\gamma}.$$

Les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{T}$ et $\vec{\gamma}$ étant portés par la même verticale et l'accélération $\vec{\gamma}$ ayant même sens que $\vec{P}$, cette relation donne, en modules :

$$(M + m) g - T = (M + m) \gamma$$

ou :

$$T = (M + m) (g - \gamma). \quad (1)$$

2° Le point matériel G' est soumis au poids $\vec{P}' = M \vec{g}$ et à la tension $\vec{T}'$ du fil. Sa vitesse v et celle du mobile G sont à chaque instant des vecteurs égaux et de sens contraires, de sorte que son accélération a même module γ que celle de G.

On a donc, en remarquant que $\vec{\gamma}$ a ici le sens de $\vec{T}'$:

$$T' - Mg = M\gamma$$

ou :

$$T' = M (g + \gamma). \quad (2)$$

L'étude de la rotation d'un solide nous montrera que la poulie, si elle tourne sans frottement et si l'on peut négliger sa masse devant celle des disques C

et C' , ne modifie pas la tension du fil; dans ces conditions, T et T' ont même module ⁽¹⁾ :

$$T' = T$$

D'où :

$$M(g + \gamma) = (M + m)(g - \gamma)$$

et :

$$\gamma = \frac{mg}{2M + m} \quad (3)$$

M , m et g étant des constantes, l'accélération est constante : les mouvements de translation des solides C et s et C' sont donc **uniformément accélérés**.

La tension du fil. — En portant cette valeur de l'accélération dans l'une ou l'autre des expressions (1) et (2), on obtient :

$$T = Mg \left(1 + \frac{m}{2M + m} \right) \quad (4)$$

Cette relation montre que, pendant le mouvement, la tension a un module constant, intermédiaire entre les modules $P = (M + m)g$ et $P' = Mg$ des poids des corps suspendus aux deux extrémités du fil.

Application numérique. — Supposons que :

$$M = 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg}; \quad m = 10 \text{ g} = 0,01 \text{ kg}; \\ g \approx 10 \text{ N/kg}.$$

Alors :

$$\gamma = \frac{mg}{2M + m} \approx \frac{0,01 \times 10}{0,21} = \frac{10}{21} \approx 0,48 \text{ m/s}^2$$

$$P = (m + M)g \approx 1,1 \text{ N}; \quad P' = Mg \approx 1 \text{ N}$$

$$T = Mg \left(1 + \frac{m}{2M + m} \right) \approx 1 \left(1 + \frac{1}{21} \right) = \frac{22}{21} \approx 1,05 \text{ N}.$$

Remarque. — Au moyen d'un curseur évidé, il est possible d'enlever la surcharge s au cours du mouvement. A partir de cet instant, $m = 0$; par suite :

D'après (3) :

$$\gamma = 0$$

les mouvements de translation deviennent uniformes.

D'après (4) :

$$T = mg$$

la tension a même module que les poids des corps suspendus aux extrémités du fil, comme si ces corps étaient au repos.

2. Fil à plomb dans un véhicule animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément varié. La notion de pesanteur apparente.

Un fil à plomb est suspendu à l'intérieur d'un wagon roulant sur des rails rectilignes (ou dans une automobile se déplaçant sur une route droite). On

demande l'inclinaison et la tension du fil pendant les diverses phases du mouvement, que l'on suppose :

uniformément accéléré au démarrage;
uniforme en cours de route;
uniformément retardé pendant l'arrêt.

Supposons, pour simplifier, que le mouvement du véhicule soit horizontal; soit γ l'accélération de ce mouvement.

Ramenons ce problème de Dynamique à un problème de Statique :

Un observateur assis dans le wagon peut considérer le centre de gravité G du solide suspendu au fil comme un point matériel libre, de même masse m que le solide, en équilibre sous l'action du poids

$\vec{P} = m\vec{g}$, de la tension $\vec{T}$ du fil et de la **force d'inertie** $\vec{F}' = -m\vec{\gamma}$; cet équilibre exige que l'on ait :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}' = 0. \quad (1)$$

Comme les vecteurs $\vec{F}'$ et $\vec{\gamma}$ sont de sens contraires, **le fil à plomb est nécessairement incliné en sens inverse de l'accélération** (fig. 9-a).

Dans la somme vectorielle (1), remplaçons les forces $\vec{P}$ et $\vec{F}'$ par leur résultante $\vec{P}' = \vec{P} + \vec{F}'$; il vient :

$$\vec{T} + \vec{P}' = 0; \quad \vec{T} = -\vec{P}'$$

Les forces $\vec{T}$ et $\vec{P}'$ sont opposées; elles ont donc même module et l'examen de la figure 9-b donne immédiatement :

1° l'inclinaison α du fil par rapport à la verticale :

$$\text{tg } \alpha = \frac{F'}{P} = \frac{m\gamma}{mg}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{\gamma}{g} \quad (2)$$

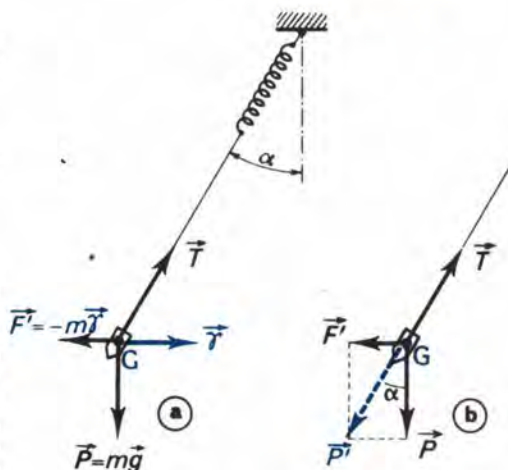


Fig. 9.

⁽¹⁾ Une étude plus complète de la machine d'Atwood, tenant compte de la masse de la poulie, sera faite ultérieurement (chap. 8).

L'inclinaison varie dans le même sens que le module de l'accélération du véhicule ; elle est indépendante de la masse du solide suspendu au fil.

2° Le module de la tension du fil :

$$T = P' = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

ou encore (fig. 9-b) :

$$T^2 = P'^2 = P^2 + F'^2$$

$$T^2 = m^2 g^2 + m^2 \gamma^2 = m^2 (g^2 + \gamma^2)$$

$$T = m \sqrt{g^2 + \gamma^2} \quad (3)$$

La tension est plus grande que le poids du corps suspendu et varie aussi dans le même sens que le module de l'accélération. Si le fil à plomb est accroché par l'intermédiaire d'un ressort, celui-ci s'allonge plus ou moins selon que l'accélération du véhicule est plus ou moins grande.

Lorsque le véhicule est en mouvement de translation rectiligne uniforme, on a $\gamma = 0$; par suite :

— D'après (2) : $\tan \alpha = 0$; l'inclinaison est nulle, le fil est vertical ;

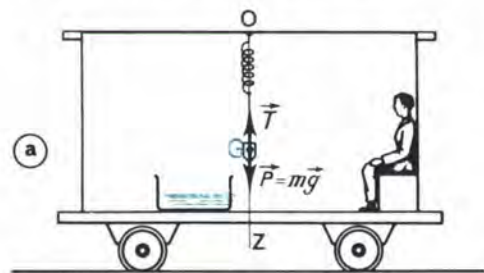
— D'après (3) : $T = mg$; la tension du fil a même intensité que le poids du corps suspendu. Ainsi, dans un véhicule en mouvement de translation rectiligne uniforme, l'équilibre du fil à plomb par rapport à un observateur entraîné avec lui est le même que si le véhicule était fixe par rapport à la Terre (fig. 10-a).

Application numérique. — Le fil à plomb de masse $m = 100 \text{ g}$ est suspendu dans une automobile qui démarre sur une route droite et horizontale et acquiert une vitesse de 72 km/h après avoir parcouru 100 m . L'accélération étant supposée constante, on demande l'inclinaison et la tension du fil.

En prenant le point de départ pour origine des abscisses et l'instant du départ pour instant initial $t = 0$, on a :

$$v^2 = 2\gamma x ; \quad \gamma = \frac{v^2}{2x}$$

$$v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s} ; \quad x = 100 \text{ m}$$



$$\gamma = \frac{400}{200} = 2 \text{ m/s}^2.$$

D'où, en prenant $g \approx 10 \text{ N/kg}$:

$$\tan \alpha = \frac{\gamma}{g} = 0,2 ; \quad \alpha \approx 11^{\circ} 1/2$$

$$T = m \sqrt{g^2 + \gamma^2} \approx 0,1 \sqrt{104} =$$

$$\sqrt{1,04} = (1 + 0,4)^{1/2} \approx 1,02 \text{ N}$$

Remarque. — La force P' , résultante du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et de la force d'inertie $\vec{F}' = -m\vec{\gamma}$, a pour expression :

$$\vec{P}' = \vec{P} + \vec{F}' = m\vec{g} - m\vec{\gamma} = m(\vec{g} - \vec{\gamma}).$$

Pour l'observateur entraîné avec le fil à plomb dans le mouvement d'accélération $\vec{\gamma}$, c'est cette force $\vec{P}' = m(\vec{g} - \vec{\gamma})$ qui tend le fil (fig. 9-b et 10-b). Elle joue donc pour lui le rôle que joue le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ lorsque le véhicule est au repos ou en mouvement de translation rectiligne uniforme (fig. 10-a). Ainsi, pour cet observateur, la pesanteur à l'intérieur du véhicule paraît être modifiée du fait que celui-ci est en mouvement varié. Tout se passe comme si le vecteur $\vec{g}$ était remplacé par un vecteur $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\gamma}$, représentant le **champ de pesanteur apparente** à l'intérieur du véhicule.

La direction de ce vecteur $\vec{g}'$ est la **verticale apparente** ; c'est la direction $\vec{OZ}'$ que matérialise le fil à plomb tendu par le **poids apparent** $\vec{P}' = m\vec{g}'$.

Il n'y a pas là qu'une vue de l'esprit ; en effet :

— Si l'observateur brûle le fil, il voit le point G décrire la verticale apparente $\vec{OZ}'$ dans un mouvement de chute libre dont l'accélération est égale à $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\gamma}$;

— La surface libre d'un liquide, placé dans le véhicule, s'immobilise dans un plan HH' perpendiculaire à la verticale apparente (fig. 10-b) ;

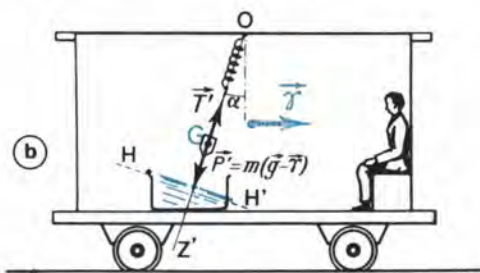


Fig. 10.

Wagon immobile ou en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Wagon en mouvement de translation rectiligne accéléré (de gauche à droite) ou retardé (de droite à gauche).

— Si l'observateur était debout sur un plan tel que HH' , il aurait l'impression d'être sur un plan horizontal alors que, sur le plancher du véhicule, il se sent entraîné (en sens contraire de l'accélération $\vec{\gamma}$) comme s'il était sur un plan incliné.

3. Le mouvement d'un projectile : portée et flèche de la trajectoire ; vitesse instantanée du centre de gravité.

Un projectile est lancé d'un point O , à l'instant $t = 0$, avec une vitesse v_0 inclinée de α par rapport au plan horizontal.

Rapportons le mouvement de son centre de gravité à un axe horizontal OX et un axe vertical OZ tracés dans le plan vertical qui contient le vecteur v_0 ; nous avons vu (§ 5 et fig. 5) que la trajectoire est une parabole, d'équation :

$$z = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x \quad (1)$$

Portée. — La portée est la distance OM_1 du point de départ O au point M_1 où la trajectoire perce le plan horizontal qui contient O . Elle est égale à l'abscisse x_1 du point d'ordonnée nulle ; on l'obtient donc en faisant $z = 0$ dans l'équation (1) :

$$x_1 = - \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (\text{avec } g < 0)$$

On voit que la portée est **maximale** pour $\sin 2\alpha = 1$, c'est-à-dire pour $2\alpha = \pi/2$ rad et

$$\alpha = \pi/4 \text{ rad} \quad (\text{fig. 11}).$$

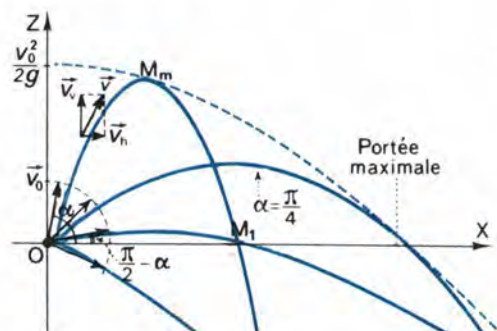


Fig. 11.

Diverses trajectoires paraboliques correspondant à des vitesses initiales v_0 de même module.

De plus, x_1 conserve la même valeur quand on remplace α par $(\pi/2 - \alpha)$; la portée est donc la même pour deux angles de tir complémentaires (fig. 11).

Vitesse instantanée. — Dans un mouvement

curviligne, le vecteur vitesse $\vec{v}$ à un instant t quelconque est porté par la tangente à la trajectoire et a le sens du mouvement ; de plus, ses composantes $\vec{v}_h$ et $\vec{v}_v$ sont égales aux vitesses des mouvements projetés sur OX et OY . Or :

Sur OX (mouvement uniforme) : $v_h = v_0 \cos \alpha$;

Sur OZ (mouvement uniformément varié) :

$$v_v = gt + v_0 \sin \alpha$$

(g désignant la valeur algébrique de l'accélération de la pesanteur).

Par suite :

$$v^2 = v_h^2 + v_v^2$$

$$v^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + g^2 t^2 + v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gt v_0 \sin \alpha$$

$$v^2 = v_0^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 2g \left(\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t \right)$$

Comme : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$\text{et : } \frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha) t = z \quad (\S 4),$$

on voit que :

$$v^2 = v_0^2 + 2gz$$

ou

$$v^2 - v_0^2 = 2gz \quad (2)$$

Ainsi, la variation du carré de la vitesse ne dépend que de la différence d'altitude, z , entre la position actuelle et la position de départ ⁽¹⁾.

Il en résulte que la valeur de la vitesse est la même pour les deux positions du mobile (à la montée et à la descente) qui correspondent à une même altitude ; en particulier, la vitesse en M_1 ($z = 0$) a même module v_0 que la vitesse initiale en O .

Flèche. — La relation (2) permet de trouver facilement la flèche de la trajectoire, c'est-à-dire l'ordonnée z_m de son sommet M_m ; pour cette position, la vitesse du mobile est en effet horizontale et sa valeur se confond avec celle de sa composante horizontale, $v_h = v_0 \cos \alpha$; on a donc :

$$v_0^2 \cos^2 \alpha - v_0^2 = 2gz_m$$

On en tire :

$$z_m = - \frac{v_0^2 (1 - \cos^2 \alpha)}{2g} = - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (\text{avec } g < 0)$$

⁽¹⁾ Noter que l'expression de $v^2 - v_0^2$ est la même que pour un corps lancé verticalement (p. 25).

II. EXERCICES PROPOSÉS

1. Un corps A de masse $m = 100$ g situé à 3 m au-dessus du sol entraîne dans sa chute un corps B de masse $M = 500$ g qui glisse sur un plan horizontal supposé illimité. A et B sont reliés par un fil qui passe sur la gorge d'une poulie dont on néglige la masse.

Évaluer ce qui seraient, en l'absence de tout frottement :

- l'accélération γ du système ($g \approx 10$ u. SI);
- la durée du mouvement de A;
- la tension du fil de part et d'autre de la poulie.

2. Un corps A, de masse $m = 70$ g, entraîne dans sa chute un corps B de masse $M = 80$ g, qui glisse sur un plan incliné de 30° par rapport au plan horizontal; A et B sont reliés par un fil qui passe sur la gorge d'une poulie dont on néglige la masse. Calculer, en négligeant tous les frottements, l'accélération et la tension du fil ($g \approx 10$ u. SI).

Rép. : 2 m/s^2 ; $0,56 \text{ N}$.

3. Deux wagonnets peuvent se déplacer parallèlement sur des lignes de plus grande pente d'un plan incliné de 30° par rapport au plan horizontal; ils sont reliés par un câble passant dans la gorge d'une poulie située à une station supérieure de telle sorte que l'un est en haut de la pente quand l'autre est en bas. Chaque wagonnet pesant 2 tonnes, calculer l'accélération du mouvement et la tension du câble quand on met une surcharge de 900 kg sur le plus élevé; que devient cette tension si l'on immobilise l'un ou l'autre des wagonnets? (On néglige les frottements et les masses de la poulie et du câble; $g \approx 10$ u. SI.)

4. Un corps A de masse $M = 1,66$ kg peut glisser sur une longue table horizontale. Comme l'indique la figure 12, il est réuni par des fils fins à deux autres corps, l'un B de masse $m = 0,490$ kg et l'autre B' de masse $m' = 0,300$ kg. On suppose que les masses des fils et des poulies P et P' sont négligeables, ainsi que les frottements. Le système, abandonné à lui-même, prend un mouvement uniformément accéléré.

1° Calculer l'accélération de ce mouvement.

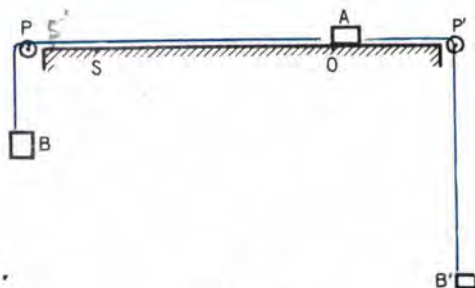


Fig. 12.

2° Calculer les tensions T et T' des fils AB et AB'. Calculer directement la différence de ces tensions.

3° Calculer le temps mis par le corps A, partant du repos en O, pour atteindre le point S à une distance $OS = 2,189$ m. Calculer aussi la vitesse instantanée du corps A à son passage en S.

4° Au moment où le corps A passe en S, le fil qui le relie au corps B casse brusquement. Décrire le mouvement ultérieur de l'ensemble des corps A et B'. Calculer le temps qui s'écoule entre le départ de A du point O et son retour au même point.

5° Calculer, de deux manières différentes, la tension T'' du fil AB' après la rupture du fil reliant A et B.

On prendra pour valeur de l'accélération de la pesanteur : $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$. (Bacc.).

Rép. : 1° $0,76 \text{ m/s}^2$; 2° $4,43 \text{ N}$; $3,17 \text{ N}$.

$T - T' = M\gamma = 1,26 \text{ N}$; 3° $2,4 \text{ s}$; $1,82 \text{ m/s}$;

4° $\gamma' = 1,5 \text{ m/s}^2$; $5,7 \text{ s}$; $5^\circ 2,5 \text{ N}$.

5. Une cage d'ascenseur de mine pèse 8 500 kg; on veut que, par un mouvement uniformément accéléré, elle atteigne la vitesse de 13 m/s au bout de 10 s; calculer la tension du câble et le chemin parcouru ($g \approx 10$ u. SI).

6. La cabine d'un ascenseur dont le plancher se trouve à 100 m au-dessus du sol se met à descendre en partant du repos; après 5 m de descente elle acquiert une vitesse de 2 m à la seconde avec laquelle elle parcourt 85 m et finalement elle arrive au sol avec une vitesse nulle. Les mouvements des première et troisième phases sont considérés comme uniformément variés.

1° Étudier les trois phases du mouvement de la cabine et calculer la durée totale de la descente.

2° Un fil élastique de masse négligeable est fixé par un bout au plafond de la cabine et porte, attaché à l'autre bout, une masse marquée de 100 g. On suppose que l'allongement du fil est proportionnel à la force de traction, et cet allongement est de 1 cm lorsque la force de traction est de 10 gf. Quel est l'allongement du fil pendant chaque phase de la descente de l'ascenseur?

3° Ce même fil élastique, muni de la masse de 100 g, est suspendu à l'intérieur d'une voiture qui démarre sur une voie horizontale avec une accélération constante et égale à 1 m/s^2 . Quelle est la position d'équilibre du fil et quel est son allongement pendant la période de démarrage de la voiture?

On prendra $g = 9,8$ u. SI et on négligera sa variation lorsqu'on s'élève de 100 m.

(Partie de probl. de bacc.).

Rép. : 1° $\gamma = 0,4 \text{ m/s}^2$; 0; $-0,2 \text{ m/s}^2$; $t = 57,5 \text{ s}$;

2° $9,6 \text{ cm}$; 10 cm ; $10,2 \text{ cm}$; 3° $\alpha \approx 5^\circ 50'$; $10,05 \text{ cm}$.

7. Une balle de golf est lancée en O (fig. 5), à l'instant $t = 0$, avec une vitesse initiale v_0 faisant

un angle $\alpha = \pi/4$ rad avec OX et valant 7,1 m/s. Calculer la portée, la flèche, les dates des passages en M_{III} et M_I , les vitesses de la balle dans ces positions M_{III} et M_I et la vitesse en des points d'altitude $z = 1$ m au-dessus du plan horizontal contenant OX. (On néglige la résistance de l'air; $g \approx 9,8$ u. SI.)

8. Un avion, volant horizontalement à une altitude de 7 840 m avec une vitesse constante de 450 km à l'heure, laisse tomber une bombe en passant par la verticale d'un point A du sol. Si l'air n'exerçait aucune résistance sur la bombe :

a) Au bout de combien de temps l'éclatement se produirait-il au contact du sol ?

b) Quelle distance l'avion aurait-il parcourue à ce moment-là depuis l'instant où il a lâché la bombe ?

c) A quelle distance de A se produirait l'éclatement ? ($g \approx 9,8$ u. SI.)

Rép. : a) 40 s ; b) et c) 5 000 m.

9. On se propose de communiquer à un projectile une vitesse de 10 km/s. Ce projectile, destiné à devenir un satellite de la Terre, emportera éventuellement des êtres vivants susceptibles de supporter une accélération γ_0 de 70 m/s².

1° Montrer que la méthode décrite par Jules Verne est inapplicable. Cet auteur préconisait l'emploi d'un canon géant. On prendra pour longueur du tube $l = 250$ mètres et l'on calculera l'accélération qu'aurait le projectile à l'intérieur du tube en y supposant le mouvement uniformément accéléré.

2° a) On communique au projectile la vitesse de 10 km/s au moyen d'une fusée qui se déplace d'un

mouvement uniformément accéléré, d'accélération $\gamma_0 = 70$ m/s². Quel est le parcours nécessaire à l'acquisition de la vitesse désirée ?

b) En admettant que la fusée quitte la Terre perpendiculairement au sol, quel sera, au moment du départ, le poids apparent d'un corps de 60 kilogrammes situé à l'intérieur du projectile ?

Dans tout le problème on prendra, au niveau du sol, $g \approx 10$ N/kg. (Bacc.).

10. 1° Un wagon de 20 tonnes est lâché sans vitesse initiale sur une voie dont la pente est 2‰. En négligeant les frottements et la résistance de l'air, écrire l'équation du mouvement du wagon le long de la voie. Calculer, en km/h, la vitesse acquise à 500 mètres du point de départ.

2° Le wagon ayant ainsi parcouru 500 mètres, les freins sont serrés; leur action équivaut à une force opposée au vecteur vitesse et égale au 1/10 du poids du wagon.

Quel est, à partir de cet instant, le chemin parcouru par le wagon jusqu'à l'arrêt complet ?

3° Une masse ponctuelle est suspendue par un fil au toit du wagon. On admet que, dans chaque phase du mouvement, cette masse atteint une position d'équilibre et que le pendule ainsi formé est immobile par rapport aux parois du wagon.

Calculer, en degrés et minutes, l'angle que fait le fil avec la verticale dans les phases 1 et 2 du mouvement.

N.B. — On suppose connues du candidat les valeurs numériques des constantes usuelles (Bacc.).

L'APPLICATION DE LA RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE AU MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOÏDAL ET AU MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

A. LE MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOÏDAL

1. L'étude cinématique.

a. — Les définitions.

On dit qu'un point M est en **mouvement rectiligne sinusoïdal** quand son abscisse $x = \overline{OM}$, sur une droite orientée $X'OX$ (fig. 1), varie comme le sinus d'un angle qui est une fonction linéaire du temps. L'équation horaire d'un tel mouvement est donc :

$$x = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

L'abscisse x , à l'instant t , est appelée l'**élongation** du mobile. Comme le sinus d'un angle varie entre $+1$ et -1 , l'élongation varie entre $+a$ et $-a$; le mobile parcourt donc le segment AA' , de longueur $2a$, alternativement dans un sens et dans l'autre : il oscille de part et d'autre de l'origine O .

Le module a de l'élongation maximale est l'**amplitude** du mouvement.

L'angle variable $(\omega t + \varphi)$ est la **phase à l'instant t** ;

La constante ω est la **pulsation** du mouvement;

La constante φ , valeur de la phase à l'instant $t = 0$, est la **phase initiale**.



Fig. 1.

Si l'on choisit comme instant initial un instant où le mobile passe par O en se déplaçant dans le sens positif, on a, en faisant $x = 0$ et $t = 0$ dans (1) :

$$0 = a \sin \varphi$$

ce qui entraîne :

$$\varphi = 0.$$

L'équation horaire prend alors la forme simple :

$$x = a \sin \omega t$$

C'est sous cette forme plus simple que nous écrirons par la suite l'équation du mouvement.

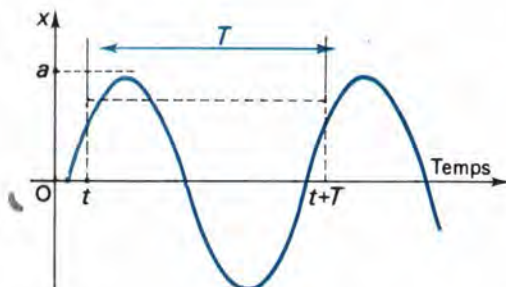


Fig. 2.

La figure 2 en donne la représentation graphique; la courbe obtenue s'appelle une **sinusoïde**.

b. — La périodicité du mouvement.

Suivons le mobile à partir d'un instant quelconque t (position M, fig. 1); au bout d'un certain temps T , lorsque la phase aura augmenté de 2π radians, le sinus et, par suite, l'élongation auront repris les mêmes valeurs et le mobile repassera par la position M qu'il avait à l'instant t en se déplaçant dans le même sens.

Ainsi, à partir d'un instant t quelconque, le mouvement se reproduit, identique à lui-même, chaque fois que le temps augmente de T .

Un tel mouvement est dit **périodique**. On appelle **période** l'intervalle de temps constant T qui sépare deux passages consécutifs du mobile au même point, dans le même sens.

La période T est nécessairement liée à la pulsation ω ; on a en effet, d'après la définition de T :

$$\begin{aligned}\omega(t+T) &= \omega t + 2\pi \\ \omega T &= 2\pi\end{aligned}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \left\{ \begin{array}{l} T \text{ en seconde;} \\ \omega \text{ en radian par seconde.} \end{array} \right.$$

On appelle **oscillation** le mouvement qu'effectue le mobile pendant une période.

La **fréquence** f est le nombre d'oscillations par seconde; puisque chaque oscillation dure T , on voit que :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

c. — La vitesse à l'instant t .

La valeur algébrique de la vitesse à l'instant t s'obtient en dérivant l'élongation, $x = a \sin \omega t$,

par rapport au temps :

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega a \cos \omega t$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$v = \omega a \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

On voit ainsi que :

— la vitesse du mobile est une fonction sinusoïdale du temps ayant la même pulsation ω et, par suite, la même période T que l'élongation;

— la phase de v est en avance de $\pi/2$ sur celle de x . On dit encore que la vitesse est *en quadrature* avance sur l'élongation.

Par suite de ce déphasage, le module de la vitesse est maximal en O quand l'élongation s'annule en changeant de signe (fig. 1), et, inversement, la vitesse s'annule en changeant de signe aux points A et A', quand le module de l'élongation est maximal.

d. — L'accélération à l'instant t .

Le mouvement étant rectiligne, la valeur algébrique de l'accélération est égale à la dérivée par rapport au temps de la valeur algébrique de la vitesse, $v = \omega a \cos \omega t$:

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 a \sin \omega t$$

Ou encore :

$$\gamma = -\omega^2 x$$

Cette expression montre que les modules de l'accélération et de l'élongation sont *proportionnels* et que leurs valeurs algébriques sont de *signes contraires*.

Le vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ est donc toujours dirigé de M vers O et son module est d'autant plus grand que le mobile M est plus écarté de O.

L'accélération et l'élongation s'annulent en même temps en O et sont toutes deux maximales en valeur absolue (mais de signes contraires) en A et A' (fig. 1); on dit qu'elles sont *en opposition de phase*.

2. L'étude dynamique.

a. — Soit m la masse d'un point matériel M animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude a ; la résultante $\vec{F}$ des forces qui agissent sur ce point matériel a pour expression :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

Comme l'accélération $\vec{\gamma}$, elle est portée par l'axe X'X.

Sa valeur algébrique est :

$$F = m\gamma = -m\omega^2 x$$

avec :

$$x = a \sin \omega t$$

La force résultante $\vec{F}$, comme l'accélération γ , s'annule donc à chaque passage du mobile par l'origine O des elongations. Le point O est le seul point de la trajectoire où les forces qui s'exercent sur le mobile admettent une résultante nulle; ce point est donc, pour le mobile, une *position d'équilibre unique*. Si, par suite d'une intervention extérieure, le mobile s'arrêtait en O, il y resterait.

Désignons par k la constante positive $m\omega^2$; la valeur algébrique de la résultante $\vec{F}$ prend la forme :

$$F = -kx$$

D'après cette relation :

— La force $\vec{F}$ et l'elongation $\vec{x}$ sont toujours de sens contraires; $\vec{F}$ tend donc constamment à ramener le mobile dans la position d'équilibre :

On dit que $\vec{F}$ est une **force de rappel**.

— Le module de cette force de rappel est à chaque instant proportionnel à celui de l'elongation (fig. 3).

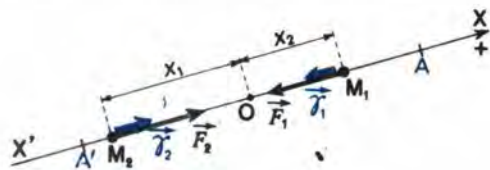


Fig. 3. Le mobile est soumis à une force de rappel proportionnelle à son elongation.

b. — On démontre que, *reciproquement* :

Si un point matériel M, écarté de sa position d'équilibre O, est soumis à une force de rappel ($\vec{F} = -k\vec{OM}$) dont le module est proportionnel à celui de l'elongation, il prend, de part et d'autre de O, un mouvement rectiligne sinusoïdal de direction OM.

D'après ce qui précède, la pulsation de ce mouvement a une valeur ω telle que :

$$m\omega^2 = k, \text{ soit :}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On en déduit la **période** :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

La constante k , égale au quotient $\frac{F}{x}$ des modules de la force de rappel et de l'elongation, s'exprime en *newton par mètre* (N/m).

Remarquons que l'amplitude a du mouvement n'est pas mentionnée : elle ne dépend ni de la force, ni de la masse du mobile. Sous l'action de la *même* force de rappel, le *même* point matériel pourra prendre des mouvements sinusoïdaux de même pulsation mais d'amplitudes différentes; l'exemple traité ci-dessous montre comment l'amplitude dépend des conditions initiales imposées.

3. Le mouvement de translation rectiligne sinusoïdal d'un solide suspendu à un ressort.

a. — L'une des extrémités d'un ressort élastique étant fixée (fig. 4), appliquons à l'autre extrémité une force $\vec{f}$ dirigée suivant l'axe du ressort; le ressort s'allonge jusqu'à ce que la force élastique $\vec{T}$, due à la déformation, équilibre la force $\vec{f}$.

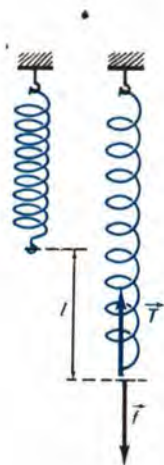


Fig. 4.

L'expérience montre que l'allongement l du ressort est proportionnel à la force appliquée; on a donc algébriquement, sur l'axe du ressort pris comme axe orienté :

$$f = kl; \quad T = -f = -kl$$

La constante positive k est appelée la *raideur* du ressort.

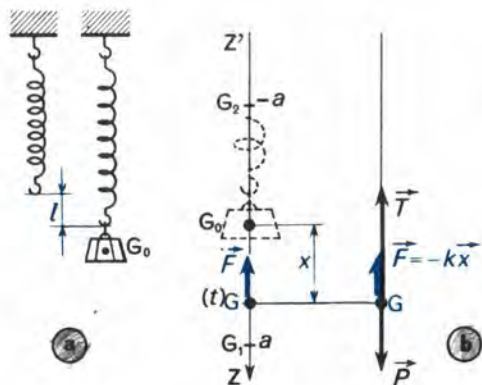


Fig. 5.

b. — Suspendons un solide de masse m à un tel ressort (fig. 5-a) : son poids allonge le ressort de l , tel que $kl = P$, et son centre de gravité prend une position d'équilibre G_0 .

En tirant verticalement, amenons ce centre de gravité en G_1 , à la distance a de G_0 (fig. 5-b), puis lâchons-le : nous constatons qu'il prend, le long de l'axe orienté $Z'Z$ et de part et d'autre de G_0 , un mouvement oscillatoire d'amplitude a .

Supposons qu'à un instant quelconque t il soit en G , d'abscisse $\overline{G_0G} = x$; les forces extérieures qui agissent sur le solide sont :

- Le poids $\vec{P}$;
- La force élastique $\vec{T}$ du ressort allongé, de valeur algébrique :

$$T = -k(l + x)$$

Ces deux forces ayant même support ZZ' , leur résultante $\vec{F}$ est aussi portée par ZZ' ; comme cette droite d'action passe par le centre de gravité G , le mouvement du solide est une **translation rectiligne** de direction ZZ' .

Ce mouvement est en particulier celui du centre de gravité, assimilé à un point matériel de même masse m que le solide et sur lequel s'exercerait la force $\vec{F}$.

Cette force a pour valeur algébrique :

$$F = T + P$$

ou, puisque $P = kl$:

$$F = -k(l + x) + kl; \quad \boxed{F = -kx}$$

C'est une force de *rappel*, de module proportionnel à celui de l'élongation : le mouvement est donc **sinusoidal**, de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et de période :

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

En mesurant avec un chronomètre la durée d'un certain nombre d'oscillations, on peut mesurer la période T et vérifier que :

1° Pour le même ressort et des corps suspendus de masses différentes, la période est proportionnelle à la racine carrée de la masse :

$$\frac{T}{\sqrt{m}} = C^{te}.$$

2° Pour le même corps, suspendu à des ressorts de raideurs différentes, la période varie en raison inverse de la racine carrée de la raideur :

$$T\sqrt{k} = C^{te}.$$

3° Pour le même corps et le même ressort, la période est la même quelle que soit l'amplitude a , égale ici à l'élongation G_0G_1 imposée initialement.

Exemple numérique.

Calculons la période des oscillations d'une masse marquée de 500 g, suspendue à un ressort élastique qui s'allongerait de 10 cm sous l'action d'une force de 1 kgf.

Prenons $g \approx 9,8 \text{ N/kg}$; alors : $1 \text{ kgf} \approx 9,8 \text{ N}$

La raideur du ressort vaut :

$$k = f/l = \frac{9,8}{0,1} = 98 \text{ N/m}$$

D'où :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 6,28 \sqrt{\frac{0,5}{98}} \approx 0,45 \text{ s}$$

B. LE MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

4. L'étude cinématique.

a. — La définition.

On dit qu'un point M est animé d'un *mouvement circulaire* lorsqu'il décrit une *circonférence* (fig. 6). Si le vecteur-vitesse conserve un sens et un module v constants, le mouvement est dit *circulaire uniforme*.

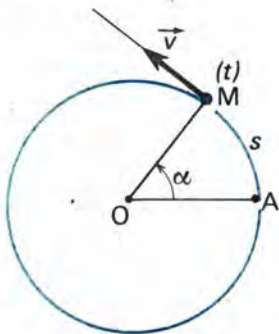


Fig. 6.

b. — La vitesse angulaire.

Prenons comme repère le rayon fixe OA et choisissons comme instant initial $t = 0$ un instant où le vecteur $\vec{OM}$ est confondu avec OA. Nous pouvons caractériser la *position* du mobile à un instant quelconque t ,

— soit par l'*abscisse curviligne* s , représentée par l'arc $\widehat{AM}$:

$$s = vt \quad (1)$$

— soit par l'*angle polaire* (OA, OM); sa valeur α est, en désignant par r le rayon de la trajectoire :

$$\alpha \text{ (radian)} = \frac{\widehat{AM}}{r} = \frac{s}{r} \quad (2)$$

Par définition, on appelle **vitesse angulaire** ω du mouvement circulaire uniforme l'angle balayé par le vecteur $\vec{OM}$ en une seconde :

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

soit, en tenant compte de (2) et de (1) :

$$\omega = \frac{s/r}{t} = \frac{vt/r}{t}$$

On en déduit la relation entre la vitesse

angulaire ω et le module v de la vitesse linéaire :

$$\omega \text{ (rd/s)} = \frac{v}{r} \quad (3)$$

Quand le mouvement circulaire uniforme est rapide, on exprime souvent la vitesse angulaire en fonction du nombre, N , de tours par seconde.

Comme le vecteur $\vec{OM}$ balaie 2π radians par tour, l'angle balayé par seconde — c'est-à-dire la vitesse angulaire — vaut :

$$\omega \text{ (rd/s)} = 2\pi N \quad (4)$$

c. — L'accélération du mouvement circulaire uniforme.

En tout point M d'une trajectoire curviligne le **vecteur-accélération** $\vec{\gamma}$ du mobile à l'instant t peut s'obtenir géométriquement à partir de ses composantes *tangentielle* (γ_t) et *normale* (γ_N) (p. 16) :

La valeur algébrique de la composante *tangentielle* est la dérivée par rapport au temps de la valeur algébrique de la vitesse :

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt}$$

La valeur de la composante *normale* est liée à v et au rayon de courbure (qui est ici le rayon r de la trajectoire circulaire) par la relation :

$$\gamma_N = \frac{v^2}{r}$$

Si le mouvement circulaire est *uniforme*, la valeur algébrique de la vitesse est constante et sa dérivée $\frac{dv}{dt} = \gamma_t$ est nulle, de sorte que l'accélération $\vec{\gamma}$ se confond à chaque instant avec sa

composante γ_N , normale à la trajectoire; ainsi :

Dans un mouvement circulaire uniforme l'accélération en tout point de la trajectoire est un vecteur toujours dirigé vers le centre (fig. 7-a) et de module constant, égal à :

$$\gamma = v^2/r = \omega^2 r \quad (5)$$

On dit que cette accélération est *centripète*.

5. L'étude dynamique ; la force centripète.

a. — Considérons un point matériel, de masse m , en mouvement circulaire uniforme sur une trajectoire de rayon r .

Il résulte de la relation fondamentale de la Dynamique, $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, que la résultante $\vec{F}$ des forces qui s'exercent sur le mobile est à chaque instant une **force centripète** (fig. 7-b) dont l'intensité, *constante*, a pour expression :

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad (6)$$

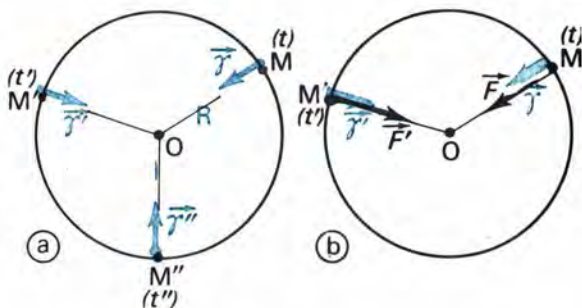


Fig. 7.

On voit que l'intensité de cette force centripète est proportionnelle au rayon de la trajectoire et au *carré* de la vitesse angulaire.

b. — Expérience : la mise en évidence de la force centripète.

Un solide S est assujéti à glisser (sans frottement appréciable) le long d'une tige horizontale OT que l'on peut faire tourner autour de l'axe vertical $Z'OZ$ (fig. 8-a).

Si le système ne tourne pas, S est immobile, son poids $\vec{P}$ étant équilibré par la réaction $\vec{R}$ de la tige; dès qu'il tourne, le solide S glisse le long de la tige en s'éloignant de l'axe de rotation, preuve que son centre de gravité G ne peut prendre un mouvement circulaire uniforme que s'il est soumis à une force dirigée de G vers O , donc *centripète*.

Lions le solide S au point fixe O au moyen d'un ressort (fig. 8-b); lorsque le système entre en rotation, on voit la longueur du ressort augmenter rapidement, puis se fixer à une

certaine valeur l dès que la vitesse angulaire prend elle-même une valeur constante ω . Si l'on fait varier ω , la longueur l du ressort varie dans le même sens.

Ces observations s'accordent avec les conclusions de l'étude dynamique du mouvement circulaire uniforme :

Pour décrire la circonférence de centre O et de rayon $OG = l$, le centre de gravité G — qui se comporte comme un point matériel de masse m égale à la masse du solide — doit être

soumis à une **force centripète** $\vec{F}$ (fig. 8-c) dont l'intensité,

$$F = m\omega^2 l,$$

croît comme le carré de la vitesse angulaire.

Cette force centripète est ici la **force élastique** que le ressort exerce sur S du fait de son allongement. Comme l'intensité de cette force est proportionnelle à l'allongement, on comprend que le ressort doive s'allonger plus ou moins selon que la rotation est plus ou moins rapide.

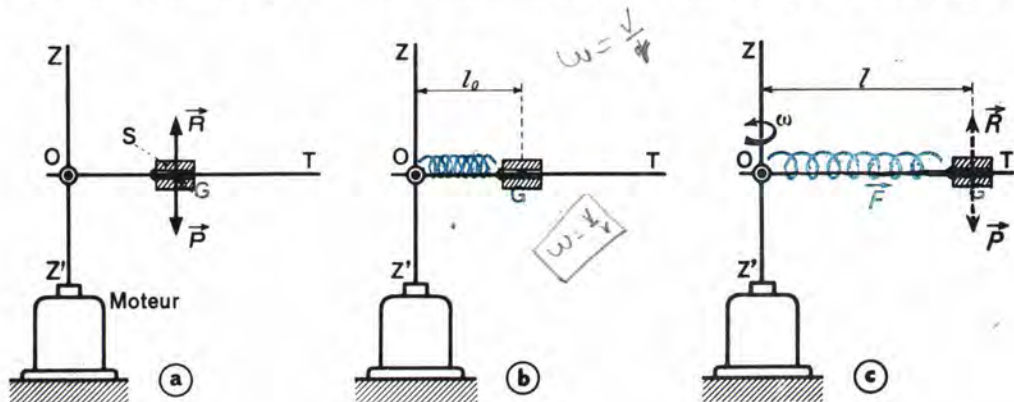


Fig 8

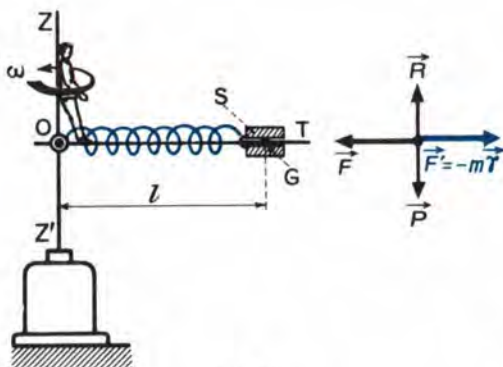


Fig. 9.

6. La notion de force d'inertie centrifuge.

a. — Imaginons qu'un observateur, entraîné par le système, tourne uniformément avec lui (fig. 9). Cet observateur, voyant le solide S immobile par rapport à lui, peut considérer que le centre de gravité G de ce solide est un point matériel **en équilibre** sous l'action des forces extérieures $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F}$ et de la **force d'inertie** $\vec{F}'$. La condition de cet équilibre s'écrit (fig. 9) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}' = 0.$$

La réaction $\vec{R}$ de la tige étant opposée au poids $\vec{P}$ du solide, la somme géométrique précédente se réduit à :

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0; \text{ d'où l'on tire : } \vec{F} = -\vec{F}' \quad (7)$$

$\vec{F}$ est la force élastique que le ressort exerce sur le solide S lorsqu'il est en mouvement circulaire uniforme;

$\vec{F}'$ est la force d'inertie, d'expression : $\vec{F}' = -m\vec{\gamma}$. Elle est portée par le rayon OG, comme l'accélération $\vec{\gamma}$ du mouvement circulaire uniforme, mais, contrairement à $\vec{\gamma}$, elle est **dirigée du centre vers l'extérieur de la trajectoire**; pour cette raison, on l'appelle la **force d'inertie centrifuge**.

Le module de l'accélération étant $\gamma = \omega^2 l$ (§ 4-c), celui de la force d'inertie centrifuge $\vec{F}'$ est $m\omega^2 l$; c'est aussi le module de la force élastique du ressort puisque, d'après (7), $\vec{F}$ est opposée à $\vec{F}'$. Cette seconde façon de raisonner nous conduit donc à une expression de la force élastique du ressort :

$$F = m\omega^2 l,$$

identique à celle que nous avons trouvée au paragraphe précédent en appliquant directement la formule fondamentale de la Dynamique au mouvement circulaire uniforme du point G.

b. — Ainsi, comme le mouvement rectiligne (p. 42), le mouvement circulaire uniforme d'un point matériel peut être étudié de deux façons :

1° On rapporte le mouvement à un repère lié à la Terre et l'on applique la relation fondamentale de la Dynamique en écrivant que la résultante des forces qui s'exercent sur le point matériel est une **force centripète** $\vec{F}$, d'intensité :

$$F = m\gamma = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

2° On prend pour repère un **observateur tournant avec le point matériel** et l'on ramène le problème de Dynamique à un problème de Statique en considérant que ce point est **en équilibre** sous l'action de l'ensemble des forces qui s'exercent sur lui et de la **force d'inertie centrifuge** $\vec{F}'$ dont l'intensité a aussi pour expressions :

$$F' = m\gamma = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

7. Le pendule conique et le régulateur à boules.

La figure 10 représente un dispositif connu sous le nom de **pendule conique**. Si l'on fait



Fig. 10. — Le pendule conique.

Une petite sphère métallique est suspendue par un fil inextensible et de masse négligeable à une tige verticale qu'un moteur peut faire tourner autour de son axe.

démarrer très lentement le moteur, on observe que :

— pour une vitesse angulaire ω supérieure à une certaine valeur ω_0 le pendule s'écarte de la tige;

— l'angle d'écart α croît avec la vitesse angulaire ω et reste constant quand ω conserve elle-même une valeur constante. Le fil engendre alors un cône de révolution, d'axe vertical AZ (fig. 11-a), et le centre de gravité de la boule décrit un cercle horizontal de centre O et de rayon :

$$r = l \sin \alpha.$$

Recherchons la relation entre l'angle d'écart α et la vitesse angulaire ω en appliquant la relation fondamentale de la Dynamique au mouvement circulaire uniforme de ce centre de gravité, considéré comme un point matériel G, de même masse m que le pendule.

Si l'on néglige la résistance de l'air, les forces extérieures qui s'appliquent en G sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ du pendule et la tension $\vec{T}$ du fil; leur résultante :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T},$$

est une **force centripète** d'intensité :

$$F = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin \alpha.$$

Le parallélogramme construit sur les vecteurs figurant les forces donne (fig. 11-b) :

1° Dans le triangle rectangle inférieur :

$$\tan \alpha = \frac{F}{P} = \frac{m\omega^2 l \sin \alpha}{mg} = \frac{\omega^2 l \sin \alpha}{g}.$$

D'où l'on tire :

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Ainsi, l'angle d'écart α augmente rapidement avec la vitesse angulaire; il est, d'autre part, indépendant de la masse du pendule.

En remarquant qu'un cosinus est inférieur ou au plus égal à l'unité, on a :

$$\frac{g}{\omega^2 l} \leq 1, \text{ ou } \omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}}$$

On trouve ainsi la valeur limite, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, que la vitesse angulaire doit dépasser pour que le pendule s'écarte de la tige.

Fig. 12. — Le schéma d'un régulateur à boules. Si la vitesse de rotation augmente, l'angle α croît et le collier C est soulevé; c'est le déplacement vertical de ce collier qui commande le dispositif de régulation du moteur.

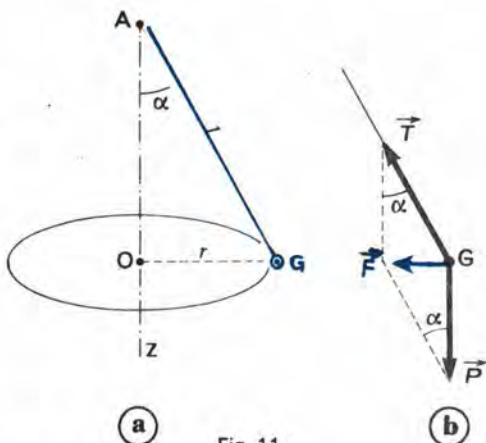


Fig 11.

2° Dans le triangle rectangle supérieur :

$$T \cos \alpha = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{mg}{g/\omega^2 l}; \quad T = m\omega^2 l$$

La tension du fil croît comme le carré de la vitesse angulaire.

Application numérique.

Soit un pendule de longueur $l = 1$ m et de masse $m = 100$ g; prenons $g \approx 9,8$ N/kg.

Le pendule s'écarte de la tige dès que la vitesse angulaire dépasse la valeur limite :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{9,8} \approx 3,13 \text{ rd/s}$$

$$\text{soit : } N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx \frac{3,13}{6,28} \approx 0,5 \text{ tour/s}$$

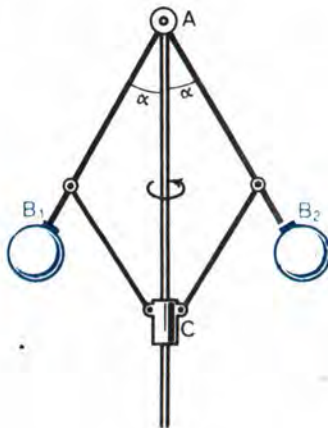
Pour $N = 1$ tour par seconde :

$$\omega = 2\pi N = 2\pi \text{ rd/s}$$

$$\cos \alpha = \frac{9,8}{4\pi^2 \times 1} \approx 0,248; \quad \alpha \approx 75^\circ \frac{2}{3}$$

$T \approx 0,1 \times 4\pi^2 \times 1 \approx 3,95$ N; la tension du fil est environ 4 fois plus grande que le poids de la boule (0,98 N).

L'expérience du pendule conique fait comprendre le fonctionnement du **régulateur à boules** (fig. 12), employé pour maintenir prati-



quement constante la vitesse de rotation de certains moteurs, en particulier des moteurs électriques de nombreux tourne-disques.

8. Le cas d'un mouvement rapide ; le principe de la fronde.

a. — Pour une vitesse de rotation de l'ordre de 5 à 10 tours par seconde, l'angle d'écart α du pendule conique est déjà très voisin de 90° . Le centre de gravité G tourne alors, pratiquement, dans le plan horizontal du point A en décrivant un cercle de rayon l .

D'autre part, le cosinus de l'angle α devenant très faible, la tension du fil prend des valeurs $\left(T = \frac{P}{\cos \alpha}\right)$ si grandes, par rapport à l'intensité P du poids de la boule, que celui-ci peut être négligé : **la force centripète $\vec{F}$ est alors pratiquement confondue avec la tension $\vec{T}$ du fil.**

b. — Lorsque la rapidité de la rotation rend ainsi le poids négligeable devant la tension du fil, on peut, en inclinant l'axe de rotation, obtenir un mouvement circulaire *pratiquement uniforme* de la boule dans un plan d'orientation *quelconque*. L'expérience illustre alors le principe de la **fronde**, constituée par un solide retenu par une double corde, que l'on fait tourner rapidement dans un plan vertical (fig. 13).

Si la corde est lâchée à un instant quelconque t , le solide part suivant la tangente, avec une vitesse $\vec{v}$ égale à la vitesse du mouvement circulaire à cet instant. N'étant plus soumis qu'à

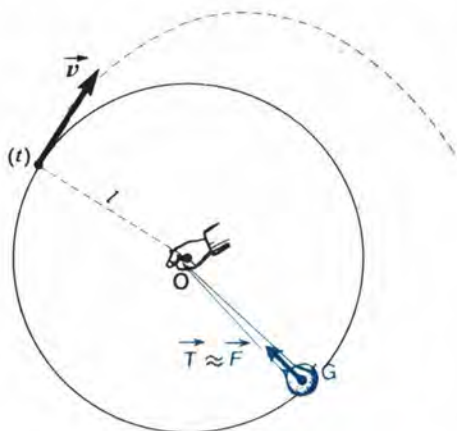


Fig. 13. — La fronde.

son poids, le solide prend, à partir de l'instant t , un mouvement qui, dans le vide, serait une chute parabolique de vitesse initiale $\vec{v}$.

c. — Remarque : risque de rupture des corps en rotation rapide.

Le module $T \approx m\omega^2 l$ de la force de tension $\vec{T}$ que la corde exerce sur le solide d'une fronde en rotation rapide croît comme le carré de la vitesse angulaire. Si cette vitesse angulaire excède une certaine valeur, variable avec le diamètre et la ténacité de la corde, celle-ci, trop tendue, se rompt.

Tout solide tournant rapidement autour d'un axe — une meule, une hélice ou un rotor de machine, par exemple — risque aussi de se briser lorsque la vitesse de rotation devient trop grande. Le solide subit alors un véritable éclatement et des fragments périphériques sont violemment projetés suivant des tangentes aux trajectoires qu'ils décrivaient à l'instant de la rupture.

9. Le principe de la centrifugation.

Considérons une centrifugeuse de laboratoire permettant de rassembler des gouttelettes grasses ou des particules solides *en suspension* dans un liquide et, ce faisant, de les séparer de ce liquide.

Soit M l'une de ces particules ; désignons par V son volume, par ρ sa masse volumique et par ρ' celle du liquide.

1^o Dans la centrifugeuse *au repos* (fig. 14-a), cette particule est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$, opposée au poids du liquide déplacé. La résultante $\vec{F}$ de ces deux forces verticales et de sens contraires a pour intensité :

$$F = P - \pi = V\rho g - V\rho'g = V(\rho - \rho')g \quad (1)$$

$\vec{F}$ fait descendre ou monter la particule selon que ρ est supérieure ou inférieure à ρ' .

2^o Dans la centrifugeuse *en rotation*, un observateur que nous supposons tournant avec elle doit admettre qu'une *force d'inertie centrifuge* $\vec{f}' = -m\vec{\gamma}$ s'ajoute vectoriellement au poids $\vec{P} = m\vec{g}$ de tout élément matériel, solide ou liquide, de masse m .

La rotation étant *très rapide*, la force centrifuge est si grande, comparée au poids, qu'elle joue pratiquement seule le rôle joué par le



Fig. 14. — Le principe des centrifugeuses.

(Dans ce cas de figure, la particule envisagée est plus dense que le liquide.)

poids dans la centrifugeuse au repos; tout se passe donc comme si le vecteur $\vec{g}$ de la pesanteur était remplacé par le vecteur $-\vec{\gamma}$, de module $\omega^2 R$.

Il s'ensuit que, pour l'observateur tournant, la particule M immergée dans le liquide est soumise à une force résultante $\vec{F}'$ (fig. 14-b) :

— d'intensité $F' = V(\rho - \rho') \omega^2 R$ (2);

— dirigée suivant le rayon tournant AX;
— et de sens *axifuge* ou *axipète* selon que ρ est supérieure ou inférieure à ρ' .

Avec des vitesses de rotation de l'ordre de 3 000 tours/mn (soit 50 tours/s), l'intensité de F' (donnée par 2) peut valoir 2 000 fois celle de F (donnée par 1); la séparation de particules très fines, qui pourrait demander deux jours dans un vase au repos, s'effectue en moins de deux minutes dans la centrifugeuse.

EXERCICES

I. EXERCICES RÉSOLUS

1. L'inclinaison d'un cycliste dans un virage.

Supposons que, dans un virage, le centre de gravité G du système formé par un cycliste et sa machine décrive un arc de cercle horizontal de rayon r , avec une vitesse linéaire de valeur constante v .

Appliquons la relation fondamentale de la Dynamique au mouvement circulaire uniforme de ce centre de gravité, considéré comme un point matériel G de même masse m que le système.

Les forces extérieures transportées en G sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ du système et la réaction $\vec{R}$, située dans le plan de symétrie GA (fig. 15-a) et provenant des réactions exercées par le sol sur les pneus; puisque le mouvement de G est circulaire et uniforme, leur résultante

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$$

est une **force centripète**, d'intensité :

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

Comme $\vec{P}$ est une force verticale et que la force centripète $\vec{F}$ est dans le plan horizontal de la trajectoire, le parallélogramme des forces montre que la réaction $\vec{R}$ est nécessairement inclinée; **pour virer, le cycliste doit donc incliner son plan de symétrie GA vers la concavité du virage, d'un angle α tel que :**

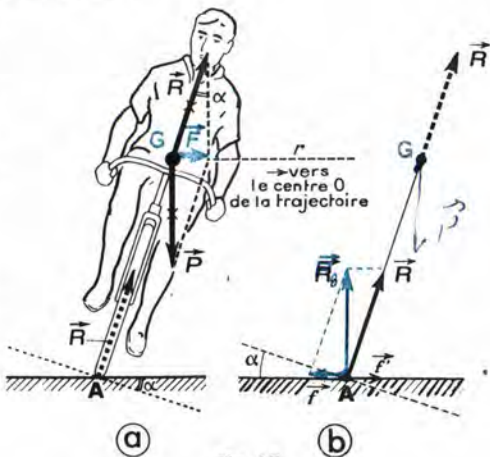


Fig. 15.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{P} = \frac{mv^2/r}{mg}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{rg}$$

L'inclinaison dépend de la vitesse et du rayon de la trajectoire; plus le cycliste va vite et vire court, plus il doit s'incliner. Par contre, l'inclinaison est indépendante de la masse du système.

Par exemple, si $v = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$ et $r = 10 \text{ m}$, il faut que :

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{25}{10 \times 9,8} \approx 0,26$$

ce qui correspond à une inclinaison :

$$\alpha \approx 14^\circ 1/2$$

Remarque. — Sur un sol parfaitement lisse, la résultante des réactions qui s'exercent sur les pneus

est une réaction R_0 normale au sol (fig. 15-b); elle se décompose en une réaction oblique $\vec{R}$ (que nous avons précédemment transportée en G) et en une force $\vec{f}$ qui fait déraiper la machine; le virage ne serait donc possible que si le sol lisse faisait lui-même un angle α avec le plan horizontal, car $\vec{R}$ se confondrait alors avec R_0 et $\vec{f}$ serait nulle.

En fait, le sol est toujours plus ou moins rugueux et la composante $\vec{f}$ est équilibrée par une **force de frottement** $\vec{f}$. Cependant, l'inclinaison de la machine est limitée, car l'intensité de cette force de frottement ne peut dépasser une certaine valeur, variable avec l'état du sol et celui des pneus; aussi diminue-t-on les risques de dérapage en inclinant de l'extérieur vers l'intérieur les parties courbes des pistes de vélodromes.

Tout ceci est applicable au mouvement du centre de gravité d'une automobile ou d'un train qui opèrent un virage circulaire à vitesse de module constant; c'est pourquoi les pistes des autodromes, les routes en lacets et les voies ferrées ont aussi leur bord extérieur relevé dans les parties courbes.

L'« étoile filante », de la régie Renault, dans un virage relevé de l'autodrome de Monthléry.

Photo Keystone.

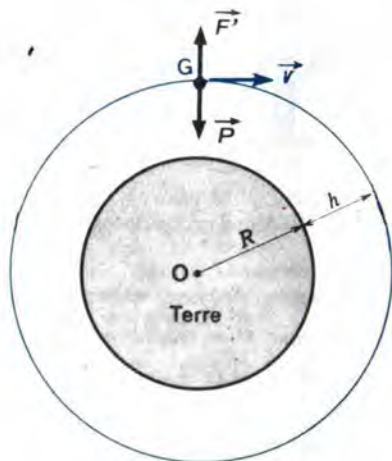


Fig. 16.

2. L'équilibre relatif d'un satellite sur une orbite circulaire.

On considère un satellite artificiel tournant autour de la Terre à une altitude constante h . En admettant que la Terre est une sphère de rayon R , on demande la nature du mouvement du centre de gravité G du satellite, sa vitesse linéaire et la durée d'un tour.

La Terre étant supposée sphérique, la trajectoire de G est une circonférence de centre O (fig. 16).

Ramenons le problème de Dynamique à un problème de Statique en prenant comme repère un observateur que nous supposons dans le satellite. Pour cet observateur, le centre de gravité se comporte comme un point matériel G, de même masse m que le satellite, en équilibre sous l'action du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et de la force d'inertie $\vec{F}' = -m\vec{\gamma}$ (1); la condition de cet équilibre relatif s'écrit :

$$\vec{F}' + \vec{P} = 0; \quad \vec{F}' = -\vec{P} \quad (1)$$

La force d'inertie $\vec{F}' = -m\vec{\gamma}$, opposée au poids $\vec{P}$, est donc **centrifuge** (fig. 16); par suite :

1° L'accélération $\vec{\gamma}$ est centripète; le mouvement de G est circulaire uniforme;

2° La force d'inertie étant centrifuge, son module a pour expression, en fonction du module constant v de la vitesse linéaire :

$$F' = \frac{mv^2}{R+h}$$

Or, d'après (1), ce module F' est égal au module P du poids :

$$\frac{mv^2}{R+h} = mg; \quad v^2 = g(R+h)$$

(1) En admettant que l'altitude h soit suffisante pour que la résistance de l'air γ soit pratiquement nulle.



La capsule Gemini VII tournant autour de la Terre.

Photo Keystone.

D'autre part, la valeur g de l'intensité de la pesanteur à l'altitude h se déduit de sa valeur g_0 au niveau du sol par la relation (p. 38) :

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}; \quad g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

On a donc :

$$v^2 = \frac{g_0 R^2}{R+h};$$

$$v = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$$

R et g_0 étant des constantes, on voit que la vitesse varie en sens contraire de l'altitude ; elle est indépendante de la masse du satellite.

3° La durée d'un tour a pour expression, en fonction de la vitesse angulaire ω du mouvement circulaire uniforme :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Or :

$$\omega = \frac{v}{R+h}$$

Par suite :

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi(R+h)\sqrt{R+h}}{R\sqrt{g_0}}$$

T varie donc dans le même sens que l'altitude.

Remarque. — Par rapport à un repère lié à une capsule spatiale satellisée, le poids de chaque cosmonaute (et aussi le poids de chacun des objets de la capsule) est équilibré par une force d'inertie centrifuge ; il en résulte que, pour les cosmonautes, la pesanteur apparente est nulle : c'est ce qu'on appelle l'état d'*apesanteur*.

Exemples :

— Si l'altitude h du satellite est comprise entre 200 et 300 km, les relations précédentes donnent v de l'ordre de 28 000 km/h et T de l'ordre de 90 minutes (1 h 1/2).

— Dans le cas d'un satellite « Syncom » tournant autour de l'axe des pôles et qui paraît immobile parce que sa vitesse angulaire a même valeur et même signe que celle de la Terre, l'altitude h est voisine de 36 000 km et la vitesse v de l'ordre de 11 000 km/h.

II. EXERCICES PROPOSÉS

1. Un point matériel de masse $m = 10$ g est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude $a = 24$ cm et de période $T = 4$ s. L'instant $t = 0$ étant un instant d'élongation maximale (positive) calculer :

1° L'élongation, l'accélération et la force de rappel à la date $t = 0,5$ s ;

2° La date du premier passage à l'abscisse $x = -12$ cm et la vitesse à cet instant.

Rép. : 1° 0,17 m ; — 0,42 m/s² ; 0,0042 N.
2° 1,33 s ; — 0,327 m/s.

2. Un ressort élastique s'allonge de 0,1 mm quand il est soumis à une traction de 0,01 N. 1° On y sus-

pend une masse de 1 kg que l'on laisse osciller verticalement; calculer la période des oscillations. 2° Quelle serait, avec le même ressort, la masse dont les oscillations auraient une période de 1 seconde? 3° Donner une expression de la période en fonction de l'allongement l consécutif à la suspension du corps de masse m . ($g \approx 10$ u. Sl)

3. Un ressort élastique, dont on négligera la masse, a 20 cm de longueur et s'allonge de 1 mm par gramme-force. On y suspend une bille de 10 g et on fixe l'extrémité supérieure au point A d'un axe vertical AZ autour duquel on fait tourner l'ensemble. Sachant que l'axe du ressort décrit un cône de demi-angle au sommet égal à 60° , calculer la longueur du ressort et le nombre de tours par seconde ($g \approx 10$ u. Sl).

Rép. : 22 cm ; environ 1,5 tr/s.

4. Les tiges qui supportent les boules d'un régulateur à boules ont une longueur de 25 cm; calculer l'angle qu'elles font avec la verticale quand la vitesse de rotation est : 1° 1,41 tr/s; 2° 1,19 tr/s. ($g \approx 10$ u. Sl).

5. Quelle est la vitesse d'un cycliste (supposée constante) qui, pour décrire une circonférence de rayon $r = 15$ m, doit incliner le plan de symétrie de sa machine de 10° par rapport à la verticale?

Rép. : 18 km/h.

6. Une voie de chemin de fer présente une courbe assimilable à un arc de circonférence de 600 m de rayon. Quel doit être le relèvement (appelé *dévers*) de la voie pour que les réactions des rails soient normales aux bandages des roues quand la vitesse des trains est 72 km/h (la distance des rails est 1,5 m, d'axe en axe; $g \approx 10$ u. Sl).

7. Une hélice de 2 m de diamètre tourne à raison de 1 500 tr/mn; quel est le rapport entre la force centrifuge et le poids pour un élément d'hélice placé près d'une extrémité? ($g \approx 10$ u. Sl).

Rép. : Environ 2 500 fois.

8. Une fronde, longue de 1 m, porte une pierre et tourne à raison de 4 tr/s dans un plan vertical (fig. 13). 1° Calculer le rapport de la tension du fil au poids de la pierre; 2° La pierre est lâchée à un instant où son vecteur-vitesse fait 45° avec le plan horizontal (vers le haut); calculer la portée (en négligeant la résistance de l'air) ($g \approx 10$ u. Sl).

9. Sur une tige OX, horizontale, assujettie à tourner autour d'un axe vertical passant par O, peuvent coulisser sans frottement deux masses identiques A et B de valeur $m = 100$ g; A est reliée à O par un ressort de masse négligeable et de longueur initiale $l_0 = 14,2$ cm; B est reliée à A par un ressort identique au précédent.

Sachant que ces ressorts s'allongent de 1 mm pour 10 grammes-force, calculer les longueurs des ressorts quand la vitesse de rotation de la tige est $5/\pi$ tr/s. ($g \approx 10$ u. Sl).

Rép. : OA = 0,2 m ; AB = 0,18 m.

10. 1° Un cycliste roule à la vitesse v sur une route. Il aborde un virage horizontal de rayon r . Exprimer la force centripète à laquelle il est soumis.

On assimilera l'ensemble cycliste et machine à un point matériel de masse M situé au centre de gravité G.

2° M vaut 100 kg et $r = 10$ m est le rayon moyen de la route, qui a pour largeur $l = 5$ m. A quelle vitesse maximale le cycliste peut-il prendre son virage sans dérapier si les frottements entre le sol et les roues peuvent exercer une force, tangente au sol, d'intensité $\varphi = 200$ N?

Que deviendrait cette vitesse maximale si la pluie rendait le sol plus glissant?

3° On peut relever le virage pour qu'un cycliste roulant au milieu de la route à 11,4 km à l'heure ne risque pas de dérapier même si le sol est parfaitement glissant. Si la force de frottement due au sol rugueux a la même valeur qu'à la deuxième question, entre quelles limites de vitesse le cycliste peut-il prendre son virage sur cette route sans risquer de dérapier? Sur quelles parties de la route ces vitesses sont-elles possibles?

On prendra $g = 10$ u. Sl. On désignera la pente du virage (dévers) par $\tan \alpha$ et l'on confondra $\tan \alpha$ et $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ et 1.

(Bacc.).

11. Un ressort suspendu verticalement mesure, à vide, 25 cm. On mesure son allongement lorsqu'il est chargé et l'on constate que cet allongement est proportionnel à la charge et correspond à 5 mm pour 20 g.

1° On le charge de 100 g, on le tire verticalement vers le bas, et on l'abandonne à lui-même. Quel est le mouvement pris par la masse? Quelle est sa période? Dépend-elle de l'amplitude?

2° Le ressort, chargé de 50 g, est placé dans un véhicule entraîné horizontalement par une force constante: il s'écarte de la verticale d'un angle de 15° . Montrer que l'on peut ainsi calculer l'accélération du mouvement et en déduire la longueur du ressort.

3° Le ressort est enfilé sur une tige horizontale et l'on y fixe une des extrémités O. A l'autre extrémité mobile, on attache une masse inconnue, mobile également sur la tige, et l'on fait tourner le tout autour d'un axe vertical passant par O à raison de 120 tours à la minute. Quelle est la valeur de la masse mobile si le ressort mesure alors 32 cm?

4° Que devient la longueur du ressort si la vitesse de rotation devient 180 tours à la minute?

5° Le ressort chargé de 50 g est lancé de telle sorte qu'il décrive un cône de révolution d'axe vertical et de demi-angle au sommet égal à 30° . Quelle est alors la longueur du ressort et quelle est la période du mouvement?

$g = 9,8$ u. Sl.

(Bacc.).

Rép. : 1° 0,32 s ; non ; 2° 2,63 m/s² ; 0,263 m ; 3° 0,0541 kg ; 4° 0,492 m ; 5° 0,265 m ; 0,97 s.

12. 1° On veut lancer un satellite effectuant un tour complet d'une orbite circulaire autour de la Terre en 24 heures. On rappelle la loi donnant la valeur de l'intensité de la pesanteur $g(z)$ à l'altitude z en fonction de celle, $g_0 = 9,80 \text{ u. SI}$, au sol : $g(z) = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$, où R est le rayon terrestre ($R = 6\,400 \text{ km}$).

Déterminer l'altitude, z , à laquelle il devra se maintenir.

En déduire la valeur de g à cette altitude, puis la vitesse v du satellite sur sa trajectoire.

2° Avant le départ ($z = 0$), un observateur, dans la cabine, dispose d'un ressort auquel est attaché un point matériel de masse m , qui lui communique un allongement $l = 20 \text{ cm}$. Calculer la période des oscillations de la masse m quand celle-ci a été écartée selon la verticale, de sa position d'équilibre.

3° Durant la première phase du mouvement d'ascension verticale accélérée, l'accélération est $\gamma = \frac{g}{5}$; on demande de calculer l'allongement du pendule élastique à l'équilibre et la période de ses oscillations.

4° Lorsque le satellite décrit son orbite circulaire, on demande l'allongement du ressort et la période du pendule élastique. (Partie de probl. du Bacc.)

13. La loi de l'attraction universelle, appliquée à deux corps de masses m_1 et m_2 dont les centres sont à la distance d , s'écrit :

$$F = \epsilon \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

ϵ étant une constante égale à $6,67 \times 10^{-11} \text{ u. SI}$.

A. a) Exprimer l'accélération g_0 de la pesanteur au niveau du sol en fonction de ϵ , du rayon R de la Terre et de la masse M de la Terre, en supposant celle-ci concentrée en son centre.

b) Sachant que $R = 6\,400 \text{ km}$, calculer M . (On donne $g_0 = 9,8 \text{ u. SI}$).

B. a) Exprimer, en fonction de g_0 , R et z , l'intensité g de la pesanteur à une altitude z quelconque.

b) Montrer que, si z est petit devant R , g est une fonction linéaire de z .

c) Dans ce dernier cas, calculer l'erreur relative que l'on commet en prenant $g = g_0$ à $3\,200 \text{ m}$ d'altitude.

C. Un satellite artificiel évolue à très haute altitude, où la valeur de g est celle trouvée au a) de la question B, en décrivant un cercle concentrique à la Terre.

a) Calculer sa vitesse en fonction de g_0 , R et z .

b) Quelle est cette vitesse si $z = 36\,000 \text{ km}$?

c) Quelle est alors la durée d'une révolution? L'exprimer en secondes et en heures.

d) Quelles réflexions vous inspire ce dernier résultat, lorsque l'orbite est dans le plan équatorial? (Bacc.)

Rép. : A-a) $g_0 = \epsilon \frac{M}{R^2}$; b) $M \approx 6 \times 10^{24} \text{ kg}$.

B-a) $g = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+z)^2}$; b) $g \approx g_0 \left(1 - \frac{2z}{R}\right)$; c) $\frac{\Delta g}{g} \approx 10^{-3}$

C-a) $v = R \sqrt{\frac{g_0}{R+z}}$; b) $v \approx 3,08 \text{ km/s}$; c) $86\,600 \text{ s} \approx 24 \text{ h}$

LECTURE

Les effets de l'inertie pour les corps en rotation.

Un observateur, lié à un élément matériel animé d'un mouvement circulaire uniforme, écrit que cet élément matériel est en équilibre relatif par rapport à lui en ajoutant vectoriellement une force d'inertie centrifuge

$$\vec{F}' = -m\vec{\gamma}$$

aux forces qui s'exercent sur l'élément matériel. Comme

le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ figure toujours parmi celles-ci, la force

$$\vec{P}' = \vec{P} + \vec{F}' = m(\vec{g} - \vec{\gamma})$$

joue dans cet équilibre relatif le rôle que joue le poids seul dans l'équilibre par rapport à la Terre. On peut

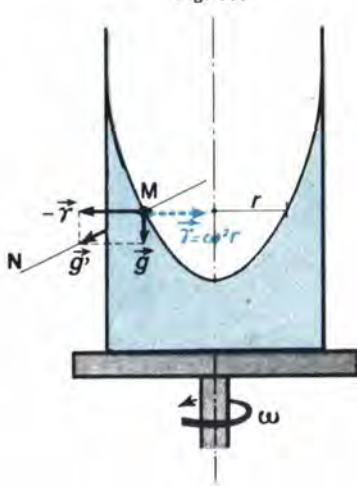
dire que, pour l'observateur tournant, la force $\vec{P}'$ est le de l'élément matériel (1).

Ce raisonnement permet d'interpréter simplement diverses expériences qui illustrent les effets de l'inertie des corps en rotation.

(1) Nous sommes arrivés à la même conclusion à propos de l'équilibre relatif d'un élément matériel animé d'un mouvement rectiligne (p. 48).

a. — Par exemple, si l'on fait tourner un vase cylindrique autour de son axe de révolution vertical (fig. 17), la surface libre du liquide qu'il contient se creuse et

Fig. 17.



prend la forme d'un *paraboloïde de révolution* parce qu'en tout point M d'une telle surface, la direction de la normale MN est celle du vecteur champ de pesanteur apparente :

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\gamma}$$

On a construit aux États-Unis un dispositif comprenant essentiellement un vaste plancher en forme de paraboloïde pouvant tourner autour de son axe de révolution vertical (fig. 18).

Dès que la vitesse de rotation atteint une valeur convenable, un observateur qui occupe une position quelconque sur le plancher a l'impression d'être sur un plan horizontal parce que la direction de son poids apparent $\vec{P}'$ est alors normale au plancher (fig. 18).

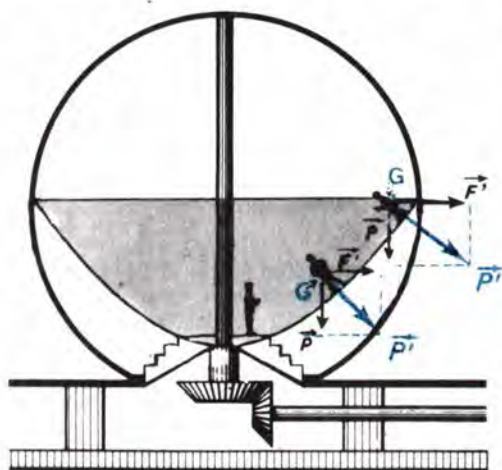


Fig. 18.

b. — Si la vitesse de rotation augmente et prend une valeur telle que la force d'inertie centrifuge soit très grande comparée au poids, le poids apparent est pratiquement confondu avec la force d'inertie centrifuge.

Dans ce cas, la surface libre du liquide devient cylindrique et verticale (fig. 19). Un observateur entraîné sur une paroi cylindrique a l'impression d'être plaqué sur un plan horizontal (fig. 20); de même, un motocycliste qui suit une piste circulaire sur une paroi très inclinée a l'impression de rouler sur un plan horizontal (fig. 21).

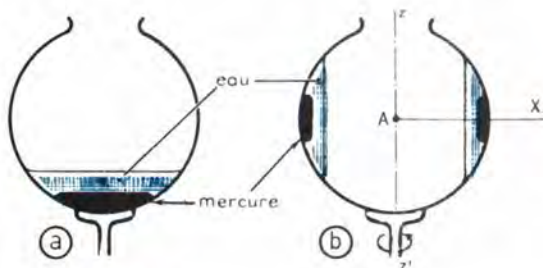


Fig. 19. — *Rotation rapide de liquides.*

a) L'équilibre hydrostatique dans l'ampoule immobile.

b) L'équilibre relatif dans l'ampoule en rotation autour de l'axe ZZ'.



Fig. 20. — « La roue du mystère ».

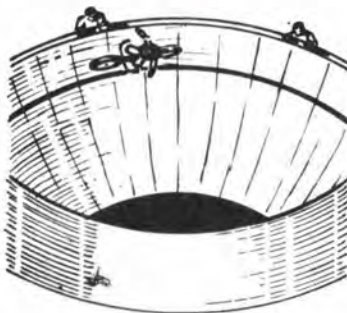


Fig. 21. — « Le mur de la mort ».

LA ROTATION D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE LA NOTION DE MOMENT D'INERTIE

A. LA RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE EN ROTATION

Le cylindre d'un treuil, le « rotor » d'un moteur (formé par l'arbre du moteur et toutes les pièces solidaires de cet arbre), le balancier d'une horloge, le cadre d'un galvanomètre, le plateau d'un tourne-disques, sont des exemples de solides assujettis à *tourner autour d'un axe*.

On démontre (cours de Seconde) qu'un **solide mobile autour d'un axe est en équilibre lorsque la somme algébrique des moments par rapport à l'axe de toutes les forces qui lui sont appliquées est nulle** ⁽¹⁾. Si cette somme n'est pas nulle, le solide tourne autour de l'axe

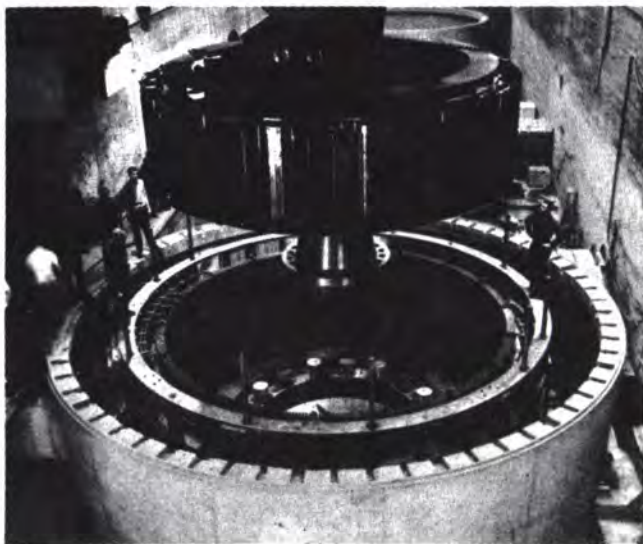
de plus en plus vite ou de plus en plus lentement selon le signe de la somme algébrique des moments; on dit alors qu'il est animé d'un mouvement de **rotation** varié.

⁽¹⁾ Rappelons que le moment d'une force, par rapport à un axe **orthogonal** à la direction de la force, est égal au produit de la distance de l'axe à la droite d'action de la force par l'intensité de celle-ci ($M = d.F$).

Par rapport à un axe qui n'est pas orthogonal à la force, le moment se calcule en remplaçant la force par sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe.

Un sens positif de rotation étant choisi, le moment est positif si la force tend à faire tourner le solide dans le sens positif, **négatif** dans le cas contraire.

Le rotor d'un alternateur de la centrale hydro-électrique de Curbans.
Photo C.® Electro mécanique.



Dans l'étude de la rotation d'un solide, on utilise une relation générale que nous allons établir en appliquant la relation fondamentale de la Dynamique à chacun des éléments matériels du solide.

1. L'application de la relation fondamentale de la Dynamique au mouvement de rotation d'un point matériel.

a. — L'équation horaire du mouvement.

Supposons que la petite sphère M, rigide-ment liée à l'axe de rotation ZZ', représente le point matériel considéré (fig. 1). En tournant autour de l'axe ZZ', le point M décrit une circonférence dont le centre O est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur ZZ' et dont le rayon est OM = r; le plan de cette circonférence est évidemment perpendiculaire à l'axe de rotation.

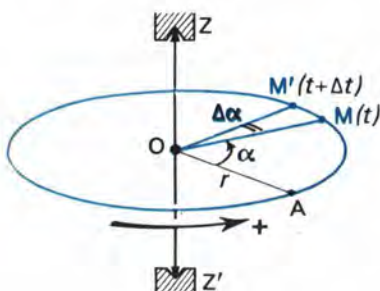


Fig. 1.

Un sens positif de rotation et un rayon origine fixe OA ayant été choisis, la position de M est définie à chaque instant t par la valeur algébrique α de l'angle ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$).

La relation :

$$\alpha = f(t)$$

est l'équation horaire du mouvement de rotation.

b. — Vitesse et accélération angulaires.

Entre deux instants voisins, t et t + Δt , l'angle ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$) passe de la valeur α à la valeur $\alpha + \Delta\alpha$. Le quotient $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ mesure algébriquement la vitesse angulaire moyenne entre ces instants; si Δt tend vers zéro, $\Delta\alpha$ tend aussi vers zéro et la vitesse angulaire moyenne tend

vers une limite ω égale à la dérivée par rapport au temps de la fonction $\alpha = f(t)$:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

Par définition, cette limite mesure algébriquement la **vitesse angulaire à l'instant t**; on l'exprime en *radian par seconde*.

Dans le cas général d'un mouvement de rotation *varié*, la vitesse angulaire varie à chaque instant. Supposons qu'entre deux instants voisins, t et t + Δt , elle passe de la valeur ω à

la valeur $\omega + \Delta\omega$; le quotient $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ mesure l'accélération angulaire moyenne entre ces instants.

Si Δt tend vers zéro, $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ tend aussi vers une

limite α'' qui est la dérivée $\frac{d\omega}{dt}$ de la vitesse angulaire (donc, la dérivée *seconde* de α).

Par définition, cette limite mesure algébriquement l'**accélération angulaire à l'instant t** :

$$\alpha'' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Elle s'exprime en *radian par seconde, par seconde* (rd/s²).

Si α'' a même signe que ω , la vitesse angulaire augmente en valeur absolue et la rotation est dite *accélérée*; elle est dite *retardée* quand α'' et ω sont de signes contraires.

Si $\alpha'' = 0$, la vitesse angulaire ω est constante, la rotation est *uniforme*.

c. — L'application de la relation fondamentale de la Dynamique.

A un instant quelconque t où la vitesse angulaire a la valeur algébrique ω :

— la mesure algébrique du vecteur vitesse $\vec{v}$ est :

$$v = r\omega \text{ (formule 3, p. 56)}$$

— le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ a pour composantes (fig. 2) :

1° suivant la tangente MT (accélération *tangentielle*), le vecteur $\vec{\gamma}_T$, de mesure algébrique :

$$\gamma_T = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha''$$

2° suivant le rayon (accélération *normale*), le vecteur $\vec{\gamma}_N$, toujours dirigé vers le centre O et dont le module a pour valeur :

$$\gamma_N = v^2/r = \omega^2 r$$

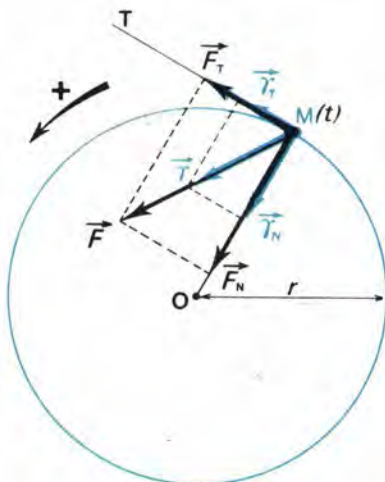


Fig. 2

D'après la relation fondamentale de la Dynamique, la résultante de toutes les forces qui agissent sur le point matériel M, de masse m , est, à l'instant t :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

Il est important de remarquer que cette résultante $\vec{F}$ est, comme le vecteur-accelération $\vec{\gamma}$, contenue dans le plan de la circonférence trajectoire.

L'accélération $\vec{\gamma}$ étant égale à la somme vectorielle $\vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N$, la relation précédente peut s'écrire :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m(\vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N) = m\vec{\gamma}_T + m\vec{\gamma}_N$$

$\vec{F}_T = m\vec{\gamma}_T$ représente la **composante tangentielle** de la force $\vec{F}$, de module $F_T = m\alpha$;

$\vec{F}_N = m\vec{\gamma}_N$ représente sa **composante normale**, de module :

$$F_N = m\omega^2 r \quad (1)$$

Le moment par rapport à l'axe de rotation de la résultante $\vec{F}$ est égal à la somme des moments par rapport à l'axe de ses composantes $\vec{F}_T$ et $\vec{F}_N$; comme le moment de $\vec{F}_N$ est nul (puisque

son support rencontre l'axe), le moment de $\vec{F}$ est égal au moment de $\vec{F}_T$; sa valeur algébrique est donc :

$$\mathcal{M} = r \cdot F_T = r \cdot m\alpha = mr^2\alpha \quad (1)$$

Le produit mr^2 ayant une valeur constante, **le moment par rapport à l'axe de rotation de la résultante de toutes les forces agissant sur un point matériel est à chaque instant proportionnel à l'accélération angulaire du point matériel à cet instant.**

2. La rotation d'un solide autour d'un axe; le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe.

a. — Soit un solide S mobile autour d'un axe fixe Δ (fig. 3). Décomposons ce solide en éléments matériels $M_1, M_2, M_3, \dots$, assez petits pour qu'on puisse les assimiler à des points matériels. Chacun de ces éléments est caractérisé par sa masse $m_1, m_2, m_3, \dots$, et par le rayon $r_1, r_2, r_3, \dots$, de sa trajectoire circulaire.

Tous ces points tournent du même angle dans le même temps; ils ont tous, à chaque instant, même vitesse angulaire ω et même accélération angulaire α .

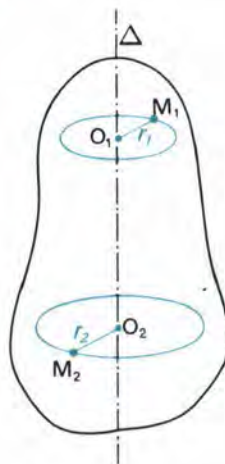


Fig. 3.

b. — Faisons, pour tous les éléments matériels du solide S, la somme algébrique des moments par rapport à l'axe de toutes les forces qui s'exercent sur ces éléments; il vient, d'après (1) :

(1) Dans le cas particulier d'une rotation uniforme ($\alpha = 0$), la

composante tangentielle est nulle et la force $\vec{F}$, confondue avec sa composante normale, n'est autre que la force centripète du mouvement circulaire uniforme (p. 57).

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots = m_1 r_1^2 \alpha'' + m_2 r_2^2 \alpha'' + \dots \\ \mathcal{M} &= \alpha'' (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \\ \mathcal{M} &= \alpha'' \Sigma m r^2\end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ représente la somme algébrique des moments par rapport à l'axe des forces *intérieures* et *extérieures* qui s'exercent à chaque instant sur le système de points matériels que constitue le solide; comme les forces intérieures sont deux à deux *opposées*, la somme algébrique de leurs moments par rapport à l'axe est constamment *nulle*, de sorte que $\mathcal{M}$ est égal à la somme algébrique des moments par rapport à l'axe des forces extérieures appliquées au solide; on l'appelle encore le **moment résultant** de ces forces extérieures.

c. — Le facteur $\Sigma m r^2$ représente la somme des produits des masses élémentaires du solide par les carrés de leurs distances à l'axe de rotation. Par définition, c'est le **moment d'inertie du solide par rapport à cet axe** :

$$J = \Sigma m r^2 \quad (2)$$

Cette grandeur J est, pour un corps solide et un axe de rotation déterminés, une **constante essentiellement positive**. Elle caractérise l'inertie du solide en rotation, c'est-à-dire la plus ou moins grande difficulté de faire varier sa vitesse angulaire.

d. — Faisons apparaître le moment d'inertie dans l'expression du moment résultant par rapport à l'axe :

$$(3) \quad \boxed{\mathcal{M} = J \alpha''} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M} \text{ en mètre-newton (m.N);} \\ J \text{ en kilogramme-mètre carré (kg.m}^2\text{);} \\ \alpha'' \text{ en rd/s}^2. \end{array} \right.$$

Nous obtenons la **relation fondamentale de la Dynamique du solide en rotation**.

Sous la forme équivalente :

$$\alpha'' = \frac{\mathcal{M}}{J},$$

elle exprime que l'accélération angulaire d'un solide en rotation autour d'un axe est à chaque instant :

— proportionnelle à la somme algébrique des moments par rapport à l'axe des forces extérieures qui agissent sur le solide;

— inversement proportionnelle au moment d'inertie du solide par rapport à l'axe.

Son analogie avec la relation fondamentale de la Dynamique du solide en mouvement de translation

$$\left(\vec{F} = m \vec{\gamma}, \text{ ou } \vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} \right) \text{ est évidente :}$$

A la force résultante $\vec{F}$ correspond le moment résultant $\mathcal{M}$;

A la masse inerte m correspond le moment d'inertie J par rapport à l'axe;

Au vecteur accélération $\vec{\gamma}$ correspond l'accélération angulaire α'' .

e. — Un exemple d'application : le mouvement de rotation de l'arbre d'un moteur.

Examinons le cas simple d'un moteur électrique utilisé pour actionner une machine quelconque, par exemple un appareil ménager tel qu'aspirateur, ventilateur, mixer, machine à coudre ou à laver...

Sur l'arbre du moteur s'exercent deux systèmes de forces extérieures :

1^o Les forces *motrices*, d'origine électromagnétique. Leur action est équivalente à celle d'un **couple moteur**, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation et dont le moment $\mathcal{M}_m$ est égal à la somme des moments de ces forces par rapport à cet axe.

2^o Les forces *résistantes*, qui proviennent de la machine entraînée par le moteur. Leur action est équivalente à celle d'un **couple résistant** dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation et dont le moment $\mathcal{M}_r$ est égal à la somme de leurs moments par rapport à cet axe.

Prenons comme sens positif le sens de rotation de l'arbre; le moment résultant des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation a pour valeur algébrique :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_m + \mathcal{M}_r$$

Dans cette somme algébrique, $\mathcal{M}_m$ est positif et $\mathcal{M}_r$ est négatif.

Désignons par J le moment d'inertie, par rapport à l'axe de rotation, de l'ensemble formé par l'arbre moteur et toutes les pièces solidaires de cet arbre; la relation fondamentale de la Dynamique du solide en rotation s'écrit :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_m + \mathcal{M}_r = J \alpha''$$

— Si le couple moteur est supérieur au couple résistant,

$$|\mathcal{M}_m| > |\mathcal{M}_r| \text{ entraîne } \alpha'' > 0,$$

le mouvement de rotation est **accélééré**.

C'est ce qui se passe pendant le démarrage, lorsque l'arbre moteur prend progressivement sa vitesse de régime. Dans le cas particulier où la différence $|\mathcal{M}_m| - |\mathcal{M}_r|$ est constante, l'accélération angulaire α'' est constante, de sorte que la rotation est **uniformément accélérée**.

— Si $|\mathcal{M}_m| = |\mathcal{M}_r|$, on a $\mathcal{M} = 0$, d'où : $\alpha'' = 0$;

l'arbre tourne à vitesse angulaire constante.

— Enfin, si le couple moteur est inférieur au couple résistant,

$$|\mathcal{M}_m| < |\mathcal{M}_r| \text{ entraîne } \alpha'' < 0,$$

le mouvement est **retardé**. Il en est ainsi, en particulier, pendant la période d'arrêt : la vitesse angulaire diminue progressivement jusqu'à s'annuler.

3. Les moments d'inertie de quelques solides homogènes par rapport à un axe de symétrie.

Dans la plupart des cas, le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe de rotation n'est pas calculable; on doit le déterminer expérimentalement. Cependant, si l'axe de rotation est un *axe de symétrie* du corps solide et si celui-ci est *homogène*, le calcul devient possible.

Voici les résultats du calcul, dans quelques cas simples :

— **Circonférence pesante** de masse m et de rayon R , par rapport à un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre (fig. 4-a) :

$$J_{(0)} = m R^2$$

— **Disque et cylindre homogènes**, par rapport à leur axe de révolution (fig. 4-b) :

$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{2} m R^2$$

— **Sphère homogène**, par rapport à tout axe passant par son centre (fig. 4-c) :

$$J_{(\Delta)} = \frac{2}{5} m R^2$$

4. Le théorème de Huyghens.

Les relations précédentes expriment les moments d'inertie de solides de forme géométrique simple par rapport à un axe passant par leur *centre de gravité* G ; le théorème suivant, que nous admettons sans démonstration, permet

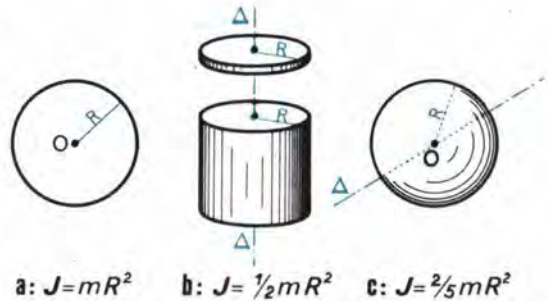


Fig. 4. — Les moments d'inertie de quelques solides particuliers, par rapport à des axes passant par leurs centres de gravité.

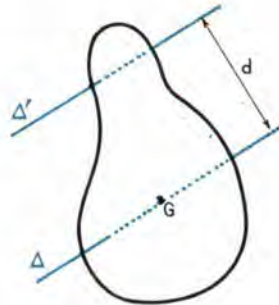


Fig. 5.

d'en déduire le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque :

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque Δ' est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe Δ , parallèle à Δ' et passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes (fig. 5) :

$$J_{(\Delta')} = J_{(\Delta)} + m d^2$$

B. L'APPLICATION AU MOUVEMENT SINUSOÏDAL DE ROTATION

5. L'étude cinématique.

* Les caractéristiques *angulaires* du mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe Δ sont

celles du mouvement d'un point *quelconque* M de ce solide (fig. 6-a).

Soit un plan Q , contenant M et perpendiculaire en O à l'axe de rotation Δ . Lorsque le solide

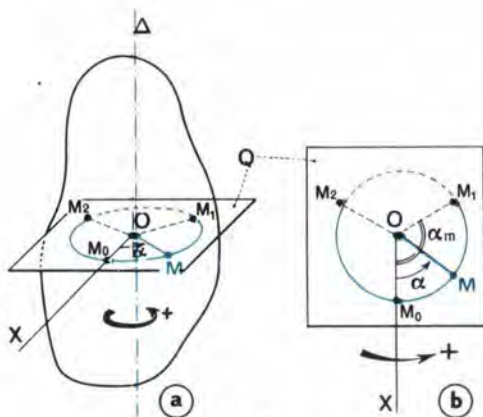


Fig. 6.

tourne autour de Δ , le point M décrit, dans ce plan Q, tout ou partie de la circonférence de centre O et de rayon OM (fig. 6-b).

Choisissons un sens positif de rotation. OX étant une demi-droite fixe du plan Q, on dit que le solide est animé d'un **mouvement sinusoïdal de rotation** si la valeur algébrique α de

l'angle $\widehat{MOX}$ est une fonction sinusoïdale du temps :

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Dans une telle rotation, α varie entre α_m et $-\alpha_m$; le rayon mobile OM balaie donc l'angle $\widehat{M_1OM_2}$, alternativement dans un sens et dans l'autre; il oscille de part et d'autre de la droite fixe OX.

Par analogie avec le mouvement rectiligne sinusoïdal (p. 52) :

α est l'**élongation angulaire**;

α_m est l'**amplitude angulaire**;

$(\omega t + \varphi)$ est la **phase à l'instant t**;

ω est la **pulsation**.

Si l'instant initial $t = 0$ est convenablement choisi, la phase initiale φ est nulle et l'équation horaire du mouvement prend la forme plus simple :

$$\alpha = \alpha_m \sin \omega t \quad (4)$$

Le mouvement est **périodique**, de **période** :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Les valeurs algébriques de la vitesse et de l'accélération angulaires à l'instant t s'obtiennent par dérivations successives de la fonction (4) :

— **vitesse angulaire** ⁽¹⁾ :

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \omega \alpha_m \cos \omega t$$

— **accélération angulaire** :

$$\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2 \alpha_m \sin \omega t$$

$$\text{ou :} \quad \alpha'' = -\omega^2 \alpha \quad (5)$$

A chaque instant, les valeurs absolues de l'accélération angulaire α'' et de l'angle balayé α sont donc proportionnelles et leurs valeurs algébriques sont de signes contraires.

6. L'étude dynamique du mouvement sinusoïdal de rotation.

a. — Soit J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation Δ . D'après la relation fondamentale de la Dynamique du solide en rotation, le **moment résultant** par rapport à l'axe des forces extérieures qui agissent sur le solide a pour valeur algébrique, à chaque instant (compte tenu de (5)) :

$$\mathcal{M} = J\alpha'' = -J\omega^2\alpha$$

avec :

$$\alpha = \alpha_m \sin \omega t.$$

Le moment résultant s'annule, en même temps que α , à chaque passage du rayon mobile OM par la position OM_0 sur OX (fig. 6-b); cette position OM_0 est la seule pour laquelle les forces appliquées au solide n'ont aucun effet de rotation : elle correspond à une **position d'équilibre unique** de ce solide.

Désignons par C la **constante positive** $J\omega^2$; la valeur algébrique du moment résultant prend la forme :

$$\mathcal{M} = -C\alpha$$

D'après cette relation :

— Le moment résultant $\mathcal{M}$ et l'élongation α sont toujours de signes contraires. L'effet de $\mathcal{M}$ est donc de ramener constamment le solide vers la position d'équilibre; on dit que $\mathcal{M}$ est un **moment de rappel**.

— La valeur absolue de ce moment de rappel est proportionnelle à celle de l'élongation angulaire α .

b. — On démontre que, réciproquement :

Lorsqu'un solide mobile autour d'un axe est à chaque instant rappelé vers une position d'équilibre par des forces dont le moment résultant par rapport à l'axe ($\mathcal{M} = -C\alpha$) est proportionnel à l'élongation angulaire α ,

⁽¹⁾ Nous désignons la vitesse angulaire par α' , la lettre ω désignant ici la **pulsation** du mouvement sinusoïdal.

il est animé d'un mouvement sinusoïdal de rotation de part et d'autre de cette position d'équilibre.

D'après ce qui précède, si J est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation, la pulsation ω de ce mouvement est telle que :

$$C = J\omega^2; \text{ on en tire : } \omega = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

et l'expression de la période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}} \quad (6)$$

La constante C , égale au quotient $\left|\frac{\mathcal{M}_0}{\alpha}\right|$ des valeurs absolues du moment de rappel et de l'élongation angulaire, s'exprime en mètre-newton par radian (m.N/rd).

c. — Le tableau de correspondance des caractéristiques cinématiques et dynamiques des mouvements sinusoïdaux de translation et de rotation.

Translation	Rotation
Élongation : $x = a \sin \omega t$	Élongation angulaire : $\alpha = \alpha_m \sin \omega t$
Vitesse : $v = \omega a \cos \omega t$	Vitesse angulaire : $\alpha' = \omega \alpha_m \cos \omega t$
Accélération : $\gamma = -\omega^2 x$	Accélération angulaire : $\alpha'' = -\omega^2 \alpha$
Masse inerte : m	Moment d'inertie par rapport à l'axe : J
Force de rappel : $\vec{F} = -k \vec{x}$	Moment résultant de rappel : $\mathcal{M}_0 = -C\alpha$
Relation fondamentale : $\vec{F} = m\vec{\gamma}$	Relation fondamentale : $\mathcal{M}_0 = J\alpha''$
Pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}$
Période : $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$	Période : $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$

7. Deux exemples de mouvements sinusoïdaux de rotation.

a. — Le pendule de torsion.

Soit un solide quelconque suspendu à un fil. En général, un fil résiste à la torsion : c'est-à-

dire que si on le tord, on y fait naître des forces qui tendent à s'opposer à la déformation. Pour un fil élastique (fil métallique ou fil de verre filé, par exemple), ces forces antagonistes sont équivalentes à un couple de rappel, appelé **couple de torsion**, dont le moment est proportionnel à l'angle de torsion, quel que soit cet angle :

$$\mathcal{M} = -C\alpha$$

C est la constante de torsion du fil ⁽¹⁾.

La position d'équilibre du système correspond à une torsion nulle du fil ($\mathcal{M} = 0$). Si, à partir de cette position, on fait tourner le solide d'un angle quelconque α_m , autour de l'axe du fil pour l'abandonner ensuite sans vitesse initiale, il prend un **mouvement sinusoïdal de rotation**, d'amplitude α_m et de période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

J étant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.

On peut vérifier ces conclusions à l'aide du **pendule de torsion** (fig. 7). Rappelons que le

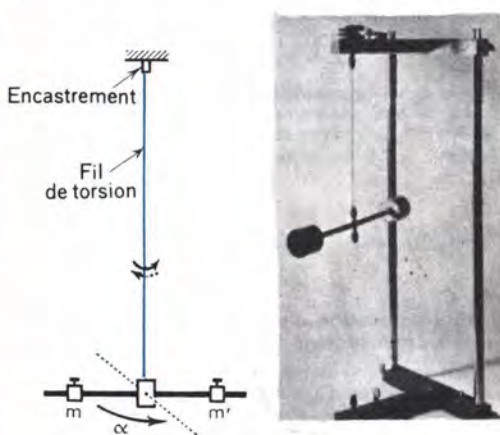


Fig. 7. — Le pendule de torsion.

— En laissant osciller le pendule à partir de torsions initiales variables et en mesurant dans chaque cas la période, on constate qu'elle est indépendante de l'amplitude (isochronisme vrai).

— Si l'on écarte les masselottes m et m' , on augmente le moment d'inertie J et l'on constate que la période augmente ; elle diminue au contraire si l'on augmente la constante de torsion C , par exemple en raccourcissant le fil de torsion.

⁽¹⁾ On montre que la constante de torsion d'un fil cylindrique homogène est proportionnelle à la 4^e puissance de son diamètre et inversement proportionnelle à sa longueur :

$$C = k \frac{D^4}{l}$$

k est une constante caractéristique de la nature du fil.

cadre d'un galvanomètre en circuit ouvert exécute aussi des oscillations sinusoïdales quand on l'écarte de sa position d'équilibre et l'abandonne à l'action du couple de torsion des fils de suspension.

b. — Le pendule élastique à ressort spiral.

Le système régulateur des montres en est un exemple. Il est constitué par un petit volant, appelé *balancier*, sur l'arbre duquel est fixée l'une des extrémités A d'un *ressort spiral*. L'autre extrémité B est reliée à un support fixé au boîtier de la montre (fig. 8).

Ce ressort est une mince lame métallique élastique enroulée en spirale. Si, partant de la posi-

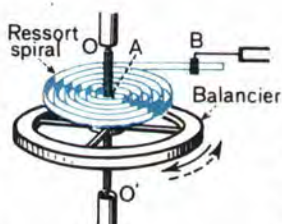


fig. 8. — Le pendule élastique à ressort spiral.

tion d'équilibre imposée par le ressort, on fait tourner le balancier dans un sens ou dans l'autre autour de son axe OO' , la *flexion* de la lame spirale augmente ou diminue et il en résulte un **couple de rappel** dont le moment est proportionnel à l'angle de rotation, quel que soit cet angle :

$$\mathcal{M} = -C\alpha$$

Abandonné à l'action de ce couple, le balancier prend donc un **mouvement sinusoïdal de rotation** autour de l'axe OO' .

Si J est le moment d'inertie du balancier par rapport à son axe de rotation, la **période** a encore pour expression :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

Elle est indépendante de l'amplitude, comme dans le cas du pendule de torsion.

Les équipages rotatifs de nombreux appareils de mesure (ampèremètres et voltmètres par exemple) ont ainsi une position d'équilibre imposée par un ou deux *ressorts spiraux* et peuvent aussi exécuter des oscillations sinusoïdales autour de cette position d'équilibre. Comme ces oscillations gênent les lectures, on les réduit ou les supprime le plus souvent grâce à des dispositifs d'amortissement.

EXERCICES

I. — EXERCICE RÉSOLU

La combinaison d'un mouvement de rotation et d'un mouvement de translation.

Soit un treuil assimilé à un cylindre homogène, de masse M et d'axe Δ (fig. 9). Supposons que la

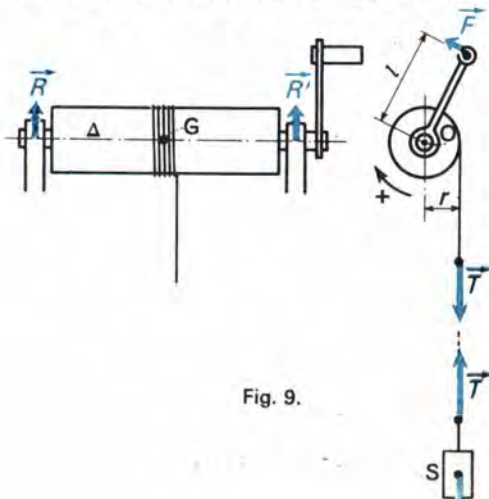


Fig. 9.

corde enroulée sur le treuil soutienne un solide S , de poids $\vec{P}$; négligeons les masses de la corde et de la manivelle ainsi que toutes les résistances passives (frottements et résistance de l'air).

Le moment résultant. — Les forces extérieures qui s'exercent sur le treuil sont :

- Le poids du treuil, appliqué en G , sur l'axe de rotation Δ ;
- Les réactions $\vec{R}$ et $\vec{R}'$ des supports; leurs droites d'action rencontrent l'axe Δ ;
- La force motrice $\vec{F}$, supposée perpendiculaire à la manivelle;
- La tension $\vec{T}$ de la corde, dont le module T dépend du mouvement du solide S .

Comme les droites d'action du poids du treuil et des réactions des supports rencontrent l'axe de rotation, leurs moments par rapport à cet axe sont nuls, de sorte que le moment résultant des forces extérieures a pour valeur algébrique :

$$\mathcal{M} = Tr - Fl$$

L'équilibre ou la rotation uniforme. — Écrivons que ce moment résultant par rapport à l'axe Δ est égal à chaque instant au produit du moment d'inertie du treuil par rapport à cet axe par l'accélération angulaire instantanée :

$$\mathcal{M}_0 = Tr - Fl = J\alpha''$$

Pour que le treuil soit en équilibre ou en rotation uniforme il faut que :

$$\alpha'' = 0; \quad Tr - Fl = 0$$

Dans ce cas, le solide S est au repos ou en mouvement de translation uniforme et le module T de la tension est égal au module P de son poids; on a donc, en remplaçant T par P dans la relation précédente :

$$Pr - Fl = 0, \quad \text{ou : } \boxed{Pr = Fl}$$

C'est bien la relation à laquelle conduit l'étude de l'équilibre statique du treuil (cours de Seconde).

Le mouvement varié. — Imaginons qu'à un instant $t = 0$ la force motrice $\vec{F}$ s'annule (on enlève la manivelle); recherchons la nature du mouvement de rotation du treuil à partir de cet instant.

Nous avons encore : $\mathcal{M}_0 = J\alpha''$, avec maintenant : $\mathcal{M}_0 = Tr$; d'où :

$$J\alpha'' = Tr; \quad T = \frac{J\alpha''}{r}$$

Nous obtiendrons une autre expression du module T de la tension en étudiant le mouvement de translation du solide S . Comme la corde s'enroule circulairement sur la surface du treuil, la vitesse de S a, à chaque instant, même module que la vitesse linéaire d'un point quelconque de cette surface, de sorte qu'à un instant où la vitesse angulaire du treuil est ω , la vitesse de S a pour module :

$$v = \omega r$$

On en déduit le module de l'accélération du solide S à cet instant :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha''$$

Appliquons la relation fondamentale de la Dynamique au mouvement du centre de gravité de ce solide, soumis aux forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$, de modules $P = mg$ et T ; il vient, si m désigne la masse du solide S :

$$mg - T = m\gamma$$

ou, en remplaçant γ par $r\alpha''$:

$$T = mg - mra''$$

Égalons les deux valeurs du module T de la tension :

$$\frac{J\alpha''}{r} = mg - mra''$$

$$\alpha'' \left(\frac{J}{r} + mr \right) = mg$$

$$\boxed{\alpha'' = \frac{mg}{J/r + mr}}$$

m , g , J et r étant des constantes, l'accélération angulaire est constante : **le treuil prend donc un mouvement de rotation uniformément accéléré**; corrélativement, le mouvement de translation du solide S est une chute uniformément accélérée, dont l'accélération a pour module :

$$\boxed{\gamma = r\alpha'' = \frac{mg}{J/r^2 + m}}$$

Application numérique. — Supposons que le treuil ait une masse $M = 20$ kg, un rayon $r = 10$ cm. et que la masse du solide S soit $m = 10$ kg. Prenons $g \approx 10$ N/kg.

$$P = mg \approx 10 \times 10 = 100 \text{ N}$$

$$J = 1/2 Mr^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 0,1^2 = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

D'où :

$$\alpha'' \approx \frac{100}{0,1/0,1 + 10 \times 0,1} = \frac{100}{2} = 50 \text{ rd/s}^2$$

$$\gamma \approx r\alpha'' \approx 0,1 \times 50 = 5 \text{ m/s}^2$$

II. EXERCICES PROPOSÉS

1. Un petit gyroscope, assimilable à un disque homogène de masse égale à 100 g, de 5 cm de rayon, tournant autour de son axe de révolution, est préalablement lancé jusqu'à atteindre une vitesse de rotation de 3 600 tours/minute.

Sachant qu'il s'arrête en 3 minutes sous l'action de résistances passives équivalentes à un couple que l'on supposera constant, calculer l'accélération angulaire, le moment du couple résistant et le nombre de tours effectués entre le début du ralentissement et l'arrêt.

Rép. : — 2,1 rd/s²; — 0,26 × 10⁻³ m · N; 5 400 tours.

2. Un cylindre homogène de rayon $r = 10$ cm de masse $M = 1$ kg, peut tourner autour de son axe de révolution horizontal Δ ; il soutient un solide S , de masse $m = 10$ kg, par l'intermédiaire d'une corde enroulée sur le cylindre.

Le cylindre est traversé, suivant un diamètre, par une tige t (fig. 10) portant à ses extrémités deux masses égales, de valeur $m' = 0,5$ kg, pratiquement confondues avec leurs centres de gravité situés à $l = 50$ cm de l'axe Δ .

Le système est abandonné à lui-même sans vitesse initiale :

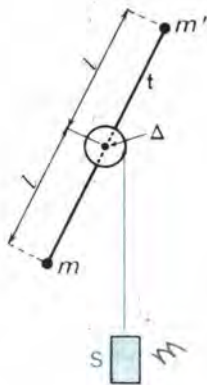


Fig. 10.

1° En négligeant les masses de la corde et de la tige t ainsi que les résistances passives, calculer l'accélération du mouvement de S et la tension de la corde pendant ce mouvement.

2° La corde quitte le cylindre quand S est descendu de $h = 5$ m; calculer la vitesse angulaire du cylindre à cet instant (en rd/s et en tours/minute) et le nombre de tours effectués par le cylindre depuis le départ.

On donne $g \approx 10$ u. SI.

3. Sur la gorge d'une poulie de masse 100 g et de rayon $r = 6$ cm, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal, passe un fil de masse négligeable. Ce fil porte une masse $M = 300$ g et une masse $m = 100$ g. La masse M se trouve à 3 m au-dessus du sol; la masse m est au niveau du sol sans toutefois y reposer. On abandonne le système au temps 0.

1° Calculer l'accélération prise par la masse M en appliquant à la poulie la relation fondamentale de la Dynamique du solide en rotation.

2° Calculer la tension de chaque fil pendant le mouvement.

3° Calculer la vitesse de M quand elle arrive au sol.

4° Quelle est alors la vitesse angulaire de la poulie ?

Quelle force F faut-il appliquer tangentiellement à la poulie pour qu'elle s'arrête au bout de 6 tours, le fil supportant m étant coupé quand M arrive au sol ?

On supposera toute la masse de la poulie répartie sur sa circonférence. On donne : $g \approx 10$ u. SI.

(D'après un probl. de bacc.).

Rép. : 1° 4 m/s^2 ; 2° $1,8$ et $1,4 \text{ N}$; 3° $4,9 \text{ m/s}$; 4° 82 rd/s ; $0,53 \text{ N}$.

4. Le pendule à ressort spiral qui règle le mouvement d'une montre a un moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation égal à $10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ et une

période de 0,5 s. 1° Calculer la constante C du couple de rappel. 2° Calculer la vitesse angulaire maximale quand l'amplitude est π radians. 3° Pour la même amplitude, évaluer de deux manières le moment du couple de rappel quand le pendule passe par la position d'élongation angulaire $\alpha = \pi/4$ rd.

5. Une barre supportée horizontalement par un fil vertical passant par son centre de gravité est tournée dans son plan de façon que le fil subisse une torsion de 14° ; à cet instant, le couple de torsion a pour moment $\mathcal{M} = 0,64 \text{ m}\cdot\text{N}$. On abandonne alors la barre sans vitesse initiale et elle prend des oscillations de torsion à raison de 3 oscillations par seconde. On demande le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe du fil de suspension.

Rép. : $0,74 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

6. Un barreau parallélépipédique homogène peut osciller horizontalement par la torsion d'un fil OA de 1 m de longueur, fixé en A, et dont l'axe passe par le centre O de l'une des grandes faces du barreau. La durée de dix oscillations est 96,3 secondes. On surcharge le barreau à l'aide de deux petites masses m et m' de 10 g, de dimensions négligeables, placées symétriquement par rapport au fil, à 8 cm de celui-ci; la durée de 10 oscillations devient 101,4 secondes. Calculer :

1° Le moment d'inertie J du barreau par rapport à l'axe AO et la constante de torsion C du fil.

2° La vitesse angulaire du barreau quand il passe à sa position d'équilibre au cours d'oscillations d'amplitude 1 radian.

(D'après la 1^{re} partie d'un problème de concours général.)

7. 1° Calculer, en unités SI, le moment d'inertie d'un cylindre plein en platine de rayon $R = 2$ cm, de hauteur $h = 2$ cm et de masse volumique $\rho = 21,5 \text{ g/cm}^3$.

2° Le cylindre précédent est suspendu à un fil métallique vertical, de longueur 1 m, dirigé suivant l'axe du cylindre. L'extrémité supérieure du fil est attachée à un point fixe.

Laissant le fil parfaitement vertical, on fait tourner le cylindre autour de son axe d'un angle α à partir de sa position de repos et on l'abandonne à lui-même. Il effectue des oscillations de torsion dont la période est $T = 2$ secondes. Calculer la constante de torsion C du fil.

3° Quelle est la vitesse angulaire du cylindre quand il passe par sa position d'équilibre au cours d'une oscillation d'amplitude 1 radian ?

4° Le diamètre du fil de suspension est $d = 0,6 \text{ mm}$. Sa constante de torsion C satisfait à la relation $C = k \frac{d^4}{l}$,

l désignant la longueur du fil et k un coefficient caractéristique du métal qui le constitue. Calculer k en unités SI.

(Partie de problème de bacc.).

Rép. : 1° $0,108 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$; 2° $0,107 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{N/rd}$; 3° $3,14 \text{ rd/s}$; 4° $8,23 \times 10^{-9} \text{ u. SI}$

LE THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

A. LE RAPPEL DES NOTIONS DE TRAVAIL ET DE PUISSANCE

1. Le travail d'une force constante dans un déplacement rectiligne.

Si le point d'application d'une force *constante* $\vec{F}$ se déplace de $AB = l$ le long d'une droite XX' (fig. 1-a), le *travail* de cette force est, par définition, le produit scalaire :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{l}$$

Sa valeur algébrique est donc :

$$W = Fl \cos \alpha \quad (1)$$

Elle a le signe de $\cos \alpha$:

— Si l'angle α est aigu, W est *positif*; dans ce cas, la force $\vec{F}$ favorise le mouvement du mobile auquel elle s'applique : c'est une *force motrice*, son travail est *moteur*.

— Si l'angle α est obtus, W est *négatif*; la force tend alors à s'opposer au mouvement : son travail est *résistant*.

Cas particuliers.

1° $\alpha = 0$: le déplacement du point d'application s'effectue dans la direction même de la force : le travail prend alors son expression la plus simple : $W = Fl$.

2° $\alpha = \pi/2$ rad : la force est perpendiculaire au déplacement, son travail est nul; par exemple, le poids d'un corps, force *verticale*, n'effectue aucun travail quand le centre de gravité du corps se déplace sur un plan *horizontal*.

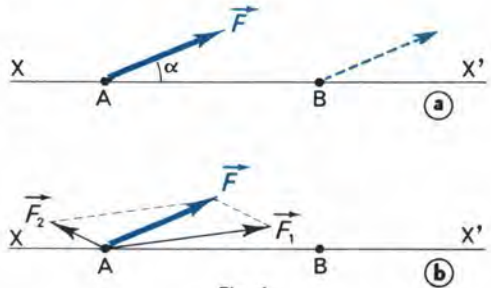


Fig. 1.

Remarque.

Si la force $\vec{F}$ est la *résultante* de plusieurs forces, on démontre que le travail W de cette résultante est la *somme algébrique* des travaux de ses composantes.

Par exemple (fig. 1-b) :

$$W_F = W_{F_1} + W_{F_2}$$

Avec, ici :

$$W_{F_1} > 0 \text{ et } W_{F_2} < 0$$

2. Les unités de travail.

Les unités de force et de longueur étant déjà choisies, la relation $W = Fl$ permet de définir les unités de travail :

Si $F = 1$ unité de force, $l = 1$ unité de longueur, $W = 1 \times 1 = 1$ unité de travail.

L'unité SI de travail est le joule :

Le **joule (J)** est le travail que produit une force de 1 newton quand son point d'application se déplace de 1 mètre dans sa direction.

En France, on utilise encore le *kilogrammètre* (kgm), égal au travail d'une force de 1 kgf déplaçant son point d'application de 1 m dans sa direction.

Comme $1 \text{ kgf} \approx 9,81 \text{ N}$, on a évidemment :

1 kilogrammètre $\approx 9,81$ joules

3. Généralisation : le travail d'une force quelconque pour un déplacement quelconque de son point d'application.

Soit une force $\vec{F}$ variant continuellement en grandeur et direction pendant que son point d'application décrit une courbe quelconque C (fig. 2) :

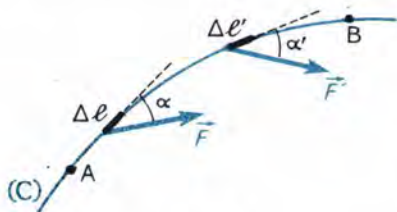


Fig. 2.

Décomposons la courbe en *éléments* juxtaposés, assez petits pour être assimilés à des déplacements *rectilignes* le long desquels la force demeure pratiquement *constante* ; à chacun d'eux correspond un *travail élémentaire* :

$$\Delta W = F \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha$$

Le travail de la force $\vec{F}$, le long de l'arc AB, est égal à la somme des travaux élémentaires correspondant à tous les éléments de courbe qui forment l'arc AB :

$$W_{AB} = \sum_A^B F \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

4. Le travail d'un poids.

Soit AGB la trajectoire du centre de gravité d'un corps de poids $\vec{P}$ (fig. 3).

Pour un déplacement très petit Δl , dont la projection sur la verticale ZZ' est Δh , le travail élémentaire du poids est :

$$\Delta W = P \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha = P \cdot \Delta h$$

Appliquons la relation (2) :

$$W_{AB} = \sum_A^B P \cdot \Delta h$$

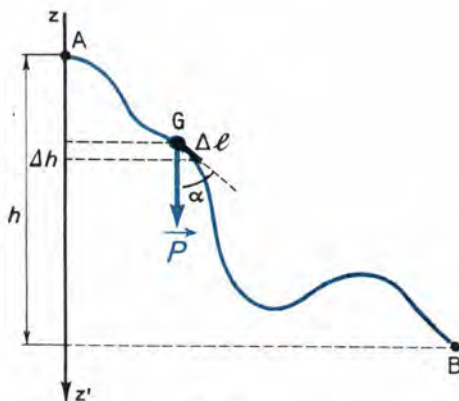


Fig. 3.

Si la différence de niveau des points A et B, mesurée par la hauteur h , n'est pas trop grande, le poids demeure pratiquement *constant* et nous pouvons mettre P en facteur :

$$W_{AB} = P \sum_A^B \Delta h ; \text{ ou : } \boxed{W_{AB} = Ph} \quad (3)$$

Ainsi, le travail d'un poids est indépendant du chemin suivi, *il ne dépend que de la différence des niveaux de départ et d'arrivée.*

Ce travail est *moteur* de A vers B et *résistant* de B vers A.

5. Le travail d'une force appliquée à un solide en rotation.

Considérons par exemple la force motrice $\vec{F}$ appliquée à un treuil (fig. 4) ; supposons d'abord que son intensité soit constante et que sa direc-

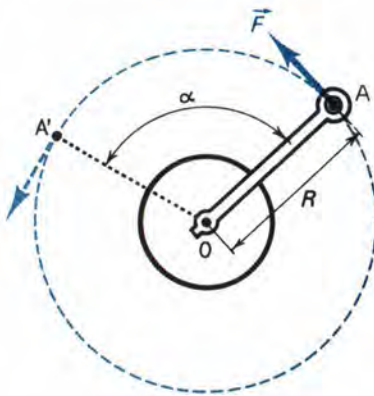


Fig. 4.

tion soit continuellement tangente à la trajectoire circulaire de son point d'application A :

Pour un déplacement très petit Δl , assimilable à une portion de tangente, le travail élémentaire est :

$$\Delta W = F \cdot \Delta l$$

Le long d'un arc quelconque $\widehat{AA'}$, de longueur $l = R \alpha$ (α en rd), la relation (2) s'écrit :

$$W = \sum_A^{A'} F \cdot \Delta l = F \sum_A^{A'} \Delta l = Fl = FR\alpha$$

Comme le produit $\vec{FR}$ représente le moment $\mathcal{M}$ de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe de rotation O, il vient :

$$W = \mathcal{M} \alpha \quad (4)$$

Cette expression est générale :

Quelle que soit la force, *pourvu que son moment par rapport à l'axe ne change pas pendant la rotation*, le travail de la force est égal au produit de son moment par rapport à l'axe, par l'angle de rotation mesuré en radian.

Application numérique.

Supposons que, dans l'exemple du treuil (fig. 4), l'intensité constante de la force soit 5 kgf et que le bras OA de la manivelle ait une longueur de 30 cm; calculons le travail de $\vec{F}$ pour un tour :

$$\begin{aligned} W &= \mathcal{M} \alpha \\ F &\approx 9,8 \times 5 = 49 \text{ N}; \quad R = 0,3 \text{ m} \\ \mathcal{M} &\approx 0,3 \times 49 = 14,7 \text{ m.N} \\ \alpha &= 2\pi \text{ rd} \approx 6,28 \text{ rd} \\ W &\approx 14,7 \times 6,28 \approx 92 \text{ joules.} \end{aligned}$$

6. Le travail d'un couple.

Considérons par exemple le cas d'un moteur entraînant un véhicule ou une machine quelconque. L'arbre du moteur et les pièces solidaires de cet arbre constituent un solide mobile autour d'un axe. Nous avons vu que la rotation de ce solide peut être considérée comme résultant des actions simultanées de deux couples antagonistes, le **couple moteur** et le **couple résistant**. L'évaluation du travail fourni par le moteur au cours d'une rotation donnée revient au calcul du travail effectué par le couple moteur, supposé constant.

Un tel couple est défini par son plan, perpendiculaire à l'axe de rotation, et par son moment $\mathcal{M}$; on peut donc toujours le représenter par deux forces *tangentes*, appliquées aux extrémités d'un diamètre de l'arbre moteur (fig. 5), dont l'intensité commune F satisfait à la relation :

$$2 R \cdot F = \mathcal{M}$$

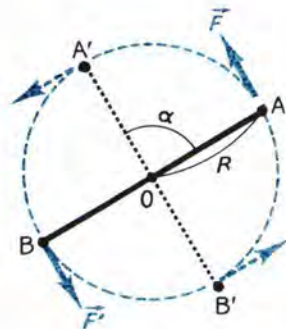


Fig. 5.

Pour une rotation α (rd), le travail de chaque force est égal à $FR\alpha$ (§ 5); par suite, le travail du couple a pour expression :

$$W = 2FR\alpha = 2R \cdot F \cdot \alpha = \mathcal{M} \alpha \quad (5)$$

On voit ainsi, sur ce cas simple, que le travail d'un couple dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation est égal au produit de son moment par l'angle de rotation mesuré en radian.

7. La notion de puissance mécanique.

a. — De deux moteurs produisant le même travail, le plus *puissant* est celui qui produit le travail dans le temps le plus court. Cela conduit à définir la **puissance** d'un moteur par le quotient du travail fourni par le temps mis à le fournir :

$$P = \frac{W}{t}$$

Cette relation donne la puissance *moyenne* du moteur au cours du temps t .

Si le travail fourni est proportionnel au temps mis à le fournir, on dit que le moteur fonctionne en *régime permanent*. Sa puissance P est alors une *constante*, numériquement égale au travail fourni par unité de temps.

b. — L'unité SI de puissance est le **watt** (W), puissance d'un moteur fournissant, en régime permanent, un travail de 1 joule par seconde.

En France, on utilise encore le **cheval** (ch), égal, par définition, à 75 kilogrammètres par seconde; par suite (puisque 1 kgm $\approx$ 9,8 J) :

$$1 \text{ ch} \approx 735 \text{ W} = 0,735 \text{ kW}$$

B. LE THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

8. L'expression de l'énergie cinétique.

a. — Pour un point matériel.

On appelle **énergie cinétique** d'un point matériel à un instant donné le *demi-produit de sa masse par le carré du module de sa vitesse* à cet instant :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (6)$$

Nous justifierons cette définition dans un prochain chapitre, quand nous étudierons l'énergie mécanique.

La relation (6) montre que l'énergie cinétique est une quantité essentiellement *positive*. Elle se mesure en *unités de travail*, pour une raison qui apparaîtra au paragraphe suivant.

b. — Pour un système de points matériels.

L'énergie cinétique d'un système matériel quelconque est à chaque instant la somme des énergies cinétiques des points matériels qui le constituent; en particulier, *l'énergie cinétique d'un solide est la somme des énergies cinétiques des éléments matériels en lesquels on peut décomposer ce solide* :

1° Si le solide est animé d'un **mouvement de translation**, tous ses points ont à chaque instant des *vecteurs-vitesse* $\vec{v}$ *équipollents*, de sorte que l'énergie cinétique du solide a pour expression :

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = \frac{1}{2} m v^2$$

où m désigne la *masse du solide*, égale à la somme ($m_1 + m_2 + m_3 + \dots$) des masses de ses éléments matériels.

2° Si le solide est animé d'un **mouvement de rotation autour d'un axe**, tous ses points ont à chaque instant *même vitesse angulaire* ω . Un point matériel de masse m_1 , situé à la distance r_1 de l'axe, a une vitesse linéaire $v_1 = \omega r_1$ et, par suite, une énergie cinétique égale à :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2$$

L'énergie cinétique du solide a donc pour expression :

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2$$

Comme $\sum m_i r_i^2$ représente le **moment d'inertie J du solide par rapport à l'axe de rotation**, il vient :

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (7)$$

En comparant les relations (6) et (7), nous retrouvons la correspondance entre grandeurs intervenant dans les translations et les rotations :

— A la vitesse linéaire v correspond la vitesse angulaire ω ;

— A la masse m correspond le moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation.

3° Si le **mouvement du solide est quelconque**, nous savons qu'on peut toujours le décomposer en un *mouvement de son centre de gravité* et une *rotation autour d'un axe Δ passant par le centre de gravité*. L'énergie cinétique du solide, à un instant où la vitesse du centre de gravité est $\vec{v}$ et où la vitesse angulaire de rotation est ω , a donc pour expression :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (8)$$

Dans cette relation, m désigne la *masse* du solide et J son *moment d'inertie* par rapport à l'axe Δ .

Exemple.

Évaluons l'énergie cinétique d'une bille homogène de masse m , qui roule sans glisser sur un plan quelconque,

à un instant où son centre de gravité a la vitesse $\vec{v}$:
Soit $X'X$ la trajectoire du centre de gravité G , supposée rectiligne (fig. 6).

Entre l'instant t et un instant $t + \Delta t$, assez voisin de t pour que l'on puisse admettre que le vecteur-vitesse du point G conserve le module v , ce point se déplace de :

$$\Delta x = v \Delta t$$

Du fait que la bille roule *sans glisser* sur le plan P , ce déplacement du centre de gravité s'accompagne d'une rotation de la bille d'un angle $\Delta \alpha$ autour d'un diamètre à la fois perpendiculaire à $X'X$ et parallèle au plan P ; le point de contact de la bille sur le plan passe de M en

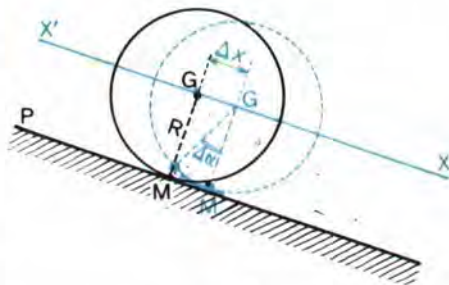


Fig. 6.

M', tel que la longueur de l'arc $\widehat{MM'}$ soit égale à Δx .

$$\text{Or : } \widehat{MM'} = R \cdot \Delta\alpha$$

$$\text{Par suite : } R \cdot \Delta\alpha = \Delta x ; R \cdot \Delta\alpha = v \cdot \Delta t ; \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{v}{R}$$

Comme $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ mesure la *vitesse angulaire* ω de la rotation de la bille, on voit que *cette vitesse angulaire et la vitesse du centre de gravité sont liées à chaque instant par la relation :*

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Exprimons l'énergie cinétique de la bille à l'instant t ; il vient, d'après la relation (8) :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$$

$$J = \frac{2}{5} m R^2 ; \quad \omega^2 = \frac{v^2}{R^2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} mv^2$$

$$E_c = \frac{7}{10} mv^2$$

Application numérique.

Si $m = 30$ grammes et $v = 3$ m/s, nous avons, en unités SI :

$$m = 0,03 \text{ kg}; \quad v^2 = 9 \\ E_c = 0,7 \times 0,03 \times 9 = 0,189 \text{ joule.}$$

9. Le théorème de l'énergie cinétique.

Soit un solide de masse m tombant en *chute libre*.

Supposons qu'il ait été lâché à l'instant zéro sans vitesse initiale; à un instant quelconque t , il est tombé d'une hauteur h (fig. 7) et a acquis une vitesse de translation verticale de valeur v ,

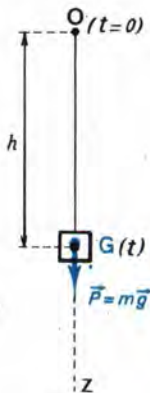


Fig. 7.

telle que :

$$v^2 = 2 gh \quad (\text{p. 25}).$$

Multiplions les deux termes de cette égalité par $1/2 m$:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh.$$

L'expression $1/2 mv^2$ représente la variation de l'énergie cinétique du solide entre les instants zéro et t (puisque l'énergie cinétique était nulle à l'instant zéro); d'autre part, le produit $mgh = Ph$

exprime le travail effectué par le poids $\vec{P}$ du solide au cours de la chute.

Ainsi, la variation que subit l'énergie cinétique d'un corps pendant une chute libre est égale au travail du poids, c'est-à-dire de la *seule force* qui s'exerce sur le corps au cours de la chute.

Nous avons là l'expression, dans un cas particulier très simple, d'une propriété générale que l'on démontre à partir du principe fondamental de la Dynamique* et dont l'énoncé constitue le

Théorème de l'énergie cinétique :

La variation de l'énergie cinétique d'un système matériel entre deux instants donnés est égale à la somme algébrique des travaux effectués entre ces instants par toutes les forces (intérieures et extérieures) qui s'exercent sur les diverses parties du système.

Dans cette somme algébrique, les travaux des forces motrices (ou des couples moteurs) sont comptés *positivement* et les travaux des forces résistantes (ou des couples résistants) sont comptés *négativement*.

S'il s'agit de la variation de l'énergie cinétique d'un **solide** indéformable, seuls comptent les travaux des **forces extérieures**, car le travail des forces intérieures est nul.

Le théorème de l'énergie cinétique, comme les relations $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ et $\mathcal{M} = J\alpha$, est une conséquence du principe fondamental de la Dynamique : aussi peut-on l'utiliser à la place de ces relations dans la résolution des problèmes de Dynamique; les solutions obtenues sont souvent plus simples, ainsi que le montrent les quelques exemples suivants.

10. Exemples d'application du théorème de l'énergie cinétique.

a. — Le mouvement de translation rectiligne d'un véhicule.

Un camion de 7 tonnes, partant du repos, atteint sa vitesse de croisière, $v = 72$ km/h, en parcou-

rant 500 m d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Calculons la résultante des forces qui s'exercent sur le camion au cours de ce mouvement.

Pendant le mouvement considéré, l'énergie cinétique du camion passe de zéro à $\frac{1}{2}mv^2$, elle varie donc de :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$m = 7\,000 \text{ kg}; \quad v = 20 \text{ m/s}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \times 7\,000 \times 400 = 14 \times 10^5 \text{ joules.}$$

Le mouvement étant une translation uniformément accélérée, les forces extérieures s'exerçant sur le camion admettent une résultante *constante* $\vec{F}$, de mêmes direction et sens que ce mouvement. D'après le théorème de l'énergie cinétique, cette force $\vec{F}$ effectue un travail moteur égal à la variation d'énergie cinétique ΔE_c .

Comme ce travail correspond à un déplacement $l = 500 \text{ m}$ du point d'application de $\vec{F}$, nous avons :

$$W = Fl = \Delta E_c$$

$$F = \frac{\Delta E_c}{l} = \frac{14 \times 10^5}{5 \times 10^2} = 2\,800 \text{ newtons}$$

$$\left(\text{ou } \frac{2\,800}{9,8} \approx 286 \text{ kgf} \right)$$

b. — La rotation d'un solide ; l'exemple d'un volant.

Un **volant** est une roue de masse importante que l'on fixe sur l'arbre d'un moteur pour en régulariser la vitesse de rotation.

Considérons par exemple le moteur qui actionne une machine-outil ; nous avons vu (p. 70) que l'ensemble formé par l'arbre du moteur et les pièces tournantes solidaires de cet arbre constitue un solide mobile autour d'un axe dont la vitesse de rotation dépend des actions antagonistes d'un couple *moteur* et d'un couple *résistant*.

La bonne utilisation du moteur exige que cette vitesse de rotation ne s'écarte pas trop d'une certaine valeur optimale, dite vitesse « de régime » ; on fait donc en sorte que la somme algébrique des moments de ces deux couples s'annule lorsque la vitesse de régime est atteinte. Toute variation ultérieure de l'un ou l'autre de ces couples entraîne une variation de la vitesse de rotation.

Évaluons cette variation de vitesse angulaire en appliquant le théorème de l'énergie cinétique :

Désignons par :

ω et $\omega + \Delta\omega$ les vitesses angulaires à deux instants t et $t + \Delta t$;

W_M et W_R les valeurs algébriques des travaux effectués respectivement par les couples moteur et résistant entre ces deux instants ; J le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation de toute la partie tournante.

La variation de l'énergie cinétique de cette partie tournante, entre les deux instants considérés,

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}J(\omega + \Delta\omega)^2 - \frac{1}{2}J\omega^2$$

est égale à la somme algébrique des travaux :

$$W_M + W_R$$

$$\text{Or : } \frac{1}{2}J(\omega + \Delta\omega)^2 - \frac{1}{2}J\omega^2 \approx J\omega\Delta\omega$$

($\Delta\omega$ étant supposé très petit par rapport à ω , le terme $\frac{1}{2}J\Delta\omega^2$ est négligeable devant les autres termes).

Par suite : $J\omega\Delta\omega \approx W_M + W_R$

On en tire :

— La variation de la vitesse angulaire de la partie tournante :

$$\Delta\omega = \frac{W_M + W_R}{J\omega} \quad (9)$$

— La variation *relative* de cette vitesse angulaire :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{W_M + W_R}{J\omega^2} \quad (10)$$

Supposons que la variation de vitesse soit le fait d'une *diminution* du couple résistant, consécutive par exemple à une réduction temporaire du service demandé à la machine actionnée par le moteur ; la valeur absolue $|W_R|$ du travail résistant est alors inférieure à celle du travail moteur, la somme algébrique $W_M + W_R$ est positive et la vitesse de rotation croît ($\Delta\omega > 0$).

Pour le même excès du travail moteur sur le travail résistant, c'est-à-dire **pour la même variation du couple résistant, les relations précédentes montrent que la variation de la vitesse de rotation est d'autant plus faible que le moment d'inertie J de la partie tournante est plus grand.**

En fixant sur l'arbre un volant convenablement choisi, on donne au moment d'inertie J une valeur suffisante pour que les variations relatives de la vitesse de rotation n'excèdent pas les limites imposées par un bon fonctionnement du moteur.

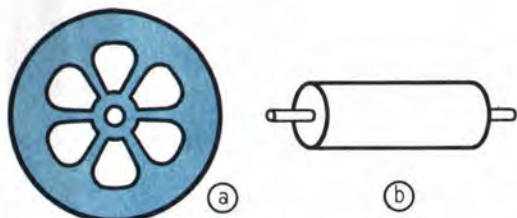
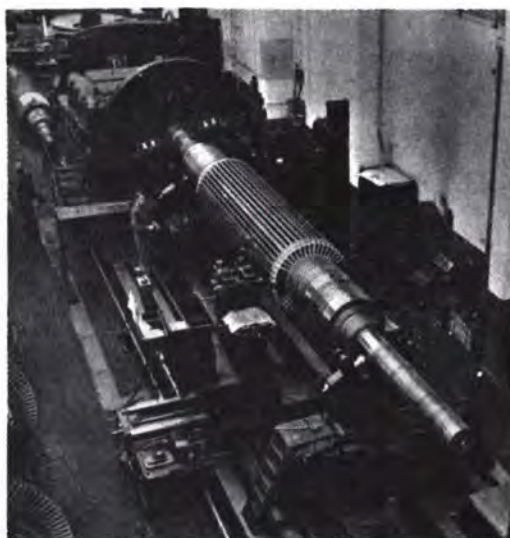


Fig. 8.

Si la vitesse de régime ω n'est pas très élevée (quelques tours par seconde) le volant est une roue de grand diamètre dont la plus grande partie de la masse se répartit sur la jante (fig. 8-a).

Par contre, pour des vitesses angulaires ω de plusieurs dizaines de tours par seconde, la même valeur du produit $J\omega^2$ est obtenue avec un moment d'inertie plus faible et l'on prend des volants cylindriques de faible rayon (fig. 8-b), ce qui présente l'avantage de diminuer le danger de rupture aux grandes vitesses.

Dans une grande machine tournante telle qu'un turbo-alternateur de centrale électrique, par exemple, le *rotor*, dont la masse est considérable, joue le rôle de *volant* (photo ci-dessus).



c. — Rotation et translation simultanées ; l'exemple de la machine d'Atwood.

Le mouvement d'une machine d'Atwood a déjà été étudié dans le cas simple où l'on peut négliger la masse de la poulie (p. 46). Le théorème de l'énergie cinétique conduit à une solution plus simple et aussi plus générale, car elle tient compte de la masse de la poulie.

Prenons comme instant *zéro* l'instant du départ. A un instant quelconque t , les deux solides C et C' ont parcouru le même espace e et ont pris des vitesses de même module v . Dans le même temps t , la poulie a tourné de α (fig. 9) et a pris une vitesse angulaire ω .

Le fil, ne glissant pas dans la gorge de la poulie, communique à celle-ci une vitesse linéaire dont le module v est à chaque instant celui des vitesses de C et C' ; par suite, la vitesse angulaire de la poulie est au même instant :

$$\omega = \frac{v}{r}$$

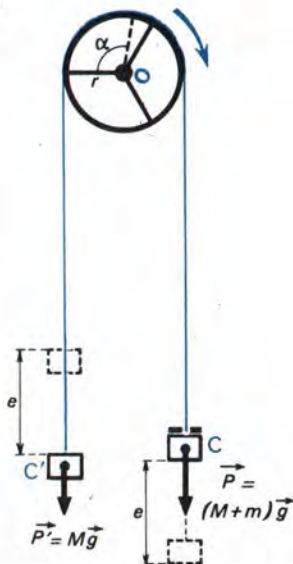


Fig. 9.

r désignant le rayon de la poulie.

Soit J le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe de rotation.

La variation ΔE_c de l'énergie cinétique de l'ensemble de la machine, entre les instants *zéro* et t , est égale à la somme des énergies cinétiques prises par les solides C et C',

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}Mv^2,$$

et de l'énergie cinétique prise par la poulie :

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{J}{r^2}v^2$$

D'où, en mettant $1/2 v^2$ en facteur :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}v^2 \left(2M + m + \frac{J}{r^2} \right)$$

Si l'on néglige les frottements, les seules forces qui interviennent dans le mouvement de l'ensemble sont les poids de C et de C' :

$$\vec{P} = (M+m)\vec{g}; \quad \vec{P}' = M\vec{g}.$$

Entre les instants zéro et t , la somme algébrique de leurs travaux a pour expression :

$$W = Pe - P'e = (M+m)g e - Mge = mge$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= W \\ \frac{1}{2}v^2 \left(2M + m + \frac{J}{r^2} \right) &= mge \\ v^2 &= 2 \frac{mg}{2M + m + \frac{J}{r^2}} \cdot e \end{aligned}$$

que l'on peut écrire :

$$v^2 = 2 \gamma e,$$

en posant :

$$\gamma = \frac{mg}{2M + m + \frac{J}{r^2}} \quad (11)$$

Tout étant constant dans cette expression de γ , la relation $v^2 = 2\gamma e$ est celle qui relie la vitesse à l'espace parcouru, dans un **mouvement uniformément accéléré** dont l'accélération a pour module γ .

Remarque.

Les tensions du fil, de part et d'autre de la poulie, ont des modules T et T' différents.

L'application à la poulie de la formule fondamentale de la Dynamique de rotation donne en effet :

$$\mathcal{M} = J\alpha''$$

$$\text{Or : } \mathcal{M} = Tr - T'r; \quad \alpha'' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma}{r}$$

$$\text{Par suite : } T - T' = \frac{J\alpha''}{r} = \frac{J}{r^2} \gamma$$

Ce qui donne, dans le cas d'une poulie dont la masse m' est pratiquement répartie sur sa jante :

$$J = m'r^2; \quad \frac{J}{r^2} = m'; \quad T - T' = m'\gamma \quad (12)$$

Si la masse de la poulie est négligeable devant les masses de C et C', on trouve :

$$\text{d'après 11 : } \gamma \approx \frac{mg}{2M + m}$$

$$\text{et, d'après 12 : } T - T' = 0; \quad T = T'$$

Ce sont bien les résultats obtenus à la p. 46.

EXERCICES

1. Calculer (en kgm et kJ) l'énergie cinétique d'une automobile pesant 1 200 kg, en mouvement de translation rectiligne à la vitesse de 72 km/h ($g \approx 10$ u. SI).

Rép. : 24 000 kgm ; 240 kJ.

2. Quelle est l'énergie cinétique d'un volant de 100 kg, assimilable à un cylindre homogène de 1 m de rayon, quand il tourne à raison de 600 tours/minute ($\pi^2 \approx 10$) ?

3. Sur un parcours rectiligne de 300 m, la vitesse d'une automobile de 1 200 kg passe de 36 à 72 km/h. Calculer (en kgf) la résultante (supposée constante) de toutes les forces dont elle a subi l'action lors de ce parcours. (Prendre 1 kgf $\approx$ 10 N).

Rép. : 60 kgf.

4. Un tramway démarre sur une voie horizontale. Il atteint au bout d'un moment une vitesse de 20 km/h ; quel est, en kilojoules par tonne de véhicule, le

travail fourni par le moteur pendant le démarrage ? On admettra que les résistances passives (frottement, résistance de l'air, etc.) absorbent 5% de ce travail.

5. Entre deux instants t_1 et t_2 le travail du couple moteur appliqué à un volant surpasse celui du couple résistant de 22 500 joules ; sachant que la vitesse angulaire moyenne du volant est 1,5 tour/s, calculer le moment d'inertie, par rapport à son axe, que doit avoir ce volant pour que, entre t_1 et t_2 , la vitesse angulaire ne varie que du 1/10 de sa valeur.

La matière du volant étant pratiquement tout entière sur la jante, à 1,5 m de l'axe, calculer sa masse.

Rép. : $J \approx 2\,540 \text{ kg.m}^2$; $m \approx 1\,130 \text{ kg}$.

6. Un solide, initialement animé d'un mouvement de translation sur un plan horizontal, aborde un plan incliné de 30° par rapport au plan horizontal avec une vitesse de 1 m/s. Calculer la distance qu'il parcourt sur une ligne de plus grande pente de ce plan avant

de s'arrêter et l'accélération de son mouvement. On admettra qu'il glisse sans frottement et on négligera la résistance de l'air ($g \approx 10$ u. SI).

7. Un volant pèse 1 960 kg. On peut considérer sa masse comme répartie uniformément sur un cylindre de révolution de 60 cm de diamètre.

1° Calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe du cylindre.

2° A partir du repos, on communique à ce volant une vitesse de 300 tours à la minute : calculer le travail fourni.

3° Cette vitesse diminue jusqu'à 297 tours à la minute. Calculer l'énergie restituée par le volant. Ce ralentissement dure 4 secondes : calculer la puissance moyenne développée par le volant pendant ce temps.

Rép. : 1° $J \approx 176 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; 2° $W \approx 87 \text{ kJ}$; 3° $\Delta E_c \approx 1730 \text{ J}$; 433 W.

8. Une machine d'Atwood a une poulie de masse égale à 60 g répartie sur sa circonférence, et des cylindres C et C' (fig. 9) pesant 210 g. La surcharge de C vaut 10 g et les frottements étant négligés, calculer l'accélération du mouvement et les tensions du fil de part et d'autre de la poulie ($g \approx 10$ u. SI).

9. Un camion de 5 t, moteur arrêté et freins desserrés, part sans vitesse initiale, du sommet d'une côte à 5% (dénivellation de 5 cm par mètre de route) :

1° Quelle serait la vitesse au bas de la côte, à 500 m du point de départ, si les forces de frottement dues à l'air et au sol étaient négligeables ?

2° En réalité, lorsque le camion arrive en bas de la côte, sa vitesse est seulement égale à 45 km/h. Évaluer, en kgf, la force moyenne équivalente aux forces de frottement qui s'opposent à l'avancement du camion.

3° Au bas de la côte, le camion arrive sur une route horizontale. Quelle distance pourra-t-il parcourir, le moteur étant toujours arrêté, les freins desserrés, et la résistance moyenne à l'avancement restant équivalente à la force précédemment calculée ? ($g = 9,8$ u. SI).

10. Un cylindre horizontal homogène de masse $M = 20 \text{ kg}$, de rayon $r = 10 \text{ cm}$, mobile autour de son axe de révolution Δ , supporte un solide S, de masse $m = 10 \text{ kg}$, par l'intermédiaire d'une corde enroulée sur la surface du cylindre.

1° Le solide S, partant du repos, tombe d'une hauteur de 3 m en entraînant la rotation du cylindre. En négligeant la masse de la corde et les résistances passives, calculer l'accélération du solide, sa vitesse en fin de chute et la durée de celle-ci ($g \approx 10$ u. SI).

2° A la fin de cette chute, la corde quitte le cylindre lancé; celui-ci se trouve alors soumis à un couple résistant de moment constant qui l'arrête après une rotation de 100 tours. Calculer le moment de ce couple, l'accélération angulaire et la durée de ce freinage.

Rép. : 1° 5 m/s^2 ; $5,5 \text{ m/s}$; $1,1 \text{ s}$.
2° $-0,24 \text{ m} \cdot \text{N}$; $-2,4 \text{ rd/s}^2$; 23 s .

11. Aux deux extrémités d'un fil de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie mobile autour d'un axe horizontal sont accrochées deux masses

$M = 637 \text{ g}$ et $m = 343 \text{ g}$.

1° En négligeant la masse de la poulie, calculer :

- l'accélération que prend le système abandonné à lui-même ;
- la tension du fil.

2° En fait la poulie a un moment d'inertie

$J = 1,96 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,

son rayon est $r = 10 \text{ cm}$ et toute la masse est supposée répartie à la même distance de l'axe. Calculer :

- la nouvelle valeur de l'accélération ;
- les tensions des deux brins de fil ; les comparer.

3° La masse m se déplace suivant la ligne de plus grande pente d'un plan parallèle à l'axe de la poulie et incliné sur le plan horizontal de 30° .

a) Quelles valeurs doit-on donner aux deux masses M et m , leur somme restant la même, pour que l'accélération prenne la même valeur qu'au 1° ?

On négligera la masse de la poulie.

b) Quelle est alors la longueur parcourue, au bout de 2 secondes, par la masse m , sur le plan incliné ?

(On précise que la masse m part du repos, au temps zéro, et que le plan incliné est suffisamment long pour que, au bout des 2 secondes, elle ne vienne pas heurter la poulie.)

c) Le fil est coupé au bout de ces 2 secondes. Combien de temps, à partir de l'origine des temps, la masse m mettra-t-elle pour repasser par sa position de départ ?

On négligera les frottements et l'on prendra dans tout le problème $g = 9,8$ u. SI. (Bacc.).

LES NOTIONS DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET DE MOMENT CINÉTIQUE

A. LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

1. Pour un point matériel.

a. — La définition.

On appelle **quantité de mouvement** d'un point matériel à l'instant t , la grandeur vectorielle $\vec{p} = m\vec{v}$, égale au produit de sa masse par son vecteur-vitesse à cet instant.

La quantité de mouvement se représente par un vecteur de mêmes direction et sens que le vecteur-vitesse et de module mv (fig. 1). En unités SI, ce module s'exprime en **kg·m/s**.

b. — L'égalité de l'impulsion et de la variation de la quantité de mouvement.

Considérons un point matériel M, de masse m , animé d'un mouvement quelconque. Si le vecteur-

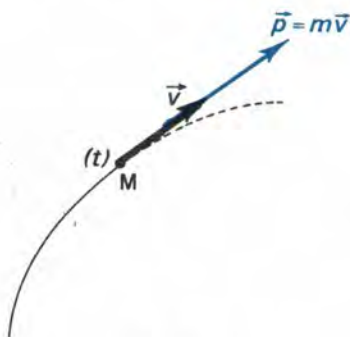


Fig. 1.

vitesse passe de $\vec{v}$ à $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ entre les instants très voisins t et $t + \Delta t$, le vecteur-accélération entre ces deux instants est pratiquement représenté

par le vecteur $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ et la résultante des forces qui s'exercent sur lui est une force

$$\vec{F} = m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

pratiquement constante durant le très court intervalle de temps Δt .

Écrivons la relation précédente sous la forme équivalente :

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \Delta\vec{v}$$

La grandeur vectorielle $\vec{F} \cdot \Delta t$, produit de la force $\vec{F}$ par la durée de son action, est appelée **l'impulsion** reçue par le point matériel au cours de l'intervalle de temps Δt . En unités SI, son module s'exprime en **newton-seconde** (N.s).

D'autre part, le produit $m\Delta\vec{v}$ représente la variation

$$m(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - m\vec{v} = \Delta\vec{p}$$

de la quantité de mouvement du point matériel pendant ce même intervalle de temps Δt .

Ainsi, **la variation de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à l'impulsion qu'il reçoit :**

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

(1)

Cette relation vectorielle est évidemment équivalente à la relation fondamentale $\vec{F} = m\vec{a}$ dont nous l'avons déduite; elle n'apporte rien de plus, mais permet de simplifier le calcul d'une variation de vitesse. Montrons-le sur l'exemple très simple de la chute libre d'une petite bille, assimilable à un point matériel de masse m :

Supposons que la bille soit lancée à l'instant zéro avec une vitesse initiale verticale $\vec{v}_0$ et cherchons quelle sera sa vitesse $\vec{v}$ à un instant t quelconque.

Entre l'instant zéro et l'instant t , la seule force appliquée à la bille est son poids $\vec{P} = m\vec{g}$; cette force étant constante, l'impulsion reçue par la bille a pour expression

$$\vec{P} \cdot t = m\vec{g} \cdot t$$

Écrivons que la variation de la quantité de mouvement de la bille, entre l'instant zéro et l'instant t , est égale à l'impulsion qu'elle reçoit :

$$\Delta \vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = m\vec{g} \cdot t$$

Sur la verticale de chute, prise comme repère orienté, cette relation vectorielle donne la relation algébrique :

$$m(v - v_0) = mgt$$

$$\text{D'où : } v = v_0 + gt$$

Or, appliquée à la chute libre, la relation fondamentale de la Dynamique du point matériel s'écrit : $\vec{P} = m\vec{g}$; comme $\vec{P}$ est constant, le mouvement est uniformément varié, d'accélération $\vec{g}$, et la vitesse à l'instant t a bien pour valeur algébrique :

$$v = v_0 + gt \quad (\text{p. 25})$$

2. L'extension aux systèmes matériels.

a. — La définition de la quantité de mouvement d'un système matériel.

La quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un système matériel quelconque est à chaque instant la **somme vectorielle** des quantités de mouvement de tous les points matériels qui le constituent :

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots$$

— Dans le cas particulier d'un solide animé d'un mouvement de translation, tous ses points ont, à chaque instant, des vecteurs vitesses $\vec{v}$ égaux; par suite :

$$\vec{p} = (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) \vec{v} = m\vec{v}$$

m désignant la masse totale du solide;

— Dans tous les cas on démontre que :

la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un système matériel quelconque est à chaque instant égale à la quantité de mouvement d'un point matériel qui serait confondu avec le centre de gravité du système et dont la masse m serait la masse totale de ce système ⁽¹⁾.

C'est dire que si $\vec{v}$ est la vitesse du centre de gravité à un instant quelconque, la quantité de mouvement du système est à cet instant :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{fig. 2})$$

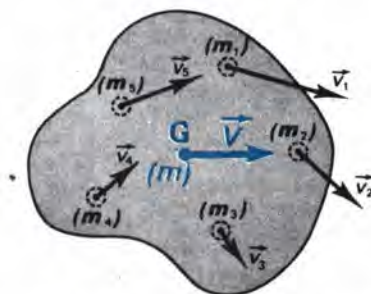


Fig. 2. : $\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots = m\vec{v}$.

b. — L'égalité de l'impulsion et de la variation de la quantité de mouvement.

Il résulte de la relation précédente qu'à toute variation $\Delta \vec{v}$ de la vitesse du centre de gravité correspond une variation $\Delta \vec{p} = m\Delta \vec{v}$ de la quantité de mouvement du système.

Or, d'après le *théorème du mouvement du centre de gravité* (p. 36), la vitesse du centre de gravité d'un système matériel quelconque varie comme celle d'un point matériel de même masse m que le système et auquel s'appliquerait l'ensemble des forces extérieures qui s'exercent sur ce système.

Par suite, si $\vec{F}$ désigne la résultante de ces forces extérieures, transportées au centre de gravité, la relation

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t,$$

établie précédemment pour un point matériel, s'applique aussi à un système matériel :

⁽¹⁾ Cet important théorème est une conséquence du fait qu'un centre de gravité a les propriétés d'un centre de forces parallèles (cours de Seconde). Le *théorème du mouvement du centre de gravité* (p. 36) en est un corollaire.

La variation de la quantité de mouvement d'un système matériel, au cours d'un intervalle de temps Δt , est égale à l'impulsion des forces extérieures.

c. — Exemples d'application dans le cas simple où $\vec{F}$ est constante.

— 1° Pendant la phase accélérée du mouvement de translation vertical, ascendant, d'un monte-charge de masse totale $m = 500$ kg, le module v de la vitesse passe de 0 à 3 m/s en un temps $t = 2$ secondes. De combien la tension du câble excède-t-elle alors le poids du monte-charge?

La force $\vec{F}$ qui donne l'impulsion au système a ici mêmes direction et sens que la vitesse $\vec{v}$ du centre de gravité et son module a une valeur constante, $F = T - P$, égale à l'excès du module de la tension sur celui du poids.

Par suite, la relation $\Delta p = F \cdot \Delta t$ donne, en modules :

$$\Delta p = m(v - 0) = F \cdot t$$

$$\text{D'où : } F = \frac{mv}{t} ; F = \frac{500 \times 3}{2} = 750 \text{ newtons}$$

— 2° L'arrêt d'un train. — Le conducteur d'un train électrique de masse m , lancé sur une voie rectiligne horizontale à une vitesse de module $v = 108$ km/h, coupe le courant et actionne les freins.

Au bout de quel temps t le train s'arrêtera-t-il, si l'on admet que les forces de freinage admettent une résultante $\vec{F}$ parallèle à la voie et de module égal au dixième de celui du poids du train ?

Dans ce cas comme dans le précédent, la relation $\Delta p = F \cdot \Delta t$ s'écrit, en modules :

$$\Delta p = m | (0 - v) | = F \cdot t$$

$$\text{D'où encore : } F = \frac{mv}{t} ; \text{ ou, puisque } F = \frac{P}{10} = \frac{mg}{10}$$

$$\frac{g}{10} = \frac{v}{t} ; t = \frac{10v}{g}$$

Comme $v = 108$ km/h = 30 m/s et $g \approx 10$ unités SI, on trouve :

$$t \approx 30 \text{ secondes.}$$

3. Le cas particulier important où les forces extérieures ont une résultante nulle. La conservation de la quantité de mouvement.

a. — Si $\vec{F} = 0$, la relation $\Delta p = \vec{F} \cdot \Delta t$ donne :

$$\Delta p = 0$$

Le système ne recevant pas d'impulsion extérieure, sa quantité de mouvement ne varie pas : on dit qu'il y a **conservation de la quantité de mouvement**.

Par suite, puisque $\vec{p} = m\vec{v}$ (fig. 2), la constance de $\vec{p}$ entraîne celle de $\vec{v}$: la vitesse du centre de

gravité se conserve. Quel que soit le système matériel considéré, même s'il est formé de plusieurs parties susceptibles de se déplacer les unes par rapport aux autres sous l'action de forces intérieures, le centre de gravité du système demeure immobile ou en mouvement rectiligne uniforme.

b. — Exemples d'applications.

Les patineurs.

Deux personnes, de masses m_1 et m_2 , chaussées de patins, se font face, immobiles sur un plan de glace supposé parfaitement lisse et horizontal. Qu'arrive-t-il si elles se repoussent l'une l'autre ?

Les poids des personnes étant équilibrés par les réactions du plan, les forces extérieures au système matériel que ces personnes constituent ont une résultante nulle. Par suite, la quantité

de mouvement $\vec{p}$ de ce système, initialement

nulle, reste nulle ; si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont les vitesses de translation acquises de part et d'autre à l'instant où cesse la répulsion mutuelle, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Delta p &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \\ \vec{v}_2 &= - \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1 \end{aligned}$$

Les deux vitesses ont même direction, des sens contraires et des modules inversement proportionnels aux masses correspondantes.

S'il s'agit par exemple d'un enfant et d'un homme dont la masse vaut deux fois celle de l'enfant, celui-ci acquiert une vitesse double de celle de l'homme.

D'autre part, le centre de gravité du système déformable que constituent les deux personnes s'éloignant l'une de l'autre conserve la position qu'il avait avant la répulsion.

Le recul d'une arme à feu.

Considérons le système matériel formé par l'arme à feu, le projectile et la poudre. L'explosion de la poudre fournit, en un temps très court, une masse gazeuse enfermée dans un faible volume et portée à une température très élevée.

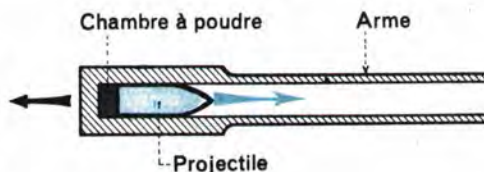


Fig. 3.

Des forces pressantes très intenses s'exercent donc sur le projectile et la paroi interne de l'arme (fig. 3).

Ces forces pressantes sont *intérieures* au système; elles jouent le rôle des forces musculaires de répulsion mutuelle de l'exemple précédent. Par suite, le même raisonnement que ci-dessus conduit encore à la relation ⁽¹⁾ :

$$\vec{v}_2 = - \vec{v}_1 \frac{m_1}{m_2}$$

où m_1 et $\vec{v}_1$ sont la masse du projectile et sa vitesse à la sortie du tube, m_2 et $\vec{v}_2$ la masse de l'arme et sa vitesse de recul à l'instant où le projectile sort du tube.

Application numérique.

Soit par exemple un fusil de masse $m_2 = 4$ kg, communiquant à une balle de masse $m_1 = 15$ g une vitesse initiale (à la sortie du tube) de module $v_1 = 600$ m/s.

La *vitesse de recul* du fusil, à l'instant de la sortie de la balle, a pour module :

$$v_2 = v_1 \frac{m_1}{m_2}, \text{ soit : } v_2 = 600 \times \frac{0,015}{4} = 2,25 \text{ m/s}$$

En fait, l'épaule du tireur soumet le fusil à une impulsion, de sens contraire à la vitesse de recul, qui annule rapidement celle-ci.

Remarque.

S'il est vrai que le projectile et l'arme ont des quantités de mouvement égales en valeurs absolues, leurs énergies cinétiques sont, par contre, très différentes; on a en effet :

$$\frac{1/2 m_1 v_1^2}{1/2 m_2 v_2^2} = \left(\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \right)^2 \times \frac{m_2}{m_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

Le rapport des énergies cinétiques est égal à l'inverse du rapport des masses; dans l'exemple précédent, l'énergie cinétique communiquée à la balle est $\frac{4}{0,015} \approx 267$ fois plus grande que celle de l'arme.

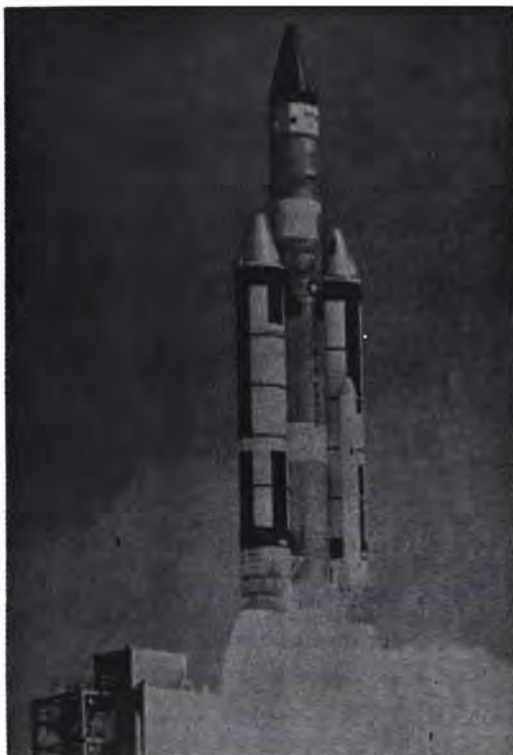
La fusée.

Une fusée est propulsée par un moteur à réaction dont le principe est simple :

Un ensemble combustible-comburant (le *pergol*) ⁽²⁾ produit en réagissant une masse gazeuse à très forte pression; la fusée comportant à l'arrière une ouverture par laquelle les gaz s'échappent, les forces pressantes qui s'exercent sur la paroi du corps de la fusée admettent une résultante $\vec{F}$, de sens contraire à la vitesse d'éjection des gaz, constituant la *force propulsive*, encore appelée *poussée* (fig. 4).

⁽¹⁾ En admettant que la quantité de mouvement des gaz dus à l'explosion de la poudre soit négligeable par rapport à celle des autres masses en mouvement.

⁽²⁾ Par exemple, *hydrogène liquide* + *oxygène liquide*, dans certaines grandes fusées américaines.



Le départ d'une fusée Titan III C.
Photo Keystone.

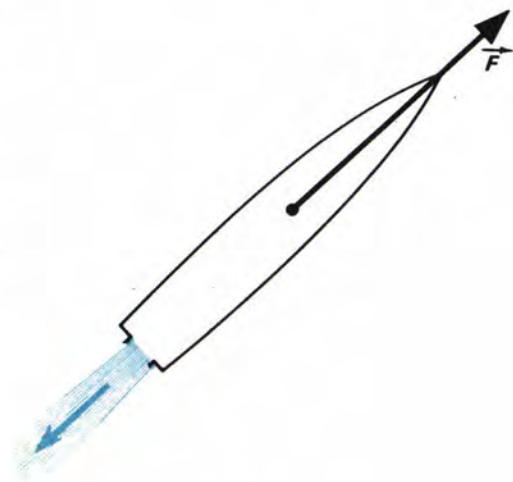


Fig. 4.

L'étude du mouvement d'une fusée est complexe du fait que d'autres forces interviennent (la force de pesanteur et, éventuellement, les attractions astrales; la résistance de l'air, qui décroît à mesure que la fusée s'élève dans l'atmosphère mais ne devient négligeable qu'à une altitude de plusieurs centaines de kilomètres) et aussi parce que la masse du propergol ne cesse de diminuer.

Nous nous limiterons au calcul de l'accélération instantanée et de la poussée dans le cas simple d'une fusée placée dans des conditions pour lesquelles l'impulsion de la résultante des forces extérieures peut être négligée.

Soit, à l'instant t :

- $\vec{v}$, la vitesse de translation de la fusée par rapport à un repère terrestre;
- m , la masse de la fusée (corps + propergol restant).

La quantité de mouvement de la fusée à cet instant est $m\vec{v}$.

Entre l'instant t et un instant ultérieur très voisin $t + \Delta t$, la fusée éjecte une masse Δm de gaz avec une vitesse d'éjection :

- $\vec{v}'$ par rapport à la fusée;
- $\vec{v} + \vec{v}'$ par rapport au repère terrestre.

De ce fait, la masse de la fusée devient $m - \Delta m$, sa vitesse $\vec{v} + \Delta \vec{v}$, et la quantité de mouvement du système fusée + gaz éjectés prend la valeur :

$$(m - \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta m(\vec{v} + \vec{v}')$$

Durant le court intervalle de temps Δt , le trajet de la fusée est pratiquement rectiligne et les vecteurs-vitesse ont le même support; ils ont le même sens pour $\vec{v}$ et $\Delta \vec{v}$, le sens opposé pour $\vec{v}'$.

Écrivons que la quantité de mouvement se conserve; nous obtenons, en modules :

$$(m - \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta m(\vec{v} - \vec{v}') = m\vec{v}$$

quantité de mouvement à l'instant $t + \Delta t$
quantité de mouvement à l'instant t

D'où : $m\Delta \vec{v} - \Delta m\Delta \vec{v} - \Delta m \cdot \vec{v}' = 0$
ou, en négligeant le terme $\Delta m\Delta \vec{v}$, très petit devant les deux autres :

$$m\Delta \vec{v} \approx \Delta m \cdot \vec{v}'$$

Si μ est la masse de gaz éjectée par unité de temps :

$$\Delta m = \mu \Delta t, \text{ d'où : } m \cdot \Delta \vec{v} \approx \mu \cdot \Delta t \cdot \vec{v}'$$

On en déduit :

$$1^\circ \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{\mu v'}{m} \quad \text{Le quotient } \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ représente}$$

pratiquement le module γ de l'accélération du mouvement de translation de la fusée à l'instant t ; comme les fusées sont généralement conçues de façon que μ et v' soient sensiblement constantes, on voit que l'accélération à un instant donné est inversement proportionnelle à la masse de la fusée à cet instant : l'accélération augmente donc sans cesse jusqu'au terme de la combustion du propergol. Elle est, à chaque instant, d'autant plus grande que la masse du corps de la fusée est plus faible, d'où l'intérêt de parois minces et de fusées comportant plusieurs étages, qui se détachent au fur et à mesure que leur propergol est utilisé.

$$2^\circ \quad m\gamma \approx m \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \mu \cdot v' \quad \text{Le produit } m\gamma$$

exprime le module de la poussée à l'instant t . La poussée a donc une intensité pratiquement constante, proportionnelle à la masse de gaz éjectée par unité de temps et à la vitesse d'éjection.

Dans les grandes fusées américaines ou soviétiques utilisées au lancement des engins spatiaux, μ peut dépasser 1 000 kg/s et v' 4 000 m/s, ce qui donne des poussées de l'ordre de :

$$F = \mu v'; \quad F \approx 1\,000 \times 4\,000 = 4 \times 10^6 \text{ newtons (soit, environ, 400 tonnes-force!).}$$

La rencontre de deux solides

Considérons par exemple un patineur de masse m_1 , en translation rectiligne de vitesse $\vec{v}_1$ sur un plan parfaitement lisse et horizontal (fig. 5-a); supposons qu'il intercepte un ballon de masse m_2 ayant, à l'instant de la capture, une vitesse $\vec{v}_2$ horizontale. Quelle sera, après l'interception, la vitesse $\vec{v}$ du patineur portant le ballon?

Immédiatement avant la capture du ballon, la quantité de mouvement du système formé par le patineur et le ballon est :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Immédiatement après, elle est devenue :

$$(m_1 + m_2) \vec{v}$$

Comme le système ne reçoit pas d'impulsion extérieure pendant l'interception, la quantité de mouvement se conserve :

$$(m_1 + m_2) \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

On en déduit la vitesse cherchée :

$$\vec{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 \quad (\text{fig. 5-b})$$

Remarque.

Le problème de la rencontre de deux corps peut être traité d'une autre manière :

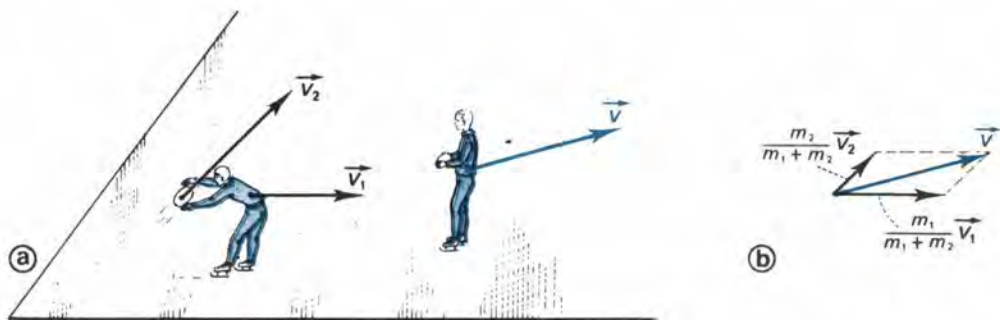


Fig. 5.

Pour chacun des deux corps, la variation de sa quantité de mouvement consécutive au choc est égale à l'impulsion I qu'il reçoit de l'autre pendant la très courte durée du choc :

$$\begin{aligned} I_1 &= m_1 v - m_1 v_1 \\ I_2 &= m_2 v - m_2 v_2 \end{aligned}$$

Or, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction veut que les deux impulsions mutuelles soient opposées :

$$I_1 = -I_2$$

$$\text{Par suite : } m_1 v - m_1 v_1 = m_2 v_2 - m_2 v$$

D'où, comme ci-dessus : $(m_1 + m_2) v = m_1 v_1 + m_2 v_2$
(Voir aussi l'exercice résolu et l'exercice proposé n° 10.)

B. LE MOMENT CINÉTIQUE

4. La définition du moment cinétique.

a. — Pour un point matériel tournant autour d'un axe.

Soit un point matériel M , de masse m , tournant autour de l'axe Δ (fig. 6). Sa trajectoire est une circonférence de centre O et de rayon $OM = r$ contenue dans un plan perpendiculaire à Δ . Si ω est sa vitesse angulaire à un instant donné, sa vitesse linéaire $\vec{v}$ a pour valeur algébrique ωr et sa quantité de mouvement à cet instant est représentée par un vecteur $\vec{p} = m\vec{v}$ dont :

- la direction est tangente à la trajectoire (donc orthogonale à l'axe Δ);
- le sens est celui du mouvement;
- la valeur algébrique est égale à $mv = m\omega r$.

On appelle **moment cinétique** du point M par rapport à l'axe Δ , le moment du vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ par rapport à cet axe.

Ce moment cinétique a donc pour valeur algébrique le produit de mv par la distance r de l'axe au support du vecteur $\vec{p}$:

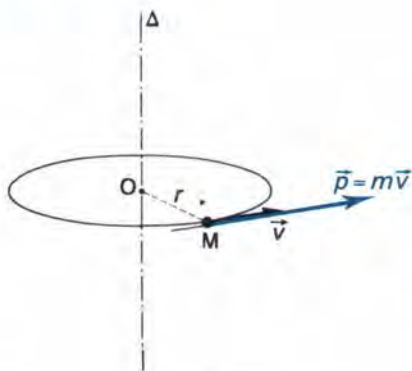


Fig. 6.

$$\sigma = mv \cdot r = m\omega r \cdot r = mr^2\omega$$

L'unité SI de moment cinétique est le **kg. m². rd/s** ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Du fait que le moment cinétique est le moment du vecteur quantité de mouvement, on emploie aussi le m $\wedge$ kg. m/s.

b. — Pour un corps solide tournant autour d'un axe.

Le moment cinétique d'un solide par rapport à un axe de rotation est égal à la somme des moments cinétiques de tous les points matériels qui le constituent. Comme ces points matériels ont à chaque instant même vitesse angulaire ω , la valeur algébrique du moment cinétique a pour expression :

$$\sigma = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + m_3 r_3^2 \omega + \dots = (\sum m r^2) \omega$$

$$\text{Soit : } \sigma = J \omega \quad (2)$$

Ainsi, le moment cinétique d'un solide tournant autour d'un axe est à chaque instant égal au produit $\sigma = J \omega$ de son moment d'inertie J par rapport à l'axe, par sa vitesse angulaire ω à cet instant.

5. L'égalité du moment de l'impulsion et de la variation du moment cinétique.

a. — Le cas d'un corps solide.

Considérons un solide animé d'un mouvement de rotation quelconque autour d'un axe fixe. Supposons que, d'un instant t à un instant très voisin $t + \Delta t$, la vitesse angulaire du solide passe de la valeur ω à la valeur $\omega + \Delta\omega$; son accélération angulaire entre ces instants est pratiquement égale au quotient $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (p. 68). Par suite,

si $\mathcal{M}$ désigne le moment résultant, par rapport à l'axe de rotation, des forces extérieures appliquées au solide, la relation fondamentale de la Dynamique du solide en rotation peut s'écrire :

$$\mathcal{M} = J \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

D'où l'on tire : $\mathcal{M} \cdot \Delta t = J \cdot \Delta\omega$

La grandeur $\mathcal{M} \cdot \Delta t$, produit du moment résultant par la durée de son action, est appelée le **moment de l'impulsion** reçue par le solide au cours de l'intervalle de temps Δt .

Le moment d'inertie J du solide par rapport à l'axe de rotation étant constant, le produit $J \cdot \Delta\omega$ représente la variation

$$J(\omega + \Delta\omega) - J\omega = \Delta\sigma$$

du moment cinétique du solide au cours de cet intervalle de temps Δt . Ainsi :

La variation du moment cinétique est égale au moment de l'impulsion reçue par le solide en rotation :

$$\Delta\sigma = \mathcal{M} \Delta t$$

Remarquons l'analogie entre cette relation et la relation $\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$; le moment résultant $\mathcal{M}$ des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation prend la place de la résultante $\vec{F}$ des forces extérieures et le moment cinétique $\sigma = J\omega$ prend celle de la quantité de mouvement $p = mv$.

Là encore, cette relation n'apporte rien de plus que la relation fondamentale de la Dynamique du solide en rotation dont nous l'avons déduite; elle présente toutefois l'intérêt de simplifier le calcul d'une variation de vitesse angulaire.

Cas particuliers.

1° Si $\mathcal{M} = 0$, on a $\Delta\sigma = 0$:

Si le moment résultant des forces extérieures appliquées à un solide tournant autour d'un axe est nul, le moment cinétique du solide se conserve.

C'est par exemple le cas pour le « rotor » d'un moteur lorsque le moment du couple moteur est égal en valeur absolue au moment du couple résistant; son moment cinétique ne change pas, donc sa vitesse de rotation est constante.

2° Si $\mathcal{M} = \text{constante}$, le moment de l'impulsion reçue par le solide entre deux instants quelconques t_1 et t_2 est $\mathcal{M}(t_2 - t_1)$ et l'on peut écrire, en désignant par ω_1 la vitesse angulaire du solide à l'instant t_1 et par ω_2 la valeur qu'elle atteint à l'instant t_2 :

$$\mathcal{M}(t_2 - t_1) = J\omega_2 - J\omega_1 = J(\omega_2 - \omega_1).$$

On en déduit immédiatement la variation de la vitesse angulaire :

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\mathcal{M}(t_2 - t_1)}{J}.$$

La vitesse angulaire varie proportionnellement au temps; le mouvement de rotation est donc uniformément varié (accélééré si $\mathcal{M} > 0$; retardé si $\mathcal{M} < 0$).

D'autre part, pour la même action des forces extérieures, la variation de vitesse angulaire est d'autant plus faible que le moment d'inertie J du solide par rapport à l'axe de rotation est plus grand.

Nous retrouvons ainsi très simplement des résultats déjà obtenus par application de la relation fondamentale de la Dynamique (p. 70) ou du théorème de l'énergie cinétique (p. 82).

b. — Le cas d'un système déformable.

On démontre que le théorème de l'égalité du moment de l'impulsion et de la variation du moment cinétique s'applique aussi à un système déformable.

En particulier, lorsque le moment résultant $\mathcal{M}$ des forces extérieures appliquées au

système déformable est nul, le moment cinétique du système se conserve. Voici deux exemples simples qui illustrent cette conservation du moment cinétique d'un système déformable.

Exemple I.

Examinons le cas d'un système déformable dont tous les points tournent autour du même axe avec la même vitesse angulaire.

Supposons que le moment résultant des forces extérieures appliquées au système soit nul; alors, le moment cinétique $\sigma = J\omega$ du système ne varie pas au cours de la rotation. Si des forces intérieures provoquent une déformation du système en rotation faisant varier de J à J' son moment d'inertie par rapport à l'axe, la vitesse angulaire varie simultanément de ω à ω' de façon que l'on ait :

$$J'\omega' = J\omega$$

$$\omega' = \frac{J}{J'} \omega$$

— Si le moment d'inertie augmente ($J' > J$), la vitesse angulaire diminue ($\omega' < \omega$);

— Si le moment d'inertie diminue ($J' < J$), la vitesse angulaire augmente ($\omega' > \omega$).

Observons par exemple une personne debout sur un plateau horizontal pouvant tourner autour d'un axe vertical (fig. 7). Si nous négligeons les frottements, les forces extérieures qui agissent sur le système formé par la personne et le plateau sont les réactions verticales des billes supportant le plateau et le poids total du système; comme ces forces sont verticales, donc parallèles à l'axe de rotation, leurs moments par rapport à cet axe sont nuls, de sorte que **le moment cinétique du système se conserve.**

Le système étant mis en rotation, on constate que la vitesse angulaire ω décroît quand l'observateur étend

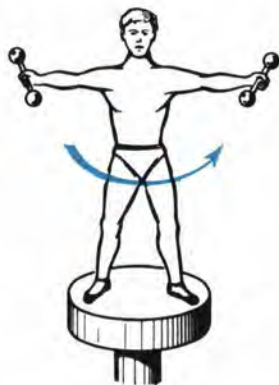


Fig. 7.

les bras horizontalement, ce qui a pour effet d'augmenter le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation; elle croît au contraire quand l'observateur ramène les bras le long du corps.

Si les mains de l'observateur soutiennent des charges, des haltères par exemple, les variations du moment d'inertie sont plus grandes et l'on observe, corrélativement, que les variations de la vitesse angulaire sont plus considérables.

La rotation d'un danseur ou d'un patineur sur la pointe d'un pied donne lieu à des observations analogues; son mouvement se ralentit dès qu'il étend les bras ou allonge une jambe horizontalement et s'accélère au contraire dès qu'il les rapproche de son corps.

Exemple II.

Considérons un autre type de système déformable, formé par deux tiges horizontales t_1 et t_2 (fig. 8), liées par un fil de torsion BC. Si cet équipement est suspendu par un fil sans torsion AA' (un fil de nylon par exemple), il n'est soumis extérieurement qu'à son poids et à la tension du fil AA'; leurs moments par rapport à l'axe de rotation étant nuls, **le moment cinétique total se conserve.**

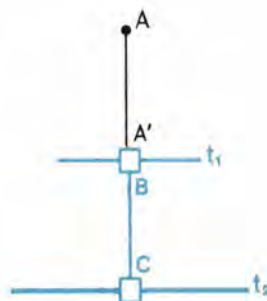


Fig. 8.

Après avoir tordu le fil BC, abandonnons les tiges t_1 et t_2 sans vitesse angulaire initiale. A l'instant du départ, le moment cinétique total est nul : il doit donc rester nul pendant les oscillations simultanées des deux tiges; par suite, si J_1 et J_2 sont les moments d'inertie de ces tiges par rapport à l'axe AC et si, à un instant quelconque, leurs vitesses angulaires sont ω_1 et ω_2 , on doit avoir :

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0$$

$$\omega_2 = -\frac{J_1}{J_2} \omega_1$$

On constate en effet que les deux tiges tournent constamment en sens contraires et que la petite tourne plus rapidement que la grande.

EXERCICES

I. — EXERCICE RÉSOLU

Deux billes B_1 et B_2 sont suspendues côte à côte par de longs fils verticaux. La bille B_1 , préalablement écartée de sa position d'équilibre, vient heurter B_2 au repos (fig. 9) ; on demande les vitesses des deux billes après le choc.

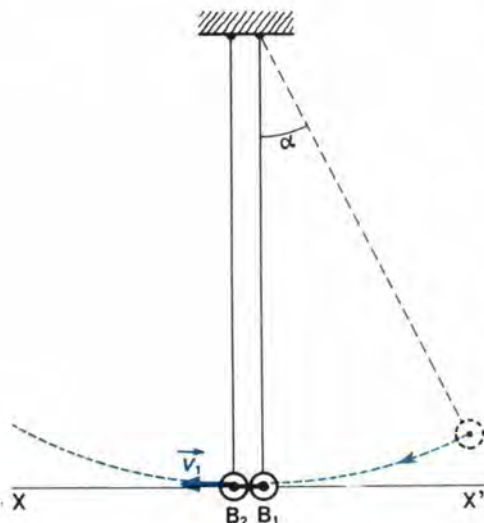


Fig. 9. — Si les fils sont verticaux au moment du choc, celui-ci est le même que si B_1 était initialement animée d'un mouvement de translation uniforme, de vitesse $\vec{v}_1$, le long de l'axe horizontal $X'X$.

Désignons par :

m_1 et m_2 , les masses des deux billes ;
 v_1 et v'_1 , les mesures des vitesses de B_1 immédiatement avant et immédiatement après le choc, comptées algébriquement sur l'horizontale $X'X$;
 v'_2 , la mesure algébrique de la vitesse de B_2 immédiatement après le choc.

Écrivons que le choc ne change pas la quantité totale de mouvement :

$$\underbrace{m_1 v_1}_{\text{avant le choc}} = \underbrace{m_1 v'_1 + m_2 v'_2}_{\text{après le choc}} \quad (3)$$

A elle seule, cette équation ne nous permet pas de calculer les vitesses v'_1 et v'_2 des deux billes après le choc ; en fait, ces vitesses dépendent de l'élasticité des billes.

Si nous admettons que cette élasticité est parfaite, le choc est dit **parfaitement élastique**. Dans ce cas, il y a à la fois conservation de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie cinétique au cours du choc ; l'énergie cinétique totale est la même immédiatement avant et immédiatement après le choc :

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{\text{avant le choc}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2}_{\text{après le choc}} \quad (4)$$

De (3) nous tirons :

$$m_2 v'_2 = m_1 (v_1 - v'_1) \quad (5)$$

et de (4) :

$$m_2 v'^2_2 = m_1 (v_1^2 - v'^2_1) \quad (6)$$

En divisant membre à membre (6) par (5), il vient :

$$v'_2 = v'_1 + v_1 \quad (7)$$

D'où, en combinant (5) et (7) :

$$v'_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}; \quad v'_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

Si les billes sont *identiques*, on a :

$$m_1 = m_2$$

Et, par suite : $v'_1 = 0$; $v'_2 = v_1$

On voit que, dans ce cas, le choc immobilise la bille B_1 et lance la bille B_2 avec une vitesse égale à celle qu'avait B_1 immédiatement avant le choc. L'expérience se réalise avec deux billes identiques en acier ou en ivoire ; le fil de B_2 s'écarte d'un angle approximativement égal à l'amplitude α du déplacement initial de B_1 puis, au retour, le même phénomène se reproduit en sens inverse, les rôles des deux billes étant alors intervertis.

II. — EXERCICES PROPOSÉS

1. Calculer la quantité de mouvement d'un camion de 10 t en mouvement de translation rectiligne à la vitesse de 50 km/h. |

Rép. : $1,4 \times 10^5$ kg.m/s.

2. Un wagon de 10 tonnes, roulant à la vitesse constante de 1 m/s sur une voie rectiligne et horizontale, heurte un wagon de 20 tonnes au repos sur la même voie, freins desserrés. En admettant que les wagons s'accrochent au moment du choc, on demande de calculer la vitesse de l'ensemble après le choc.

3. Le tube de la Bertha de 1918 pesait 140 t et envoyait un obus de 120 kg avec une vitesse initiale de 1 400 m/s; calculer la vitesse initiale du recul.

Rép. : 1,2 m/s.

4. Un wagon de 10 t roule à la vitesse constante de 1 m/s sur une voie rectiligne horizontale. A quelle vitesse doit rouler, sur la même voie et en sens inverse, un wagon de 20 t pour que le choc les immobilise simultanément ?

5. Une personne pousse une automobile de 1 000 kg avec une force constante $\vec{F}$ de 20 kgf (≈ 200 N), parallèlement à la direction du déplacement, supposée rectiligne et horizontale. En négligeant les frottements, calculer la vitesse communiquée à l'automobile, partant du repos, au bout de 10 s de poussée.

Rép. : 2 m/s.

6. On admet que dans le canon d'un petit pistolet, l'intensité de la force qui pousse la balle varie en fonction du temps suivant la relation :

$$F = 400 - \frac{4 \times 10^5}{3} t \text{ (newton)}$$

Représenter graphiquement les variations de F en fonction du temps et en déduire l'impulsion totale ($\Sigma F \cdot \Delta t$) entre l'instant $t = 0$ (départ du coup) et l'instant $t = 3 \times 10^{-3}$ seconde (sortie de la balle).

La masse de la balle étant $m = 2$ g, calculer sa vitesse à la sortie du canon.

7. Un corps solide de 10 g glisse (sans frottement) sur un plan horizontal à la vitesse constante de 20 cm/s et heurte de plein fouet un autre solide de 30 g glissant dans la même direction et en sens contraire avec une vitesse constante de 10 cm/s. En admettant qu'à la suite du choc il y a conservation de l'énergie

cinétique totale, trouver le sens et la vitesse du mouvement de chacun des deux corps après le choc.

Rép. : les 2 mouvements changent de sens ; vitesses : 0,25 m/s et 0,05 m/s.

8. Le canon d'un avion tire un projectile de 7,6 kg avec une vitesse initiale de 570 m/s. Sachant que l'avion pèse 15 t, calculer la variation de la vitesse de l'avion quand il tire dans la direction de son vol, supposé rectiligne horizontal.

9. Quelle est la valeur moyenne $\frac{\Sigma_0^t F \cdot \Delta t}{t}$ de la force de recul d'une arme automatique tirant 120 balles de 12 g à la minute avec une vitesse de sortie des balles égale à 900 m/s ?

Rép. : 21,6 newtons.

10. Une pierre de 100 g repose sur un plan horizontal parfaitement poli. Une balle de 2,5 g, animée d'un mouvement rectiligne uniforme horizontal de vitesse égale à 400 m/s, heurte la pierre et rebondit à angle droit avec une vitesse de 300 m/s.

1° Trouver la direction et le module de la vitesse de la pierre après le choc.

2° Préciser la direction et le module des impulsions reçues par la pierre et par la balle pendant le choc.

11. Un expérimentateur, debout au centre d'un tabouret tournant, a les bras étendus et soutient la même charge dans chaque main ; le tabouret tourne sans frottement appréciable autour d'un axe vertical à raison de 0,5 tour par seconde. Que devient la vitesse de rotation quand l'expérimentateur ramène les bras le long du corps ? On admettra que le moment d'inertie, par rapport à l'axe, du système homme-tabouret est $5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ et que les bras chargés sont équivalents à deux masses de 5 kg dont les centres de gravité passeraient de 90 cm à 15 cm de l'axe de rotation.

Rép. : 1,25 tour par seconde.

12. Un petit gyroscope, assimilé à un disque homogène de masse $m = 100$ g et de rayon $r = 5$ cm, est lancé à raison de 3 600 tours par minute.

On applique sur sa surface latérale un patin de frein ayant la même action qu'une force résistante tangentielle d'intensité F constante.

Calculer F , sachant que le gyroscope s'immobilise en 5 secondes.

LE PENDULE PESANT

A. LE CAS GÉNÉRAL D'UN PENDULE PESANT QUELCONQUE

1. Les définitions.

a. — On appelle **pendule pesant** tout corps solide mobile autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité; sauf exception, nous n'envisagerons que des pendules mobiles autour d'axes *horizontaux*. Le balancier d'une horloge ou d'un métronome, le fléau d'une balance, une balançoire, une roue de bicyclette avec son pneu et sa valve sont des exemples de pendules pesants.

Les forces qui s'exercent sur le pendule sont le poids P de ce pendule, les réactions du support, la poussée d'Archimède due à l'air et, si le pendule est en mouvement, la résistance de l'air et les forces de frottement exercées par le support sur l'axe de rotation.

Nous utiliserons des pendules faits de matières assez denses pour que la poussée d'Archimède soit pratiquement négligeable devant le poids. Nous supposons aussi que les frottements au niveau de l'axe sont négligeables et que le mouvement demeure assez lent pour que l'on puisse négliger également la résistance de l'air.

Comme les droites d'action des réactions du support rencontrent l'axe de rotation, le moment de ces forces par rapport à cet axe est nul. Il s'ensuit que, dans les conditions précisées, **la seule force que nous ayons à considérer dans l'étude de l'équilibre et du mouvement du pendule est le poids P de ce pendule, appliqué en son centre de gravité G** (fig. 1).

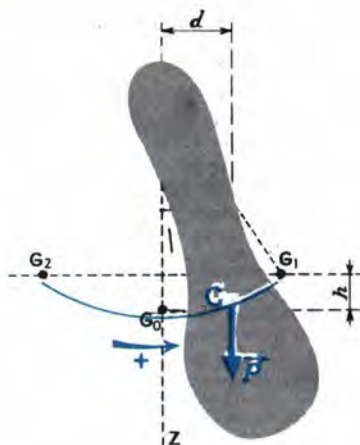


Fig. 1.

b. — La position d'équilibre du pendule.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que le moment du poids P par rapport à l'axe de rotation soit nul. Cela se produit quand la droite d'action du poids P , c'est-à-dire la verticale passant par G , rencontre l'axe de rotation. Seule, la position G_0 se trouvant au-dessous de l'axe de rotation est une position d'équilibre *stable*; nous l'appellerons la **position d'équilibre** du pendule.

c. — La périodicité du mouvement.

Écartons le pendule de cette position d'équilibre, G venant par exemple en G_1 , dans la position d'écart α_m , puis abandonnons-le sans vitesse initiale. Le moment de $\vec{P}$ par rapport à l'axe O n'étant plus nul, on observe un mouvement de rotation qui s'accélère de G_1 en G_0 ; corrélativement, le pendule acquiert une énergie cinétique, égale au travail moteur qu'effectue le poids $\vec{P}$ entre G_1 et G_0 .

Du fait de cette énergie cinétique, le pendule dépasse la position d'équilibre et G remonte jusqu'en G_2 , d'un mouvement de rotation que retarde maintenant l'action du poids $\vec{P}$, devenue résistante. Corrélativement, l'énergie cinétique diminue jusqu'à s'annuler en G_2 .

Le pendule rebrousse alors chemin et le mouvement se poursuit de G_2 en G_1 , pour recommencer ensuite, alternativement, dans un sens et dans l'autre.

L'énergie cinétique gagnée au cours d'une descente est perdue lors de la remontée suivante. D'après le théorème de l'énergie cinétique, le travail résistant qu'effectue le poids pendant cette remontée est donc égal et de signe contraire au travail moteur effectué pendant la descente, de sorte que les positions extrêmes G_1 et G_2 sont dans le même plan horizontal.

Ainsi, en l'absence de toute résistance passive, le mouvement d'un pendule pesant, initialement écarté de sa position d'équilibre, est un **mouvement oscillatoire entre deux positions extrêmes, symétriques par rapport à la position d'équilibre**.

Par raison de symétrie, les parcours $G_0G_1G_0$ et $G_0G_2G_0$ ont même durée; il s'ensuit que **le mouvement est périodique**.

La **période T du pendule** est l'intervalle de temps constant qui sépare deux passages consécutifs par la même position, dans le même sens. Le mouvement qu'effectue le pendule pendant une période constitue une **oscillation**.

Enfin, nous appellerons :

— **Élongation angulaire** du pendule à chaque instant la valeur algébrique α de l'angle d'écart entre la position actuelle et la position d'équilibre (fig. 1);

— **Amplitude angulaire**, la valeur absolue α_m de l'élongation angulaire maximale.

d. — L'amortissement des oscillations.

En réalité, même pour un pendule oscillant dans le vide, les résistances passives ne sont jamais nulles. Du fait de leur action constamment

résistante, le pendule ne remonte pas exactement à son niveau de départ et l'**amplitude diminue progressivement** : on dit que le mouvement du pendule **s'amortit**.

Admettre que ces forces d'amortissement sont négligeables, c'est admettre que l'**amplitude α_m demeure pratiquement constante**.

2. L'étude dynamique des oscillations du pendule pesant.

a. — Appliquons au mouvement d'un pendule pesant la relation fondamentale de la Dynamique du solide en rotation.

Puisque la seule force à considérer est le poids $\vec{P}$ du pendule, le moment résultant se confond avec le moment du poids par rapport à l'axe de rotation. La valeur absolue de ce moment est :

$$\mathcal{M} = Pd \quad (\text{fig. 1})$$

Désignons par a la distance du centre de gravité G à l'axe de rotation et par m la masse du pendule :

$$d = a \sin \alpha; \quad P = mg$$

En remarquant que le moment $\mathcal{M}$ et l'élongation angulaire α sont toujours de signes contraires, la valeur algébrique du moment s'écrit :

$$\mathcal{M} = -mg a \sin \alpha$$

On a donc à chaque instant, si J désigne le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= J\alpha'' \\ -mga \sin \alpha &= J \frac{d^2\alpha}{dt^2} \\ J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mga \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

La résolution de cette équation différentielle ne peut être tentée qu'à un niveau plus élevé; disons seulement qu'elle n'admet pas de fonction sinusoïdale comme solution $\alpha = f(t)$.

Les oscillations d'**amplitude quelconque** d'un pendule pesant **ne sont donc pas sinusoïdales**, comme le sont, par exemple, celles d'un pendule de torsion (p. 73).

b. — Dans le cas d'**oscillations de faible amplitude α_m** , l'élongation étant à tout instant un angle petit, on peut écrire :

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad (\text{radian})$$

$$\text{Par suite :} \quad \mathcal{M} \approx -mga \alpha \quad (2)$$

Remplaçons $mga \sin \alpha$ par $mga \cdot \alpha$ dans l'équation (1) :

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mga \alpha = 0$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mga}{J} \alpha = 0$$

ou encore, en posant $\frac{mga}{J} = \text{constante } \omega^2$:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0$$

Contrairement à la précédente, cette équation différentielle admet pour solution :

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Ainsi, **les oscillations de faible amplitude d'un pendule pesant sont pratiquement sinusoïdales.**

Les deux constantes d'intégration α_m et φ représentent l'amplitude et la phase initiale.

Si l'on choisit comme instant initial $t = 0$ un instant de passage par la position d'équilibre, le pendule tournant dans le sens positif, ce mouvement pendulaire a pour équation horaire :

$$\alpha = \alpha_m \sin \omega t$$

Sa pulsation est $\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}$

On en déduit l'expression de sa période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad (3)$$

Remarque.

Nous pouvions obtenir les mêmes résultats en raisonnant comme dans le cas du pendule de torsion :

La relation (2) est en effet de la forme :

$$\mathcal{M}_0 = -C \alpha$$

Le moment résultant $\mathcal{M}$ est donc un *moment de rappel*, proportionnel à chaque instant à l'élongation angulaire. Par suite, d'après la réciproque du théorème établi à propos du mouvement sinusoïdal de rotation (p. 72), les oscillations sont pratiquement sinusoïdales, de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J}} = \sqrt{\frac{mga}{J}}$$

3. Les vérifications expérimentales.

a. — L'enregistrement du mouvement.

La figure 2 montre comment on peut enregistrer la courbe représentant les variations

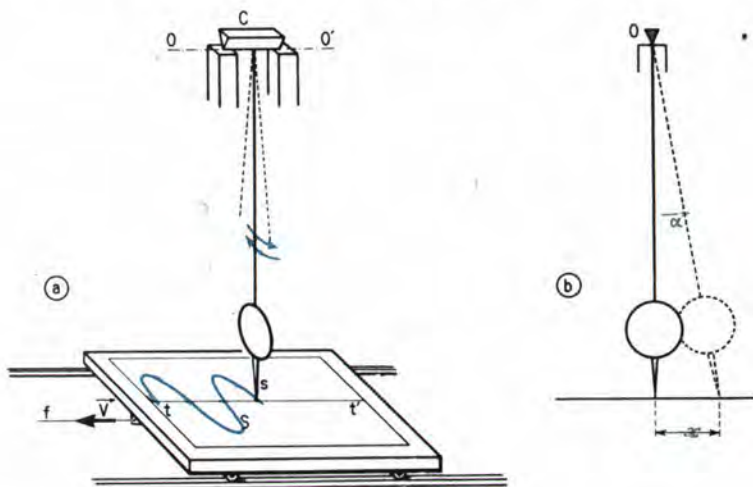


Fig. 2. — L'enregistrement du mouvement pendulaire.

a. Le pendule, mobile autour de l'arête OO' du couteau C , est muni d'un style s qui appuie légèrement sur une plaque de verre enfumée portée par un chariot.

Par l'intermédiaire du fil f un dispositif d'entraînement donne au chariot un mouvement de translation uniforme. Une première translation, le pendule étant en équilibre, donne la droite tt' qui constitue l'axe des temps ; une seconde translation, le pendule oscillant avec une faible amplitude, donne la courbe S .

b. L'élancement linéaire x de la pointe du style et l'élancement angulaire α du pendule sont à chaque instant telles que $x = D \tan \alpha$; comme α est petite, $x \approx D\alpha$, donc la courbe enregistrée, qui représente $x = f(t)$, représente aussi les variations de l'élancement α en fonction du temps.

de l'élongation d'un pendule en fonction du temps. Si l'amplitude est faible et l'amortissement négligeable, cette courbe a l'aspect que représente la figure 3.

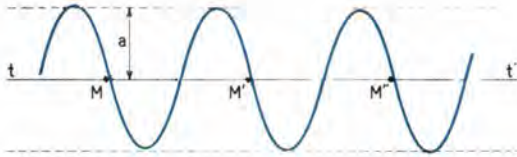


Fig. 3.

1° La mesure des segments MM' , $M'M''$, ..., montre qu'ils sont très sensiblement égaux; on peut aussi décalquer la courbe et faire subir au calque une translation le long de tt' ; on retrouve la superposition quand M vient en M' ou en M'' : le mouvement se répète donc bien périodiquement et les segments tels que MM' et $M'M''$ représentent sa période T .

2° De plus, si l'on construit sur un autre papier calque la sinussoïde d'équation :

$$x = a \sin \omega t,$$

ayant même amplitude a et même pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ que la courbe enregistrée, on voit qu'elle est pratiquement superposable à cette courbe, preuve que le mouvement oscillatoire de faible amplitude d'un pendule pesant non amorti est sinusoidal.

En fait, parce que le dispositif d'enregistrement ne permet pas, en général, de réduire suffisamment l'amortissement, l'amplitude a décroît légèrement d'une oscillation à la suivante, de sorte que la courbe obtenue diffère un peu d'une sinussoïde.

b. — L'isochronisme des oscillations d'amplitude faible.

L'amplitude α_m n'apparaissant pas dans l'expression (3) de la période, on en conclut que :

Pour des oscillations de faible amplitude, la période d'un pendule pesant est indépendante de l'amplitude.

La vérification de cette loi est facile; il suffit par exemple de donner à un pendule quelconque des amplitudes successives d'environ 3° , 5° et 7° et de chronométrer dans chaque cas la durée d'une trentaine d'oscillations : le résultat est le même, aux incertitudes de mesure près, preuve

que ces oscillations d'amplitudes différentes, mais petites, sont isochrones.

En toute rigueur, l'expression (3) de la période — qui suppose $\sin \alpha = \alpha$ (radian) — correspond à des amplitudes infiniment petites.

Si l'amplitude, bien que faible, n'est pas infiniment petite, un calcul plus rigoureux de la période montre qu'elle augmente un peu avec l'amplitude α_m , conformément à la relation :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha_m^2}{16} \right) \quad (4)$$

où T_0 est la valeur $2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$ vers laquelle tend la période lorsque l'amplitude α_m tend vers zéro.

Calculons la valeur que ne doit pas dépasser α_m pour que le terme correctif $\frac{\alpha_m^2}{16}$ soit inférieur ou au plus égal à un millièmè :

$$\frac{\alpha_m^2}{16} < 10^{-3} \quad ; \quad \alpha_m^2 < 1,6 \times 10^{-2} \\ \alpha_m < 0,13 \text{ radian (entre } 7^\circ \text{ et } 8^\circ).$$

Ainsi, tant que l'amplitude n'excède pas 7° , la période T se confond avec T_0 à moins de 1 millièmè près.

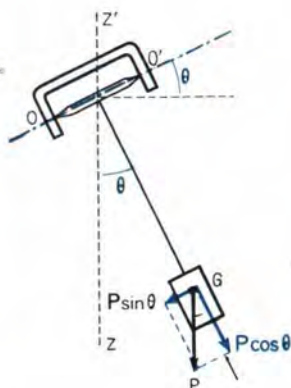
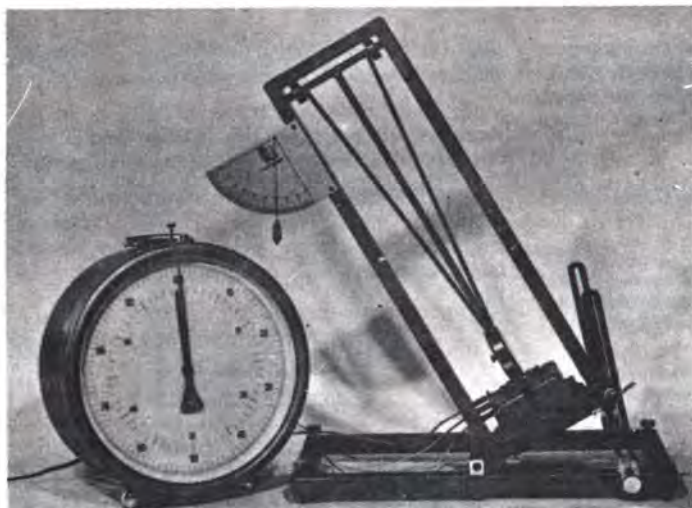
c. — L'influence de l'intensité de la pesanteur.

D'après (3), la période d'un pendule pesant qui oscille avec une amplitude faible est inversement proportionnelle à la racine carrée de g .

On ne pourrait vérifier directement cette loi qu'en changeant de lieu; encore faudrait-il connaître g en chaque lieu avec une grande précision et faire des mesures très précises des périodes en l'un et l'autre lieux, tant sont faibles les variations relatives de g à la surface de la Terre.

En fait, on admet cette loi et nous verrons plus loin qu'on l'a appliquée dans des déterminations précises de g (§ 8). Le fait qu'on arrive ainsi à des résultats qui concordent avec ceux que fournissent d'autres méthodes constitue une vérification expérimentale indirecte de la loi.

Pour illustrer l'influence de la pesanteur sur la période d'un pendule pesant, on peut réali-



L'expérience du pendule incliné.
La mise en marche du chronomètre et son arrêt peuvent être commandés électriquement au passage du pendule par sa position d'équilibre.

Fig. 4. — Pendule incliné.

Le dispositif permet de donner à l'axe de rotation OO' du pendule une inclinaison variable d'une expérience à l'autre.

Le pendule bat dans un plan incliné de θ sur la verticale ZZ' et la force motrice est alors la composante utile ($P \cos \theta$) du poids $\vec{P}$, de sorte que la période des oscillations de faible amplitude a pour expression :

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg \cos \theta \cdot a}}$$

ser l'expérience du pendule incliné (fig. 4) :

Tout se passe comme si g devenait :

$$g' = g \cos \theta$$

et l'on vérifie que T est inversement proportionnelle à $\sqrt{g'}$ en constatant que $T \sqrt{\cos \theta}$ ne change pas quand on fait varier θ .

Comme la période T_0 correspondant à l'axe de rotation horizontal ($\theta = 0$) est :

$$T_0 \approx 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

on voit que :

$$T \sqrt{\cos \theta} = T_0 = \text{constante.}$$

B. LE CAS LIMITE DU PENDULE SIMPLE

4. La définition et l'expression de la période.

a. — On appelle **pendule simple** un point matériel suspendu à un point fixe par un fil inextensible et de masse négligeable ⁽¹⁾.

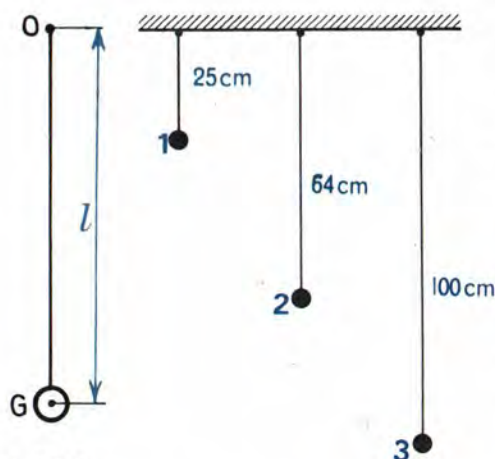
Une petite sphère de masse m , suspendue à un support fixe par un fil très long par rapport

à son rayon, constitue pratiquement un tel pendule.

On appelle **longueur** du pendule simple la distance l du point de suspension au point matériel, c'est-à-dire au centre G de la petite sphère (fig. 5).

Écarté de sa position d'équilibre puis abandonné à lui-même, ce pendule oscille dans un plan fixe. La perpendiculaire à ce plan passant par le point de suspension est l'axe d'oscillation.

⁽¹⁾ Tout pendule pesant qui ne satisfait pas à cette définition est dit *composé*.



▲ Fig. 5.

Fig. 6. — La vérification de la loi des longueurs. ▲ Pour chaque pendule, on détermine la période en mesurant la durée d'une trentaine d'oscillations. Avec les pendules représentés, on trouve des périodes telles que :

$$\frac{T_1}{5} = \frac{T_2}{8} = \frac{T_3}{10}$$

C'est la preuve que :

$$\frac{T}{\sqrt{l}} = \text{constante}$$

b. — La relation (3) permet de calculer la période des oscillations de faible amplitude d'un pendule simple; le moment d'inertie par rapport à l'axe d'oscillation ayant ici la valeur $J = ml^2$, il vient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}$$

ou :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

Application numérique.

Calculons la longueur du pendule simple qui « bat la seconde » (c'est-à-dire dont la période est 2 secondes) à Paris, où $g \approx 9,81 \text{ u. SI}$.

De (5), nous tirons :

$$l = \frac{g T^2}{4\pi^2}; \quad l \approx \frac{9,81 \times 4}{4 \times 9,87} \approx 0,994 \text{ m}$$

Ainsi, le pendule simple qui bat la seconde à Paris a une longueur très voisine de 1 mètre.

5. Les lois particulières au pendule simple.

Comme pour un pendule composé, les oscillations de faible amplitude d'un pendule simple sont *isochrones* et la période de ces oscillations est *inversement proportionnelle* à $\sqrt{g}$.

L'expression particulière de la période des oscillations de faible amplitude d'un pendule simple fait, en outre, apparaître deux autres lois :

1° La loi des substances et des masses. Rien, dans la formule (5), ne caractérise la nature de la matière ni la masse du point matériel, donc :

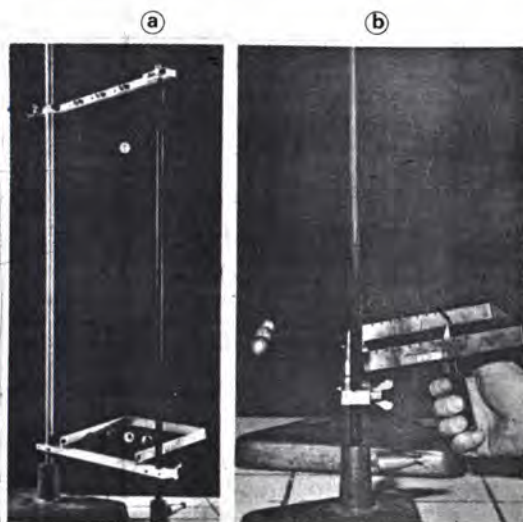
La période d'un pendule simple est indépendante de la nature de la matière du point matériel et de sa masse.

On le vérifie au moyen de pendules de même longueur dont les boules sont de natures et de masses différentes : lâchés en même temps, ils s'accompagnent dans leurs mouvements (v. photo).

2° La loi des longueurs. — La période d'un pendule simple est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule.

En particulier, si la longueur est multipliée par 4 ou par 9, la période est doublée ou triplée. Pour le vérifier, il est commode d'opérer comme l'indique la figure 6.

Des pendules à boules de bois, d'aluminium et de laiton sont maintenus écartés de leurs positions d'équilibre par un fil tendu sur le cadre fixé à la partie inférieure du support (a). On brûle le fil et l'on constate que les pendules s'accompagnent dans leurs mouvements (b).



6. Le pendule simple synchrone d'un pendule composé.

Un pendule simple qui a la même période qu'un pendule composé est appelé **le pendule simple synchrone** de ce pendule composé.

Soit : $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$ la période d'un pendule composé; le pendule simple synchrone a une longueur l telle que :

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

On en tire :

$$l = \frac{J}{ma} \quad (6)$$

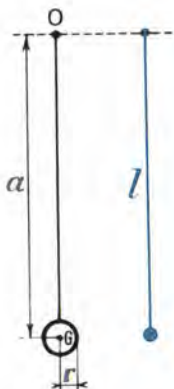


Fig. 7. — Le pendule simple synchrone d'un pendule à boule.

Exemples :

1° **Pendule à boule** (fig. 7). — Cherchons la longueur du pendule simple qui aurait la même période qu'un pendule réalisé avec une petite sphère homogène de masse m et de rayon r . L'expression du moment d'inertie par rapport à l'axe O est (d'après le théorème de Huyghens, p. 71) :

$$J = ma^2 + \frac{2}{5} mr^2$$

Portons dans (6) :

$$l = \frac{J}{ma} = a + \frac{2}{5} \frac{r^2}{a}$$

Si : $a = 1$ m et $r = 1$ cm, il vient :

$$l = 1 + \frac{2}{5} \times 10^{-4} = (1 + 4 \times 10^{-5}) \text{ m}$$

Si l'on confond l et a , on commet donc une erreur relative de 4 cent-millièmes; cela justifie l'assimilation d'un pendule à boule à un pendule simple dans la plupart des expériences et exercices sur le pendule pesant.

2° **Cerceau reposant sur l'arête d'un couteau** (fig. 8). — Assimilons un cerceau à une circonférence pesante de masse m et de rayon R ; appliquons-lui le théorème de Huyghens en remarquant que son centre de gravité est au centre C, à la distance R de O :

$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

Portons cette valeur de J dans la relation (6) :

$$l = \frac{2mR^2}{mR} = 2R$$

La longueur du pendule simple synchrone est égale au diamètre du cerceau.

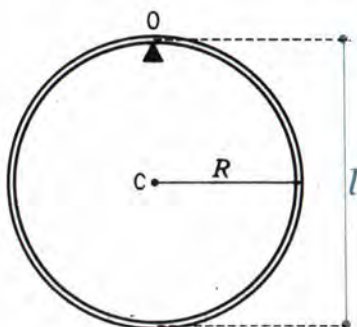


Fig. 8. — Le pendule simple synchrone d'un cerceau.

3° **Pendule réversible.** — Un pendule composé est dit **réversible** quand sa période d'oscillation est la même pour deux axes de rotation particuliers appelés **axes réciproques**.

Des axes réciproques satisfont aux conditions suivantes :

— ils sont **parallèles**;

— le centre de gravité du pendule est dans le plan formé par ces deux axes et à des distances **inégales** de l'un et de l'autre (fig. 9).

On démontre que la longueur du pendule simple synchrone d'un pendule réversible est égale à la distance de ses axes réciproques.

Fig. 9. — Un exemple de pendule réversible. ► Les axes réciproques sont les arêtes des deux couteaux C et C'. La longueur du pendule simple synchrone est la distance de ces arêtes.



Il en résulte que si l est cette distance, la période des oscillations de faible amplitude d'un pendule réversible s'exprime par la formule $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ du pendule simple.

C. LES APPLICATIONS DU PENDULE PESANT ⁽¹⁾

7. La régulation des horloges.

La *périodicité* du mouvement d'un pendule permet de fractionner le temps en intervalles de temps successifs égaux.

Imaginons en effet qu'une aiguille soit assujettie à tourner par saccades autour d'un axe, toujours dans le même sens, en balayant le même petit angle à chaque oscillation d'un pendule : il suffit de lier convenablement ce petit angle à la période T du pendule pour que l'aiguille fasse exactement un tour en 60 secondes, ou bien en 60 minutes, ou bien encore en 12 heures.

C'est ainsi que le *balancier* d'une *horloge* (fig. 10) règle le mouvement des aiguilles en face d'un cadran gradué en temps.

Outre le balancier et les aiguilles, une horloge comprend :

— Un organe moteur (*poids* ou *ressort*), entraînant les aiguilles par l'intermédiaire d'un jeu d'engrenages;

— Un *échappement*, assurant la *mutuelle dépendance* entre ce mécanisme et le balancier régulateur.

L'échappement joue deux rôles essentiels :

1° Commandé par le balancier, il ne laisse les aiguilles faire un « bond » qu'à chaque battement de ce balancier;

2° Sollicité par le moteur, il agit sur le balancier et en *entretient* les oscillations.

L'amplitude n'étant pas infiniment petite, la période n'est en effet constante que si cette amplitude α_m ne change pas (formule (4)) : comme les résistances passives tendent à l'amoin-drir, il faut annuler leur effet à chaque

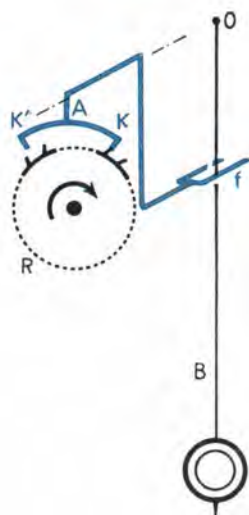


Fig. 10. — Le principe de la régulation d'une horloge. L'organe moteur de l'horloge tend à faire tourner la roue d'échappement R et, à sa suite, les engrenages qui commandent les aiguilles.

L'*ancrer* A du dispositif d'échappement ne permet cette rotation que par « bonds » successifs égaux, bloquant une dent de R tantôt en K, tantôt en K', par suite des oscillations que lui communique le balancier B par l'intermédiaire de la fourchette f. A chaque déblocage, la dent libérée donne à l'ancrer une légère impulsion que la fourchette transmet au balancier.

⁽¹⁾ Cette dernière partie du chapitre peut être considérée comme une *lecture*; elle n'est pas explicitement du programme de la classe.

battement grâce à une impulsion convenable que l'échappement communique au balancier chaque fois qu'il passe par sa position d'équilibre.

8. La mesure précise de l'intensité de la pesanteur.

Considérons un pendule composé dont on a mesuré la période T et soit l la longueur du pendule simple synchrone :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

d'où :

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

On voit que l'on peut déduire g , valeur de l'intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience, des mesures de T et de l .

Il est commode d'opérer avec un pendule réversible, la détermination de l revenant alors à la mesure de la distance de ses axes réciproques, représentés par les arêtes des deux couteaux (fig. 9); cette mesure peut s'effectuer à moins d'un millionième près à l'aide d'un comparateur vertical à deux viseurs.

D'autre part, la période T de ce pendule réversible peut être obtenue avec une précision comparable grâce à la méthode des coïncidences (fig. 11). Il en résulte que le pendule pesant permet de déterminer g à l'approximation tout à fait exceptionnelle du millionième (6 chiffres significatifs sûrs) ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Rappelons qu'on a atteint une précision du même ordre dans la mesure de l'accélération $\vec{g}$ du mouvement de chute libre (p. 24).

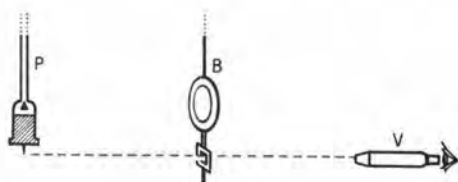


Fig. 11. — Le principe de la mesure de la période d'un pendule par la méthode des coïncidences.

Le pendule P utilisé a une période T' très voisine de la période connue T (égale généralement à 2 secondes) du balancier B d'une horloge. Ces deux pendules oscillent dans des plans parallèles et sont disposés de façon que lorsqu'ils sont en coïncidence — c'est-à-dire passent ensemble par leur position d'équilibre en allant dans le même sens — l'observateur utilisant le viseur V voit la pointe de P au centre de la fente ménagée dans la partie inférieure de B.

Soit θ l'intervalle de temps — lu sur le cadran de l'horloge — séparant deux coïncidences successives : si la période T' du pendule est par exemple légèrement inférieure à la période T du balancier, le pendule a fait, pendant le temps θ , une oscillation de plus que le balancier et l'on a :

$$\theta = nT = (n+1)T'$$

D'où :

$$n = \frac{\theta}{T} = \frac{\theta}{T'} - 1$$

Et :

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T'} - \frac{1}{T}$$

Cette relation permet de calculer T' à partir de T et θ .

EXERCICES

I. — EXERCICES RÉSOLUS

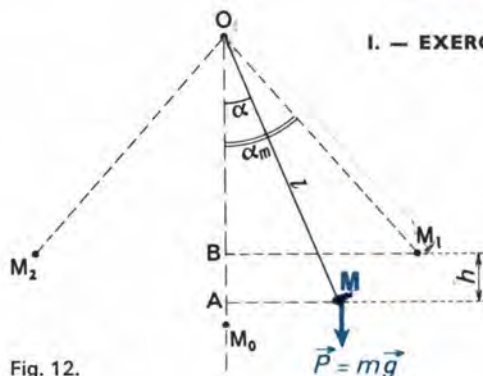


Fig. 12.

1. La vitesse linéaire d'un pendule simple.

Soit un pendule simple de longueur l et de masse m . Calculons sa vitesse à l'instant où son élongation est α (position M, fig. 12) :

Si M_1 est la position extrême du pendule, la variation d'énergie cinétique entre M_1 et M (dans un sens ou dans l'autre) est, d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\pm \frac{1}{2} mv^2 = \pm mgh \text{ (travail du poids } \vec{P} \text{ de } M_1 \text{ en M ou de M en } M_1).$$

D'où : $v^2 = 2gh$.

Comme : $h = OA - OB = l \cos \alpha - l \cos \alpha_m$, on en tire :

$$v^2 = 2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_m) \quad (7)$$

En particulier, au passage par la position d'équilibre M_0 :

$$\alpha = 0; \quad \cos \alpha = 1$$

la vitesse est maximale et a pour module :

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_m)} \quad (8)$$

Remarquons que ces résultats sont valables quelle que soit la valeur α_m de l'amplitude, c'est-à-dire que le mouvement du pendule soit ou ne soit pas sinusoïdal.

D'autre part, la relation $v^2 = 2gh$ montre que la variation de la vitesse en fonction de la hauteur de chute, indépendante de la masse du pendule, est la même que dans une chute libre; cette propriété est illustrée par l'expérience que représente la figure 13, due à Galilée.

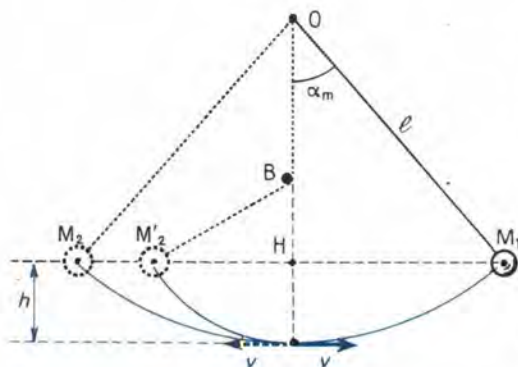


Fig. 13. — La vitesse maximale d'un pendule ne dépend que de sa hauteur de chute.

Soit un pendule simple oscillant entre les positions symétriques M_1 et M_2 :

Si l'on place un butoir B sur la verticale de O, le pendule continue d'osciller mais sa trajectoire devient $M_1M_0M_2$, et l'on observe que M'_2 est dans le même plan horizontal que M_2 .

Cette propriété montre que si le pendule part de points (tels que M_2 et M'_2) situés au même niveau, sa vitesse en M_0 est toujours la même puisqu'elle lui permet dans tous les cas de remonter au même point M_1 .

2. La tension du fil d'un pendule simple.

Un pendule simple peut être considéré comme un point matériel libre, M , soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force de liaison $\vec{T}$ représentant la tension du

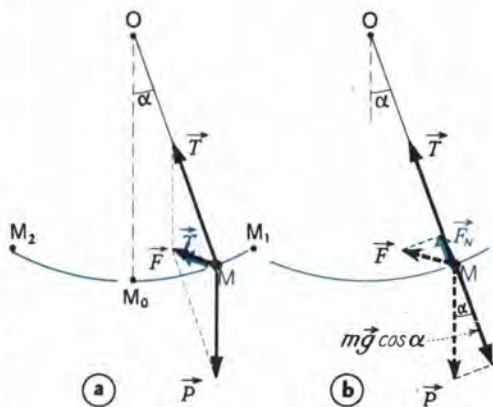


Fig. 14.

fil (fig. 14-a). La résultante $\vec{F}$ de ces deux forces lui donne à chaque instant une accélération $\vec{\gamma}$, telle que :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

En projetant les forces et leur résultante sur la normale à la trajectoire qui se confond avec le fil (fig. 14-b), on obtient, en modules :

$$F_N = T - mg \cos \alpha$$

où α est l'élongation angulaire à l'instant considéré.

La force F_N , projection de $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ sur la normale à la trajectoire, a pour module :

$$F_N = m\gamma_N$$

γ_N étant la composante normale de l'accélération. Or, si v est le module de la vitesse du pendule à l'instant considéré :

$$\gamma_N = \frac{v^2}{l}$$

Donc :

$$F_N = \frac{mv^2}{l}$$

D'où :

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg \cos \alpha$$

$$T = mg \cos \alpha + \frac{mv^2}{l} \quad (9)$$

On voit que la tension est fonction de l'élongation α , à la fois par $\cos \alpha$ et par v . Dans les positions extrêmes M_1 et M_2 , la vitesse est nulle et $\alpha = \alpha_m$; la tension est alors minimale et vaut :

$$T_1 = mg \cos \alpha_m$$

Au passage par la position d'équilibre M_0 , la tension est au contraire maximale :

$$T_0 = mg + \frac{mv^2}{l} \text{ (avec } v \text{ donnée par (8)).}$$

Là encore, les résultats obtenus sont valables quelle que soit la valeur α_m de l'amplitude.

3. L'influence d'une faible variation relative de longueur sur la période d'un pendule simple.

a) Soit T la période d'un pendule simple quand sa longueur est l et soit T' la nouvelle valeur de cette période quand la longueur est un peu différente, l' ; nous avons (si l'amplitude est faible) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}; \quad \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$$

Posons : $l' = l + \Delta l$; $T' = T + \Delta T$ (les accroissements Δl et ΔT étant considérés algébriquement).

$$\frac{T + \Delta T}{T} = \sqrt{\frac{l + \Delta l}{l}}$$

$$1 + \frac{\Delta T}{T} = \sqrt{1 + \frac{\Delta l}{l}} = \left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right)^{1/2}$$

Or, si $\frac{\Delta l}{l}$ est petit devant 1 :

$$\left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{\Delta l}{2l}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\Delta l}{2l}} \quad (10)$$

On voit que la variation relative de période est égale à la moitié de la variation relative de longueur.

b) Supposons par exemple que la variation de longueur soit une dilatation linéaire du fil, consécutive à une variation de température Δt , et désignons par λ le coefficient de dilatation (toujours très petit) de la substance du fil.

Nous avons : $l' \approx l(1 + \lambda \cdot \Delta t)$ (Cours de Seconde)

Par suite : $\Delta l = l' - l \approx l \cdot \lambda \cdot \Delta t$

$$\frac{\Delta l}{l} \approx \lambda \cdot \Delta t$$

Et, d'après (10) :

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\lambda \Delta t}{2}} \quad (11)$$

ΔT et Δt ont le même signe : la période augmente quand la température croît.

Admettons que le fil du pendule soit en acier ($\lambda \approx 1,2 \times 10^{-5}$); calculons l'accroissement de température qui ferait varier la période du dix-millième de sa valeur ($\frac{\Delta T}{T} = 10^{-4}$) :

$$\Delta t \approx \frac{2 \Delta T}{\lambda T} \approx \frac{2 \times 10^{-4}}{1,2 \times 10^{-5}} = \frac{20}{1,2} \approx 17^\circ \text{C.}$$

4. L'influence d'une faible variation relative de l'intensité de la pesanteur sur la période d'un pendule pesant.

En raisonnant comme ci-dessus on voit que si g varie de Δg , la période T d'un pendule simple ou composé subit une variation ΔT telle que :

$$\frac{T + \Delta T}{T} = \sqrt{\frac{g}{g + \Delta g}}$$

$$1 + \frac{\Delta T}{T} = \left(1 + \frac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2}$$

Si la variation de g est assez faible pour que $\frac{\Delta g}{g}$ soit petit devant 1 :

$$\left(1 + \frac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\Delta g}{2g}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{\Delta g}{2g}} \quad (12)$$

Ici, ΔT et Δg sont de signes contraires : la période diminue quand g augmente.

Par exemple, quand on passe de la France à une région polaire, g croît environ des 2 millièmes de sa valeur (p. 34) et ce changement de latitude entraîne une variation relative de la période d'un pendule pesant égale à :

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \approx -\frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3} = -10^{-3}$$

La période diminue du millième de sa valeur.

II. — EXERCICES PROPOSÉS

1. Un petit trou est percé perpendiculairement à l'une des faces d'une règle homogène de 1 m de longueur, sur la médiatrice de cette face et à 20 cm de l'une de ses extrémités. Déterminer la période des oscillations de faible amplitude autour d'un axe horizontal passant par le trou. (Le moment d'inertie d'une règle mince, homogène, de longueur l , de masse m , par rapport à un axe perpendiculaire à

l'une de ses faces et passant par son centre de gravité est : $J = ml^2/12$.) ($g = 9,8$ u. SI).

Rép. : 1,53 s. Remarque que T est indépendante de m .

2. Un pendule pesant, de masse $m = 1$ kg, effectue des oscillations de faible amplitude autour d'un axe horizontal O situé à une distance $a = 0,5$ m du centre de gravité G (fig. 1). Sachant que ce pendule bat

la seconde en un lieu où $g = 9,8$ u. SI, calculer son moment d'inertie J par rapport à l'axe O .

3. Un pendule pesant, supposé simple, est constitué par une masse de 50 g suspendue à un fil métallique fin. Il bat la seconde en un lieu où $g = 9,81$ u. SI, quand sa température est 0°C . L'amplitude étant faible, calculer :

1° La longueur du pendule.

2° Le coefficient de dilatation linéaire du fil, sachant qu'une élévation de température de 0 à 25°C fait varier la période de 3×10^{-4} seconde.

3. Quelle devrait être la variation d'altitude pour que, à 25° , le pendule ait la même période qu'au lieu initial à 0° (le rayon de la Terre supposée sphérique, vaut $R = 6\,400$ km).

4° Quelles seraient la vitesse linéaire du pendule et la tension du fil, au passage par la position d'équilibre, si l'on donnait à l'amplitude la valeur $\alpha_m = 30^\circ$?

Rép. : $0,994\text{ m}$; $2^\circ 1,2 \times 10^{-5}$; $3^\circ - 960$ mètres; $4^\circ 1,62\text{ m/s}$; $0,624\text{ N}$.

4. Une horloge, réglée par un pendule pesant, a une marche exacte en un lieu où $g = 9,81$ u. SI; transportée en un autre lieu, elle retarde de 10 secondes par jour. Calculer la nouvelle valeur de g .

5. Un pendule est formé d'une tige homogène de longueur l , de masse m , oscillant autour de l'une de ses extrémités. A la distance $2l/3$ de cette extrémité est fixée une petite surcharge de même masse m que la tige. Calculer la longueur du pendule simple synchrone. (Le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe perpendiculaire à cette tige passant par son centre de gravité est $ml^2/12$).

Rép. : $2l/3$.

6. Montrer qu'un disque homogène de rayon R a même période quand il oscille successivement autour de 2 axes horizontaux perpendiculaires à son plan, l'un passant par un point de sa circonférence, l'autre perçant le disque à $R/2$ de son centre. Calculer la longueur du pendule simple synchrone. A quelle condition ces 2 axes pourraient-ils être considérés comme les axes réciproques d'un pendule réversible?

Rép. : $l = 3/2 R$; si les axes sont sur le même diamètre, de part et d'autre du centre.

7. Un pendule, assimilé à un pendule simple, est formé d'une petite sphère de fer située à l'extrémité inférieure d'une tige très fine faite d'un métal dont le coefficient de dilatation linéaire est 10^{-5} .

Ce pendule règle une horloge dont la marche est exacte à la température 20°C ; il a alors une période de 2 secondes.

1° On abaisse la température à 0°C : que devient la marche de l'horloge (avance ou retard en un jour)?

2° On maintient la température à 0° et l'on soumet la petite bille de fer, dont la masse est 50 g, à l'action d'un aimant. Comment doit-on placer cet aimant et quelle force (supposée constante) doit-il exercer

pour que l'horloge reprenne une marche exacte? ($g = 9,8$ u. SI).

(D'après un problème de bacc.)

Rép. : 1° L'horloge avance de 8,64 s.; 2° au-dessus; $0,98 \times 10^{-4}\text{ N}$.

8. On compare par la méthode des coïncidences un balancier B , de période $T = 2$ s, à un pendule P qui oscille plus lentement et pour lequel la longueur du pendule simple synchrone est de 1 m.

1° Le temps qui sépare deux coïncidences successives est de 9 mn 50 s. Calculer la période T_0 de P et l'intensité g de la pesanteur au lieu d'observation. Faire les calculs à 1 dix-millième près.

2° L'extrémité inférieure M du pendule P oscille de part et d'autre de la position d'équilibre en décrivant un petit arc de cercle que l'on peut confondre avec la corde. L'amplitude a de ces oscillations est de 6 cm. Calculer la vitesse maximale de M , ainsi que sa vitesse au moment où l'élongation de M est égale à 2 cm.

9. Devant le balancier d'une horloge qui bat exactement la seconde, oscille dans le vide un pendule réversible dont on observe les coïncidences avec le balancier (fig. 11). Le balancier oscille un peu plus vite que le pendule; une première coïncidence, les deux pendules allant dans le même sens, a lieu à 8 heures précises, et une quatrième coïncidence semblable à 8 h 21 mn 40 s.

1° Quelle est la période du pendule-réversible?

2° Chaque coïncidence persiste en apparence pendant 20 secondes : évaluer l'incertitude relative sur la période dans l'expérience précédente. S'il n'y a pas d'autre cause d'erreur, quelle est la précision de la mesure de l'intensité de la pesanteur faite avec ce pendule?

3° Le pendule, au lieu d'osciller dans le vide, oscille dans l'air; quelle variation relative de période en résulte-t-il, en admettant que l'amplitude est faible et que l'action de l'air se réduise à la poussée d'Archimède? Masses volumiques : de l'air dans les conditions de l'expérience, $1,3\text{ g/dm}^3$; du métal du pendule, $8,8\text{ g/cm}^3$.

(Partie de probl. de bacc.)

Rép. : 1° 2,009 s; 2° $0,7 \times 10^{-4}$; $1,4 \times 10^{-4}$; $3^\circ 0,74 \times 10^{-4}$.

10. 1° Un pendule simple de masse $m = 100$ g, de longueur $l = 40$ cm, est abandonné sans vitesse initiale quand il fait 45° avec la verticale; les résistances passives étant négligées, calculer sa vitesse maximale et son énergie cinétique au passage par la verticale.

2° On place un clou horizontal, à 16 cm en dessous et à l'aplomb vertical du point de suspension, que le pendule vient frapper en oscillant : décrire le nouveau mouvement du pendule, préciser les angles que fait le fil avec la verticale dans les 2 positions extrêmes et calculer les tensions correspondantes du fil ($g = 9,8$ u. SI).

11. 1° Un pendule est constitué par une tige métallique OA, de masse négligeable, mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige en son extrémité O, et supportant à l'autre extrémité A une masse M supposée ponctuelle. Ce pendule est assimilable à un pendule simple de longueur OA. Il effectue des oscillations de faible amplitude.

Le pendule battant la seconde à 0°C ($T_0 = 2\text{ s}$) en un lieu où $g = 9,81\text{ u. SI}$, calculer la longueur OA = l_0 à cette température.

2° La température s'élève à 20°C . Quelle variation relative de période en résulte-t-il, sachant que le coefficient de dilatation linéaire de la tige qui soutient la masse M est $\lambda = 1,85 \times 10^{-5}$?

Ce pendule constitue le balancier d'une horloge dont la marche est exacte à 0°C . Cette horloge avance-t-elle ou retarde-t-elle lorsque la température s'élève à 20°C ? De combien par jour?

3° A la température 20°C , la longueur de la tige du pendule est l . On fixe au milieu de la tige (à la distance $\frac{l}{2}$ de l'axe O) une petite masse ponctuelle m .

Calculer la période de ce pendule composé, en fonction de l , M et m . Montrer que la présence de m diminue la période.

Quelle doit être la valeur de m pour que le pendule ainsi modifié batte rigoureusement la seconde à 20°C ?

On donne : $M = 0,500$ kilogramme.

N.B. = On simplifiera les calculs en tenant compte de ce que $\frac{m}{M}$ est petit par rapport à l'unité.

(Bacc.)

Rép. : 1° $0,994\text{ m}$; 2° $1,85 \cdot 10^{-4}$; retard de 16 s ;

3° $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{M + \frac{m}{4}}{M + \frac{m}{2}}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 - \frac{m}{8M}\right)}$;
 $0,74\text{ g}$.

12. 1° Une barre rectiligne homogène MN de longueur 1 m est fixée par son milieu O à un fil de torsion AO. Le fil AO est vertical, MN peut se déplacer dans un plan horizontal, l'ensemble constitue un pendule de torsion dont les oscillations ont une période $T_1 = 1,64$ seconde. On ajoute à chaque extrémité de la barre une surcharge $m = 50$ grammes, la période devient $T_2 = 2,42$ secondes. Déterminer le moment d'inertie J de la barre (sans les surcharges) par rapport à l'axe AO et la constante de torsion C du fil AO.

2° Calculer la vitesse angulaire de la barre munie de ses deux surcharges au passage par sa position d'équilibre au cours d'oscillations d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ radian.

3° On supprime le fil de torsion et l'on enlève une des deux surcharges. Puis la barre est rendue mobile autour d'un axe horizontal passant par O et perpendiculaire à MN; on obtient ainsi un pendule pesant. Déterminer la période des petites oscillations de ce pendule.

4° Calculer la vitesse angulaire de ce pendule pesant au passage par sa position d'équilibre, dans le cas d'oscillations d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ radian.

(Bacc.)

N. B. — Les surcharges m peuvent être considérées comme ponctuelles, et l'intensité de la pesanteur g pour valeur $g = 9,81\text{ u. SI}$.

13. Un pendule simple OA de longueur $l = 1\text{ m}$ est constitué par une bille A de masse $m = 100\text{ g}$; on écarte ce pendule d'un angle $\alpha_m = 30^\circ$ et on l'abandonne.

1° Quelle est la vitesse v de A quand elle passe par la verticale? On prendra $g = 9,8\text{ u. SI}$.

Quelles sont, à cet instant, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique de A?

2° En arrivant à la verticale, la bille A heurte une bille B de masse x , au repos.

En admettant que, dans le choc, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique du système (A, B) se conservent, exprimer en fonction de v , de x et de m (valeurs littérales) :

- la vitesse v_A de A aussitôt après le choc;
- la vitesse v_B de B aussitôt après le choc;
- représenter graphiquement v_A et v_B en fonction de x . Discuter.

Applications numériques : Calculer v_A et v_B pour $x = 50\text{ g}$, $x = 100\text{ g}$, $x = 150\text{ g}$.

3° On prendra $x = 50\text{ g}$ et l'on supposera que B est placée sur le bord d'une table horizontale.

a) Quelle sera l'amplitude angulaire β_m du pendule OA après le choc?

b) Étudier le mouvement ultérieur de B entre la table et le sol situé à $0,80$ mètre au-dessous de la table. On prendra $g = 9,8\text{ u. SI}$.

On admettra dans tout le problème que les frottements divers sont nuls.

(Bacc.)

LA RÉSISTANCE DE L'AIR

A. GÉNÉRALITÉS

1. Les faits d'observation.

a. — Notre expérience de cycliste, de motocycliste ou de passager de véhicules divers nous apprend que *l'air tend à s'opposer aux mouvements*; il les freine d'autant plus que ces mouvements sont plus rapides.

Le mouvement d'un corps dans un fluide fait naître en effet des *forces résistantes*, c'est-à-dire toujours opposées au mouvement. A cause de ces résistances, la chute d'un corps dans l'air peut être très différente d'une chute *libre* (expérience du *tube de Newton*, p. 21) et la trajectoire d'un projectile peut s'écarter notablement de la forme parabolique prévue par la théorie. Ces forces contribuent également à amortir le mouvement d'un pendule.

b. — L'observation de la chute tournoyante d'une feuille montre que l'action de l'air sur un mobile est en général très complexe; elle se traduit par un système de forces équilibrant à chaque instant à une *force résistante* $\vec{R}$, diminuant la vitesse du centre de gravité, et à un *couple*, faisant tourner le corps.

Considérons une sphère légère suspendue par un fil à un support (fig. 1).

1° Si le support se déplace dans l'air calme d'un mouvement de translation rectiligne uniforme, le fil s'écarte de la verticale d'un angle constant α . On en déduit que l'action de l'air sur la sphère en mouvement se réduit à une *force unique* $\vec{R}$, de même direction que la vitesse $\vec{v}$ et de sens contraire.

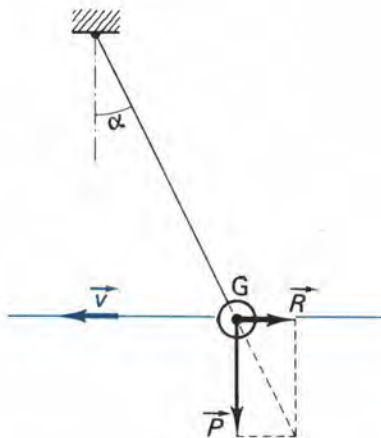


Fig. 1.

Cette propriété peut être généralisée : quand un corps possède un *axe de symétrie* et se déplace d'un mouvement de translation rectiligne dont la vitesse $\vec{v}$ a même direction que cet axe, l'action de l'air se réduit à une force unique $\vec{R}$ que l'on appelle la *résistance de l'air*. La droite d'action de cette force se confond avec l'axe de symétrie du corps et son sens est opposé à celui de la vitesse $\vec{v}$.

2° Si, laissant le pendule immobile, on le place dans un *vent régulier* de vitesse $-\vec{v}$ oppo-

sée à celle qu'avait la sphère précédemment, le pendule s'écarte du même angle α ; on en déduit

que la résistance de l'air R ne dépend que de la vitesse relative du mobile et du fluide.

3° Le même dispositif permet aussi de montrer que la résistance de l'air croît rapidement avec cette vitesse relative.

2. Les causes de la résistance de l'air.

Considérons le cas simple d'un mobile possédant un axe de symétrie et dont la vitesse par rapport à l'air a même direction que cet axe.

a. — Quand le mobile fraie son chemin dans une masse d'air, il se produit au voisinage de la surface du corps en mouvement un déplacement des couches d'air les unes par rapport aux autres; comme l'air a une certaine viscosité, il en résulte des forces de frottement qui s'appliquent tangentiellement à la surface du mobile et admettent une résultante portée par l'axe de symétrie : c'est la **résistance de frottement**.

b. — De plus, si la vitesse relative n'est pas très petite, l'air se trouve comprimé à l'avant du mobile alors qu'un certain volume d'air, entraîné à sa suite, constitue un **sillage** où la pression est plus faible et où se forment généralement des **tourbillons**.

Il en résulte une seconde force résistante, appelée **résistance de forme** parce que, pour une vitesse relative donnée, elle dépend surtout de la forme du mobile.

c. — Quant à l'importance comparée de ces deux composantes de la résistance de l'air, elle est très variable d'un cas à l'autre :

Aux vitesses faibles (inférieures par exemple à 1 m/s) la **résistance de frottement** intervient pratiquement seule; même à des vitesses moyennes, elle reste une fraction non négligeable de la résistance de l'air pour des mobiles **fuselés** comme la carène d'un dirigeable ou le fuselage d'un avion.

Par contre, c'est à peu près uniquement la **résistance de forme** qui agit sur un pare-brise, un parachute ou une aile d'avion dans les conditions usuelles d'emploi.

3. L'étude expérimentale de la résistance de l'air.

Les indications précédentes laissent entrevoir la complexité du problème; il en ressort en effet que :

— Pour un mobile donné, la résistance de l'air dépend de la vitesse relative et des propriétés de l'air (densité, viscosité, compres-

sibilité) qui sont fonctions de sa pression et de sa température.

— Pour un déplacement à vitesse donnée, dans l'air à une pression, une température et un état hygrométrique déterminés, elle dépend de la forme, des dimensions et de l'état de la surface du mobile.

Aussi n'obtient-on de renseignements valables qu'à la suite d'expériences minutieuses comportant des mesures très nombreuses et souvent délicates.

La réalisation de vitesses toujours plus grandes pour les trains, les automobiles et surtout les avions a entraîné, au cours des cinquante dernières années, un développement et un perfectionnement incessants des méthodes expérimentales d'étude de la résistance de l'air. La méthode la plus utilisée est celle du **tunnel aérodynamique** dont la figure 2 donne le principe.

A Chalais-Meudon, la chambre d'expérience a 16×8 m et la vitesse du vent peut atteindre 200 km/h.

La soufflerie de Modane, l'une des plus modernes du monde, donne à l'air des vitesses de l'ordre de 1 000 à 1 200 km/h, dans des « veines » dont le débit est de plusieurs milliers de m³/s.

Dans des veines plus étroites, on arrive à des vitesses dépassant 3 000 km/h.

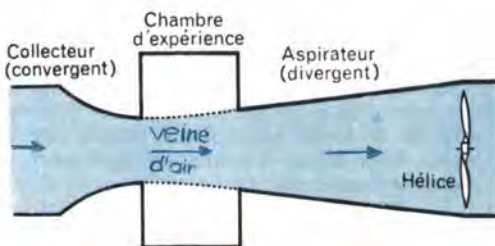
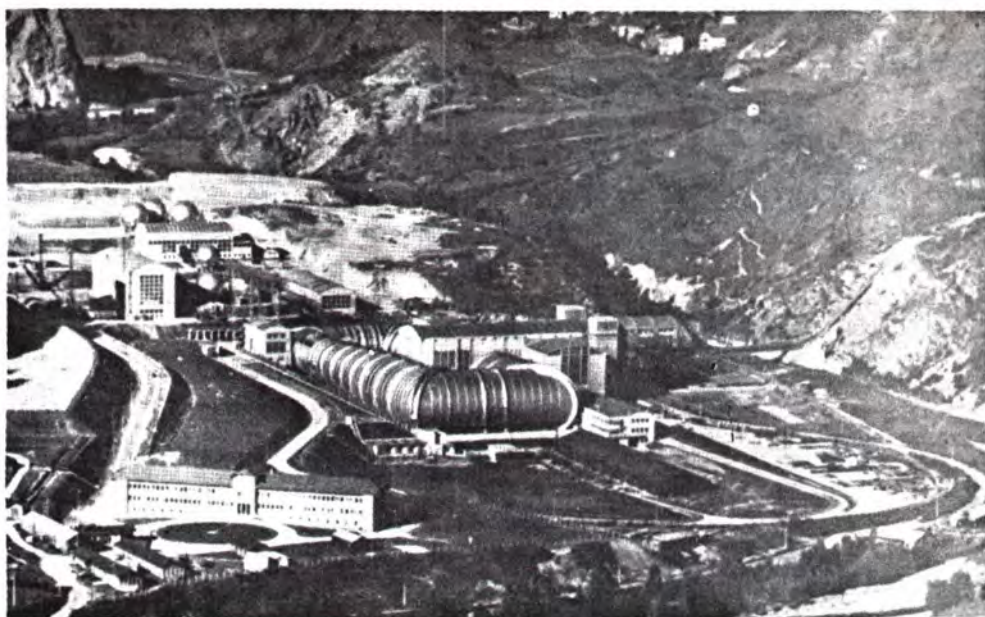


Fig. 2. — Le schéma d'un tunnel aérodynamique.

La chambre d'expérience est traversée par une « veine » d'air bien réglée dont la vitesse et le débit dépendent de la grandeur des hélices des aspirateurs et de la puissance des moteurs qui les actionnent. Le « mobile » à étudier (ou sa maquette) est immobilisé dans la veine par l'intermédiaire de **dynamomètres** donnant les composantes de la résistance de l'air; des **manomètres** et des **anémomètres** donnent les pressions et les vitesses relatives en divers points de la surface du mobile. On peut aussi être renseigné sur les trajectoires des filets d'air (et, éventuellement, sur les tourbillons qu'ils forment) en mettant des fumées en suspension dans l'air de la veine et en photographiant le **spectre aérodynamique** ainsi obtenu.

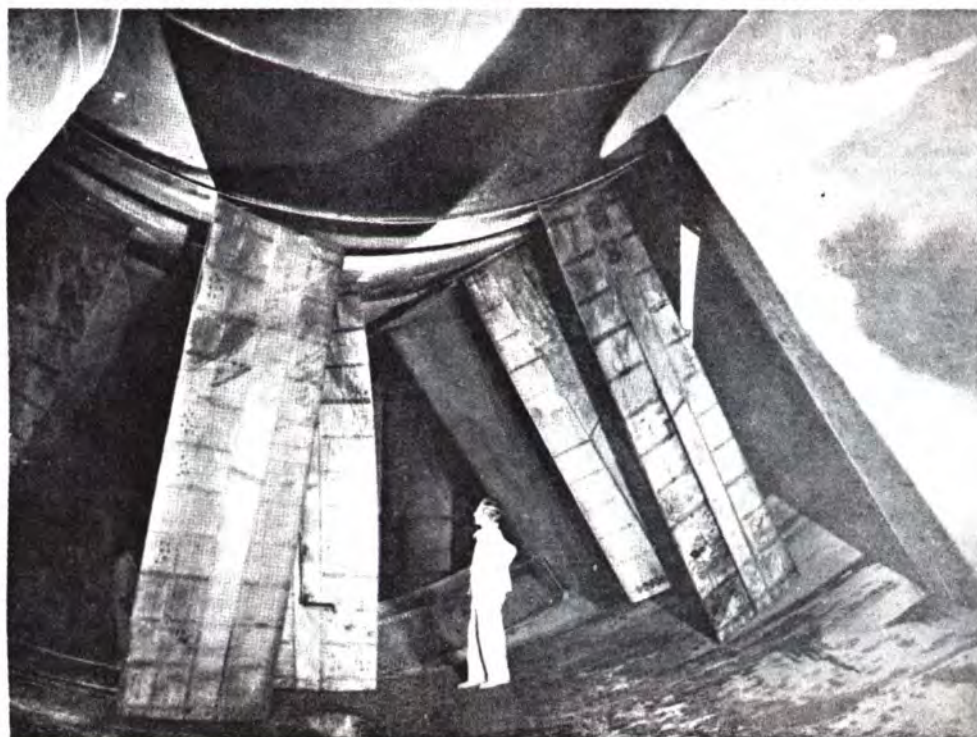


La grande soufflerie de Modane-Avrieux.

Photo O.N.E.R.A.

Soufflerie transsonique de Modane-Avrieux
 Les pales d'un aspirateur mû par un moteur de 40 000 kW.

Photo O.N.E.R.A.



Certaines chambres d'expériences sont assez vastes pour contenir des carrosseries d'automobiles et même de petits avions. Quand un type d'avion est trop grand pour y être étudié directement, on opère sur un modèle réduit (*maquette*); des lois de similitude permettent d'étendre les résultats expérimentaux au modèle en vraie grandeur.

4. Les résultats.

L'étude expérimentale confirme la complexité de l'action de l'air sur un corps en mouvement; elle montre en particulier que la nature et l'importance relative des facteurs qui influent sur la résistance de l'air dépendent du domaine de vitesses considéré.

a. — Vitesses faibles.

Tant que la vitesse relative est inférieure à 1 m/s (soit 3,6 km/h), la résistance de l'air, pratiquement réduite à la résistance de frottement, est **proportionnelle à la vitesse**. C'est une résistance de ce genre qui s'applique à un pendule oscillant avec une faible amplitude, ou qui limite à moins d'un centimètre par seconde la vitesse de chute des minuscules gouttelettes d'eau formant le brouillard.

b. — Vitesses subsoniques.

Nous verrons qu'une *variation de pression* produite en un point d'une masse d'air se *propage de proche en proche dans toutes les direc-*

tions avec une vitesse V , appelée *vitesse du son* parce que l'audition d'un son résulte de variations de pression transmises par l'air avec cette vitesse de propagation.

On appelle **nombre de Mach**, le rapport $\frac{v}{V}$ de la vitesse d'un mobile à la vitesse du son et l'on désigne par vitesses subsoniques les vitesses qui correspondent à un nombre de Mach inférieur à 0,8. La vitesse du son dans l'air à la température ordinaire étant de l'ordre de 340 m/s, soit 1 200 km/h, les vitesses subsoniques sont inférieures à environ 1 000 km/h.

Les mesures montrent que la résistance de l'air (dont la composante principale est ici la *résistance de forme*) est approximativement **proportionnelle au carré de la vitesse**; nous reviendrons un peu plus loin sur les résultats concernant ce domaine, jusqu'à présent le mieux étudié parce qu'il correspond aux vitesses des véhicules terrestres et de la plupart des avions.

c. — Vitesses supersoniques.

Ce sont les vitesses qui correspondent à un nombre de Mach supérieur à 1,2 ($v > 1\,400$ km/h); pendant longtemps, ce domaine fut uniquement celui des projectiles (balles de fusil, obus), mais la dernière guerre y a fait entrer les fusées et, actuellement, de nombreux avions à réaction atteignent des vitesses supersoniques.

L'expérience montre qu'à ces vitesses les lois de la résistance de l'air sont différentes de celles qui correspondent au domaine subsonique; non seulement *la résistance croît plus rapidement que le carré de la vitesse*, mais les autres facteurs n'ont plus la même importance relative; de ce fait, les lois de similitude utilisées dans les études sur maquettes sont différentes.

d. — Vitesses transsoniques; le « mur du son ».

Ce domaine des vitesses voisines de celles du son (nombre de Mach compris entre 0,8 et 1,2; vitesse comprise, approximativement, entre 1 000 et 1 400 km/h) est, de loin, le moins bien exploré. A ces vitesses, les mesures faites dans le tunnel aérodynamique mettent en évidence des phénomènes beaucoup plus complexes encore qu'aux vitesses inférieures ou supérieures et les résultats s'interprètent difficilement.

Cette complexité peut s'expliquer de la façon suivante :

Lorsqu'un mobile, un avion par exemple, comprime l'air devant lui, la variation de pression ainsi produite se propage à partir de l'avion avec la vitesse V .

Maquette du « Concorde » dans la soufflerie supersonique de Modane-Avrieux. Photo O.N.E.R.A.



— Tant que la vitesse v de l'avion par rapport à l'air est nettement différente de V , cette perturbation s'éloigne rapidement à l'avant ou à l'arrière de l'avion;

— Par contre, si v diffère peu de V , la perturbation accompagne l'avion et l'on conçoit que la résistance qu'offre aux ailes cet air perturbé présente des *discontinuités de variation* capables de modifier plus ou moins profondément les conditions du vol.

B. RÉSISTANCE PROPORTIONNELLE AU CARRÉ DE LA VITESSE RELATIVE

Le domaine qui présente encore actuellement le plus d'intérêt pratique est celui des vitesses subsoniques (quelques km/h à 1 000 km/h) parce qu'il correspond aux vitesses usuelles des bicyclettes, cyclomoteurs, autos, trains et de la majorité des avions de transport.

Il est possible, dans ce domaine où intervient surtout la *résistance de forme*, de donner de la résistance de l'air une expression simple, suffisamment approchée pour permettre de calculer des ordres de grandeur.

5. L'expression de la résistance de l'air.

L'étude expérimentale dans le tunnel aérodynamique conduit à admettre qu'aux vitesses moyennes et pour un mobile possédant un axe de symétrie parallèle au déplacement relatif, la *résistance de l'air est proportionnelle* :

- Au carré de la vitesse relative v ;
- A la surface S du maître couple;
- A la masse volumique a de l'air;
- A un coefficient C caractéristique de la forme du mobile :

$$R = C a S v^2 \quad (1)$$

Cela explique le rôle prépondérant joué par le nombre de Mach $\frac{v}{V}$ dans l'étude de la résistance de l'air aux vitesses transsoniques et fait comprendre, d'autre part, qu'on soit amené à modifier la forme de l'aile pour rendre plus facile le franchissement du « mur du son », quand un avion passe du vol subsonique au vol supersonique.

a. — Le maître couple (ou section « maîtresse »).

C'est la surface de la projection orthogonale du mobile sur un plan perpendiculaire à la direction de la vitesse (fig. 3).

b. — Le coefficient de forme.

La résistance de l'air est fortement influencée par la *forme*, tant de la partie avant que de la partie arrière du mobile; d'une façon générale, le coefficient de forme est d'autant plus grand qu'il se forme plus de tourbillons dans le sillage du mobile (fig. 4).

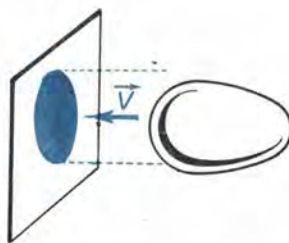


Fig. 3. — Surface du maître couple.

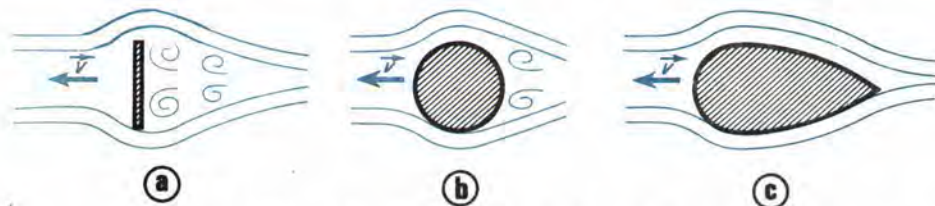


Fig. 4. — La variation du sillage avec la forme du mobile.

Les tourbillons sont plus importants dans le sillage d'un disque plan (a) que dans celui d'une sphère (b) de même maître couple; corrélativement, la résistance de l'air est plus grande sur le disque que sur la sphère.

La forme de moindre résistance est une forme fuselée (c) pour laquelle les tourbillons sont pratiquement supprimés.

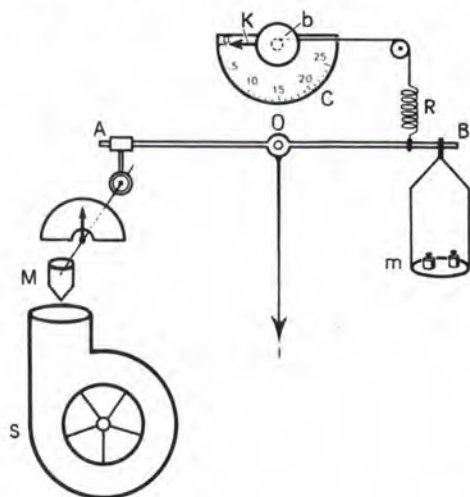


Fig. 5.

La figure 5 représente des solides de révolution de formes simples dont les coefficients de forme vont en décroissant de *a* à *e*; par comparaison, on peut voir l'avantage d'une forme convexe à l'avant et l'inconvénient de toute partie plane à l'arrière.

On note aussi que la forme la plus avantageuse — la plus *aérodynamique* — est celle d'un *fuseau* arrondi à l'avant et effilé à l'arrière; c'est sensiblement la forme que prennent les gouttes lorsqu'elles tombent dans l'air.

Le dispositif de la figure 6 permet d'ailleurs de vérifier, au moins approximativement, ces divers résultats concernant l'influence de la forme sur la résistance de l'air.



▲ Fig. 6. — Appareil de cours destiné à l'étude de la résistance de l'air.

Un fléau AB, mobile autour de l'axe horizontal O, porte en A le mobile M à étudier. Sur l'autre bras peut agir un ressort R, suspendu à un fil que l'on enroule plus ou moins en faisant tourner le bouton b. Le réglage du dispositif est tel que la traction du ressort est nulle quand, le fléau étant horizontal, l'aiguille K du bouton b est au zéro. On réalise cet équilibre initial *en air calme* grâce aux masses marquées *m*. On produit alors une « veine » d'air autour de M en actionnant la soufflerie S : le bras OA tendant à se soulever, on rétablit l'horizontalité en agissant sur le bouton b de façon que l'action du ressort équilibre la composante verticale de la résistance de l'air. L'intensité de cette composante est lue sur le cadran préalablement étalonné.

c. — La formule simplifiée de la résistance de l'air.

Dans le cas de mobiles se déplaçant à la surface du sol ou à faible altitude, la masse volumique de l'air diffère peu de la valeur ρ_0 qui correspond aux conditions normales (0 °C, 76 cm de mercure); il est alors commode de poser :

$$Ca_0 = K$$

On obtient ainsi une expression simplifiée de la résistance de l'air, fréquemment utilisée dans les calculs approchés :

$$R \approx K S v^2 \quad (2)$$

Le coefficient *K* dépend à la fois de la forme du mobile et des unités choisies pour mesurer *R*, *S* et *v*.

En unités SI, *R* s'exprime en newton, *S* en m², *v* en m/s et le coefficient *K* vaut par exemple :

$$K \approx \begin{cases} 0,9 & \text{pour un cylindre;} \\ 0,25 & \text{pour une sphère;} \\ 0,03 & \text{pour un fuseau « aérodynamique ».} \end{cases} \quad (\text{fig. 5})$$

Exemple numérique.

Calculons la résistance de l'air s'exerçant sur une automobile dont le coefficient *K* est voisin de 0,3, la surface du maître couple de l'ordre de 2 m² et qui se déplace dans l'air calme à la vitesse de 72 km/h.

Le mobile n'a pas ici d'axe de symétrie mais un plan de symétrie parallèle à la direction de la vitesse; nous admettons que l'action de l'air se ramène encore à une force unique $\vec{R}$, de même direction que la vitesse et de sens contraire, dont l'intensité est :

$$R \approx K S v^2$$

$$K \approx 0,3; \quad S \approx 2 \text{ m}^2; \quad v = 20 \text{ m/s}$$

D'où :

$$R \approx 0,3 \times 2 \times 400 = 240 \text{ N (environ 25 kgf)}.$$

Remarquons que la résistance doublerait à la vitesse :

$$v = 72 \times \sqrt{2} \approx 102 \text{ km/h};$$

Elle serait 4 fois plus intense à $72 \times 2 = 144 \text{ km/h}$.

Cela fait comprendre que « la vitesse se paie »; pour vaincre cette résistance rapidement croissante, le moteur doit en effet consommer de plus en plus de carburant.

6. La vitesse limite de déplacement dans l'air.

Soit un mobile mis en mouvement par une force constante $\vec{F}$; dans le vide, ce mouvement est rectiligne et uniformément accéléré, de mêmes direction et sens que $\vec{F}$.

Dans l'air, à cause de la résistance $\vec{R}$ (que nous supposons colinéaire à $\vec{F}$ et de sens contraire), l'intensité de la résultante des forces agissant sur le mobile n'est plus que :

$$f = F - R$$

R croissant comme le carré de la vitesse, f décroît dès le départ, donc l'accélération $\gamma = f/m$ est de moins en moins grande et la vitesse tend vers une **valeur limite** en même temps que f tend vers zéro (fig. 7).

En toute rigueur, cette vitesse limite ne serait atteinte qu'au bout d'un temps infini; en fait, la vitesse prend rapidement une valeur très voisine de la vitesse limite et l'on peut consi-

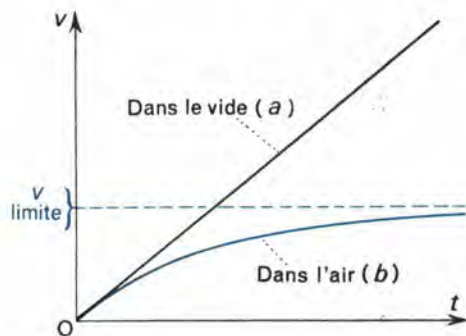


Fig. 7. — La représentation graphique des variations de la vitesse d'un mobile soumis à une force constante.

a) Dans le vide, la vitesse est proportionnelle au temps.

b) Dans l'air, la vitesse tend vers une vitesse limite.

dérer qu'à partir de ce moment, le mouvement est pratiquement uniforme.

L'application à la chute des corps dans l'air.

Dans le mouvement de chute, la force constante est le poids du mobile $\vec{P} = m\vec{g}$ ⁽¹⁾. Cherchons la *vitesse limite de chute* en écrivant que, pour la valeur v de cette vitesse, la résultante des forces $\vec{f} = \vec{P} + \vec{R}$ est nulle, c'est-à-dire que la **résistance de l'air est opposée au poids du corps** :

$$R \approx KS v^2 \approx P$$

$$v \approx \sqrt{\frac{P}{KS}} \quad (3)$$

Ainsi, la *vitesse limite de chute* est d'autant plus grande que le poids par unité de maître couple (P/S) est plus important et que la forme est plus « aérodynamique » (K plus petit).

L'exemple d'une sphère.

Calculons la vitesse limite de chute d'une sphère de rayon r et de masse volumique ρ :

$$P = 4/3 \pi r^3 \cdot \rho g; \quad S = \pi r^2;$$

Appliquons la relation :

$$v = \sqrt{\frac{P}{KS}} \\ v = \sqrt{\frac{4/3 \pi r^3 \rho g}{\pi r^2 K}} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{r \rho g}{K}}$$

On voit que :

— De deux sphères de même rayon, la plus dense a la plus grande vitesse limite de chute; par exemple, le plomb étant environ 4 fois plus dense que l'aluminium, une sphère de plomb tombe à peu près 2 fois plus vite qu'une sphère d'aluminium.

— De deux sphères de même substance, la plus volumineuse a la plus grande vitesse de chute.

Évaluons par exemple la vitesse limite d'un gros grêlon assimilable à une sphère de glace de 1 cm de diamètre :

En unités SI :

$$r = 5 \times 10^{-3} \text{ m}; \quad \rho \approx 920 \text{ kg/m}^3; \quad g \approx 10 \text{ N/kg}. \\ K \approx 0,25$$

D'où :

$$v \approx \sqrt{\frac{4 \times 5 \times 10^{-3} \times 920 \times 10}{3 \times 0,25}} \approx 15 \text{ m/s}$$

Pour un grêlon de 2,5 mm de diamètre, la vitesse limite de chute est deux fois plus faible.

⁽¹⁾ En ne considérant que des corps pour lesquels la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.



Un parachutiste.

Photo S.C.A.

L'exemple d'un parachute.

Dans le cas d'une chute avec parachute, le poids par unité de maître couple (P/S) est considérablement réduit du fait que la voilure accroît beaucoup plus le maître couple que le poids; de plus, la forme *concave à l'avant* augmente le coefficient K . Il en résulte que la *vitesse limite de chute* ($v = \sqrt{P/K\sigma}$) peut être abaissée à quelques mètres par seconde.

Évaluons par exemple ce que doit être la surface du maître couple d'un parachute pour qu'à un poids total de 100 kgf corresponde une vitesse d'atterrissage de l'ordre de 5 m/s; ($K \approx 1,2$ unité SI).

De (3) nous tirons :

$$S = \frac{P}{Kv^2}$$

Or, $P \approx 1\,000$ N

$$\text{D'où : } S \approx \frac{1\,000}{1,2 \times 25} \approx 33 \text{ m}^2$$

Ce maître couple correspond à un cercle d'environ 6,5 mètres de diamètre.

7. La sustentation d'une aile d'avion.

a. — Le cas schématisé d'une aile plane.

Considérons une aile assimilable à une plaque rectangulaire se déplaçant dans l'air calme à la vitesse $\vec{v}$:

— Si l'aile était *normale* à la direction de la vitesse (fig. 8-a), par raison de symétrie la résistance de l'air $\vec{R}$ lui serait perpendiculaire et s'appliquerait en son centre;

— Mais comme elle prend, par rapport à $\vec{v}$, une position *oblique* caractérisée par l'**angle d'attaque** de valeur algébrique α , l'expérience montre que la résistance de l'air, *encore sensiblement perpendiculaire à son plan*, s'applique en O, plus près du *bord d'attaque* que du *bord de fuite* (fig. 8-b et c).

Pour des vitesses subsoniques et des angles d'attaque petits, l'intensité de cette résistance a pour expression :

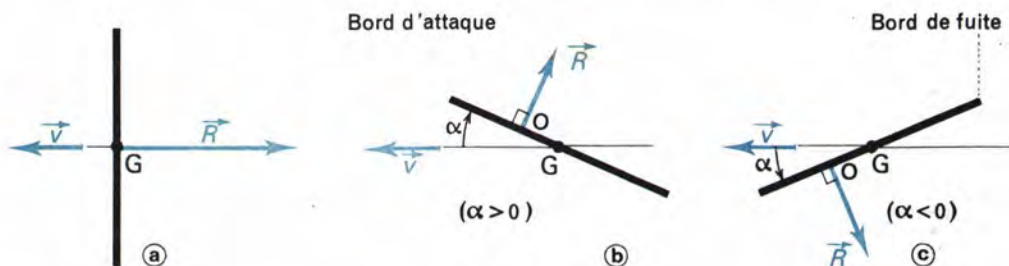


Fig 8



« Caravelle » en vol.

$$(4) \quad R \approx K \frac{a}{a_0} \sigma \alpha v^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} v : \text{vitesse relative;} \\ \alpha : \text{angle d'attaque (en} \\ \text{rd);} \\ \sigma : \text{surface de l'aile;} \\ a : \text{masse volumique} \\ \text{de l'air à l'altitude} \\ \text{du vol;} \\ a_0 : \text{masse volumique} \\ \text{normale.} \end{array} \right.$$

L'angle α étant petit, le produit $\sigma \alpha$ représente approximativement la surface du maître-couple $S = \sigma \sin \alpha$; par suite, cette expression équivaut à la formule usuelle ($K S v^2$) pour les altitudes faibles ($a \approx a_0$).

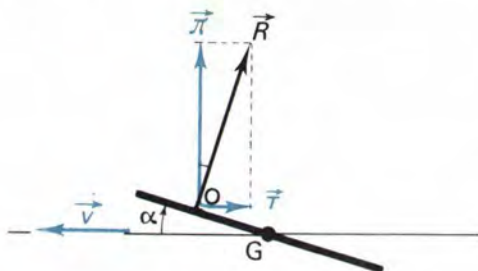


Fig. 9. — La portance (π) et la traînée (T).

Décomposons la résistance $\vec{R}$ suivant la direction de la vitesse et la direction perpendiculaire à la vitesse (fig. 9) :

$\vec{\pi}$ est la **portance**, de module : $\pi = R \cos \alpha$;

$\vec{T}$ est la **traînée**, de module : $T = R \sin \alpha$.

Pour des angles d'attaque positifs, la portance tend à soulever la plaque; quant à la traînée, elle tend toujours à s'opposer au mouvement.

On appelle **finesse** de l'aile le rapport :

$$\frac{\pi}{T} = \cotg \alpha.$$

Comme l'angle d'attaque est *petit*, on a :

$$\pi \approx R; \quad T \approx R \alpha; \quad \frac{\pi}{T} \approx \frac{1}{\alpha}.$$

La finesse d'une aile plane varie donc approximativement en raison inverse de l'angle d'attaque; elle vaut par exemple 7 pour $\alpha = 0,14 \text{ rd}$ ($\approx 8^\circ$).

b. — L'aile profilée.

Une aile d'avion n'est pas plane; pour le vol subsonique, son bord d'attaque est arrondi

et son bord de fuite est effilé : on dit qu'elle est **profilée**.

A la différence de ce qui a lieu pour une aile plane, la résistance de l'air sur une aile profilée n'est pas normale à l'aile mais *légèrement inclinée vers l'avant* ; il en résulte principalement une **augmentation de la finesse**.

Pour les angles d'attaque usuels, généralement *petits* (quelques degrés), la finesse d'une aile profilée peut atteindre 15 ou 20, parfois 30.

A égalité de portance π , la trainée T de l'aile profilée est nettement plus petite, de sorte que la sustentation de la même charge totale exige du moteur de l'avion une puissance plus faible.

Un autre avantage de l'aile profilée est de garder une portance *ascendante* (donc toujours sustentatrice), même pour de petites valeurs *négligables* de l'angle d'attaque; la stabilité du vol s'en trouve évidemment augmentée.

c. — L'équilibre d'un avion en vol horizontal uniforme.

Considérons un petit avion de tourisme et admettons pour simplifier que ses ailes n'en forment qu'une, soumise de la part de l'air à

une *résistance* R que nous supposons transportée au centre de gravité de l'avion; admettons aussi que l'action de l'air sur le fuselage se réduise à une *trainée* T' appliquée en G où nous transporterons également la *force motrice* F développée par l'hélice (fig. 10).

D'après le principe de l'inertie, le vol s'effectue horizontalement à vitesse constante si la résultante de toutes les forces est nulle, ce qui exige, à la fois, que la portance π équilibre le poids P de l'avion et que la force motrice F équilibre la somme des trainées T (de l'aile) et T' (du

fuselage); on voit que, toutes choses égales d'ailleurs, cette force motrice est d'autant plus faible que la finesse de l'aile est plus grande et que la forme du fuselage est plus « aérodynamique ».

— Si le pilote accélère la rotation du moteur, F croît, la vitesse augmente, la portance surpasse le poids et l'avion monte; il atteint nécessairement un *plafond*, à la fois parce que F ne peut croître indéfiniment et que la masse volumique de l'air (a , formule (4)) diminue à mesure que l'altitude augmente.

— Si au contraire il la réduit, F décroît, la vitesse diminue, le poids l'emporte sur la portance et l'avion descend.

Ces données très schématiques ne constituent, bien entendu, qu'un aperçu tout à fait sommaire des conditions de vol; il est en effet évident que la technique du pilotage des avions modernes soulève des problèmes d'Aérodynamique dépassant très largement le cadre de cette étude élémentaire de la résistance de l'air.

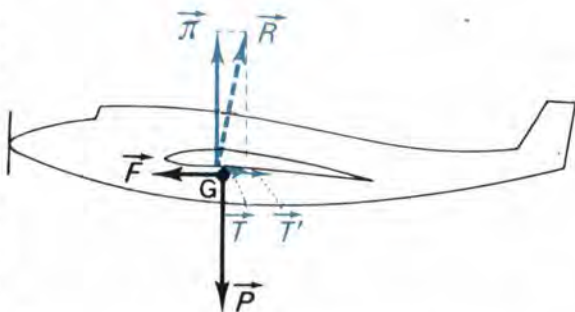
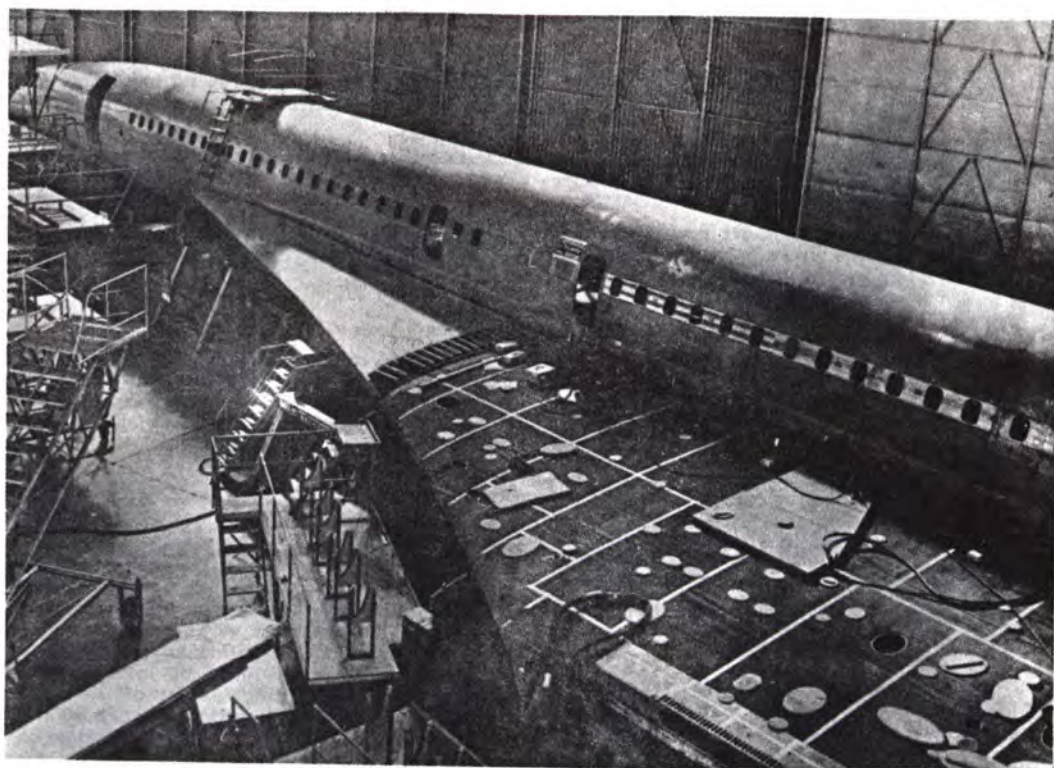


Fig. 10. — L'équilibre des forces agissant sur un avion en vol horizontal à vitesse constante.



Le montage du prototype « Concorde ».

Photo Sud-Aviation

EXERCICES

1. Une automobile pesant au total 1 000 kg est abandonnée, moteur arrêté, en haut d'une route de pente 6%. En admettant que les résistances passives se réduisent pratiquement à la résistance de l'air, d'expression $R \approx 1,5 v^2$, calculer la vitesse limite de l'automobile ($g \approx 10$ u. SI).

Rép. : 72 km/h.

2. Quel est le diamètre d'une sphère d'aluminium ($\rho \approx 2,7$ g/cm³) dont la vitesse limite de chute dans l'air est 26 m/s ? ($g \approx 10$ u. SI).

3. Le pendule représenté par la figure 1 fait un angle de 45° avec la verticale quand on place la sphère dans un vent horizontal de 10 m/s. Quelle serait, pour cette sphère, la vitesse limite de chute dans l'air calme ?

Rép. : 10 m/s.

4. Un parachute lesté, de poids total 750 N, de maître couple $S = 37,5$ m² et dont le coefficient K (de la relation $R = K S v^2$) vaut 1,2 unité SI, est abandonné sans vitesse initiale :

1° Calculer sa vitesse limite et le temps au bout duquel doit s'ouvrir le parachute pour que son mouvement soit uniforme dès l'instant de l'ouverture.

2° Quelles seraient les variations de la vitesse de chute si le parachute ne s'ouvrait qu'après 1 s de chute libre ? ($g \approx 10$ u. SI).

(D'après un probl. de bacc.).

5. Un parachute pèse 20 kg et porte une charge de poids P . Sa projection horizontale a une surface de 25 m². Il est abandonné sans vitesse initiale, dans un air calme, à une hauteur de 250 m au-dessus du sol.

1° S'il ne s'ouvre pas, avec quelle vitesse frappe-t-il le sol ?

2° On suppose qu'il s'ouvre et que la vitesse limite atteinte au moment du choc sur le sol est 10 fois plus petite que la vitesse précédemment calculée. Quelle est la valeur de P ?

3° On suppose maintenant que $P = 300$ N. Calculer la vitesse limite atteinte. Calculer le temps au bout duquel le parachute devrait s'ouvrir pour qu'à cet instant il possède cette vitesse.

Données : $g = 9,8$ u. SI. La résistance opposée par l'air à la chute de ce parachute, dont la projection horizontale est S m², a pour expression :

$$R \text{ (en N)} \approx 0,8 S v^2, v \text{ étant mesurée en m/s.}$$

(Partie de probl. de bacc.).

Rép. : 1° 70 m/s ; 2° 784 N ; 3° 5 m/s ; 0,51 s.

6. Un avion pesant au total 10 t a une surface portante d'ailes $\sigma = 108$ m².

1° Calculer la vitesse pour laquelle il décollera en air calme sous un angle d'attaque $\alpha = 0,12$ rd, sachant que la résistance de l'air sur les ailes a pour expression :

$$R \approx 2,5 \frac{\sigma}{a_0} \alpha x v^2 \text{ (unité SI) : (au sol : } a \approx a_0 \text{)}$$

2° Pour le même angle d'attaque et une vitesse 2 fois plus grande, quelle serait la trainée due aux ailes à une altitude pour laquelle la masse volumique a de l'air est réduite à 60% de sa valeur au sol, si la finesse des ailes vaut 16 ? ($g \approx 10$ u. SI).

7. 1° Une sphère creuse est lâchée, par temps calme, d'un point élevé, sans vitesse initiale.

On étudie son mouvement, au bout d'un certain temps de chute, avec le dispositif suivant :

La sphère est photographiée à son passage devant un appareil photographique situé à 15 m de la verticale de chute. La distance focale de l'objectif photographique est de 10 cm et les photographies sont prises en démasquant l'objectif à intervalles réguliers au moyen d'un disque obturateur portant 8 trous et tournant à raison de 3 tours par seconde.

Dans ces conditions, on constate, après développement de la plaque, que toutes les images de la sphère sont équidistantes. Leur distance est de 3 mm. Que peut-on en déduire pour le mouvement de la sphère ?

2° Quelle serait la vitesse limite d'une sphère de même diamètre, de densité 9 fois plus grande ? On

admettra que la résistance de l'air sur une sphère est proportionnelle au carré de sa vitesse et au maître-couple.

3° La sphère utilisée au (1°) est maintenant fixée à l'extrémité A d'une tige rigide AO, de poids négligeable, dont la direction est celle du diamètre passant par A et qui peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal passant par O.

Lorsque ce dispositif est placé dans un vent horizontal de vitesse v , la tige s'incline d'un angle α sur la verticale.

Calculer v pour $\alpha = 45^\circ$ et $\alpha = 60^\circ$.

4° La sphère utilisée au (1°) pèse 4,50 g et son diamètre est de 42 mm. Calculer, dans le système SI, le coefficient K de la formule donnant la résistance de l'air sur une sphère ($g = 9,8$ u. SI).

Rép. : 1° uniforme ; $v_1 = 10,8$ m/s ; 2° $v_2 = 3v_1$; 3° 10,8 m/s et 14,2 m/s ; 4° $K \approx 0,27$.

(Bacc.).

8. 1° Une masse A de 700 kg, de dimensions négligeables, est reliée, par un câble C, à un parachute B pesant 20 kgf. La résistance que l'air oppose au mouvement de B est de la forme $R = c a S v^2$ (v est la vitesse de B ; S , sa surface ; a , la masse volumique de l'air dans les conditions de l'expérience ; c , un coefficient dépendant de la forme du corps).

Sachant que la vitesse limite du système ABC tombant verticalement dans l'air est de 3 m par seconde, que la surface S du parachute est de 90 m², et que la masse du litre d'air est de 1,3 g, calculer la valeur de c .

2° A une altitude suffisante, on abandonne le système ABC sans vitesse initiale. Il tombe d'abord pendant 50 m sans que le parachute fonctionne, et, de ce fait, la résistance de l'air, pendant cette première phase, peut être considérée comme nulle. Ensuite, en 0,6 seconde, le parachute s'ouvre progressivement et au bout de ce temps, la vitesse limite se trouve pratiquement atteinte. Quelle est, pendant cette seconde phase, l'accélération moyenne du système, c'est-à-dire l'accélération qu'il aurait si la même modification de vitesse était obtenue par un mouvement uniformément varié ?

3° Quel effort le câble C doit-il pouvoir supporter pour ne pas se rompre pendant l'ouverture du parachute, si l'on suppose l'accélération du système égale à celle qui vient d'être calculée ?

On prendra $g \approx 10$ u. SI.

(Bacc.).

LE SYSTÈME D'UNITÉS INTERNATIONAL (SI)

1. La notion de système cohérent d'unités.

a. — Du choix des unités.

Mesurer une grandeur G c'est la comparer à une grandeur de même espèce G_u prise pour unité. La valeur a du rapport $\frac{G}{G_u}$ est le nombre qui mesure la grandeur G avec l'unité G_u . Le résultat de la mesure s'écrit : $G = a G_u$ (par exemple $l = 3$ mètres).

Le choix de l'unité peut-il être arbitraire ? Théoriquement, oui ; si, par exemple, on se propose de mesurer la surface d'un rectangle, on peut prendre pour unité la surface d'un autre rectangle qui sera contenue, disons, 10 fois dans celle du premier : l'aire S du rectangle vaut alors 10 unités.

Il est plus commode d'évaluer cette surface à partir de ses dimensions ; on sait en effet que la surface d'un rectangle est proportionnelle à sa longueur et à sa largeur :

$$S = k l l' \quad (1)$$

Dans cette relation, le coefficient de proportionnalité k dépend du choix des unités de longueur et de surface ; par exemple, si l'on convient arbitrairement de mesurer l et l' en mètre et S en kilomètre carré, le coefficient k prend la valeur 10^{-6} qui résulte de ce choix arbitraire. La formule donnant l'aire d'un champ rectangulaire s'écrit alors :

$$S = 10^{-6} l l' \quad \left\{ \begin{array}{l} S \text{ en km}^2; \\ l \text{ et } l' \text{ en m.} \end{array} \right.$$

Les calculs se simplifient si, au lieu de choisir arbitrairement l'unité de surface, on convient d'utiliser la formule (1) sans coefficient numérique k :

$$S = l l' \quad (2)$$

L'unité de surface se trouve ainsi liée à l'unité de longueur : la relation (2) donne en effet $S = 1$ pour $l = l' = 1$, ce qui signifie que l'unité de surface est obligatoirement la surface du carré construit sur l'unité de longueur.

On dit alors que l'unité de surface *dérive* de l'unité de longueur, par l'intermédiaire de la relation $S = l l'$.

b. — La définition d'un système cohérent d'unités.

Il serait facile de montrer que, pour chacune des grandeurs étudiées dans le cours de Physique de cette classe et des classes précédentes, l'unité correspondante a presque toujours été liée ainsi à des unités déjà connues, grâce à une formule de définition conventionnellement choisie sans coefficient numérique ; c'est par exemple le cas de la vitesse ($v = l/t$), de l'accélération ($\gamma = v/t$), de la force ($F = m\gamma$), du travail ($W = Fl$), de la puissance ($P = W/t$), de la pression ($p = F/S$).

Quand les unités d'un ensemble de grandeurs sont ainsi définies systématiquement à partir de certaines d'entre elles, on dit qu'elles forment un système cohérent d'unités :

— Les unités choisies arbitrairement (donc indépendamment des autres) sont les **unités fondamentales** du système ;

— Toutes les autres sont des **unités dérivées**. L'édification d'un système cohérent d'unités comporte :

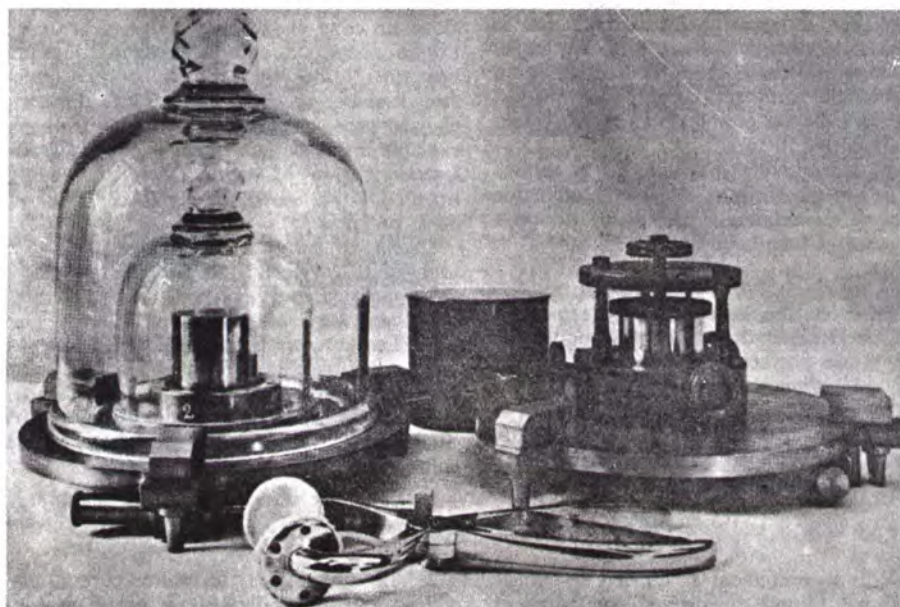
1° Le choix du nombre et de la nature des grandeurs dont les unités seront **fondamentales** ;

2° Le choix des formules permettant de définir les unités dérivées à partir des unités fondamentales. Ces formules de définition doivent être aussi simples que possible et ne pas comporter de coefficient numérique.



Le pavillon de Breteuil, siège du Bureau International des Poids et Mesures, à Sèvres (banlieue de Paris).

Ci-dessous, le kilogramme étalon international, avec ses protections et la pince servant à le manipuler.



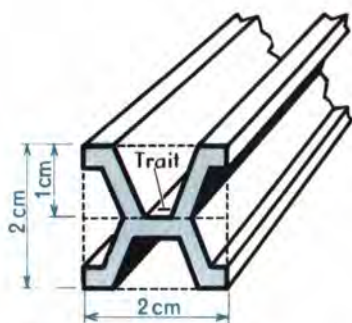


Fig. 1. — Le mètre-étalon.

La section en forme d'X diminue l'incertitude qui pourrait résulter d'une flexion de la règle.

2. Les unités fondamentales SI et leurs étalons.

Le choix des grandeurs dont les unités sont arbitrairement choisies comme unités fondamentales est déterminé par la facilité et, surtout, par la précision avec lesquelles ces grandeurs peuvent être directement comparées à une grandeur de la même espèce, choisie comme unité de mesure. On s'est mis d'accord dans la plupart des pays pour choisir la **longueur**, la **masse** et le **temps** parce que la mesure relative de ces grandeurs peut être réalisée avec une excellente précision.

Les trois unités fondamentales du système international (système **légal** en France depuis 1961) se définissent à partir d'un étalon de longueur, d'un étalon de masse et d'un étalon de temps.

a. — L'unité de longueur.

L'unité SI de longueur est le **mètre**, longueur égale à 1 650 763,73 fois la longueur d'onde dans le vide d'une radiation lumineuse orangée, caractéristique de l'isotope 86 du krypton.

Ce nombre est le résultat de la mesure ⁽¹⁾ de la distance, à la température 0° C, de deux traits fins et parallèles tracés au voisinage des extrémités de la règle en platine iridié, appelée **mètre-étalon** (fig. 1), déposée au Bureau International des Poids et Mesures (Pavillon de Breteuil, à Sèvres, banlieue de Paris).

Primitivement, le mètre avait été défini (par la Convention Nationale, en 1795) comme la *dix-millionième partie de l'arc du méridien terrestre compris entre le pôle boréal et l'équateur*.

En fait, on estime aujourd'hui que le mètre étalon est inférieur de 0,2 mm au « mètre » défini à partir du méridien; c'est dire que le quart du méridien vaut 10 000 000 mètres à environ 2 dix-millièmes (2×10^{-4}) près.

⁽¹⁾ Par une méthode utilisant les interférences lumineuses (chap. 21).

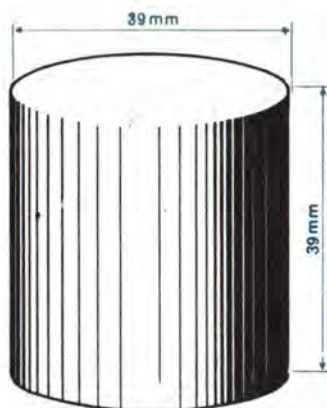


Fig. 2. — Le kilogramme-étalon (en vraie grandeur). C'est un cylindre dont la hauteur est égale au diamètre.

b. — L'unité de masse.

L'unité SI de masse est le **kilogramme**, *masse du prototype international en platine iridié, appelé kilogramme-étalon* (fig. 2), *déposé aussi au Bureau International des Poids et Mesures*.

Les fondateurs du Système Métrique avaient choisi comme étalon la masse de 1 décimètre cube d'eau pure à son maximum de densité; la masse de l'étalon actuel est en réalité supérieure de 27 milligrammes à celle d'un dm³ d'eau à 4° C, mais on peut le plus souvent confondre ces deux masses, puisque leur différence relative est inférieure à 3×10^{-5} .

Des copies des étalons de longueur et de masse permettent d'effectuer, dans les pays qui ont adopté le système SI, la comparaison des longueurs et des masses à ces étalons.

c. — L'unité de temps.

L'unité SI de temps est la **seconde**, définie comme « la fraction :

$$\frac{1}{31\,556\,925,9747}$$

de l'année tropique pour 1900, janvier 0 à 12 heures ».

L'année tropique est l'intervalle de temps qui sépare deux équinoxes de printemps consécutifs. Elle est un peu inférieure à la durée d'un tour complet de la Terre autour du Soleil à cause du phénomène de précession des équinoxes; d'autre part, elle varie très lentement, de 0,53 seconde par siècle. La valeur de l'année tropique, qui constitue l'étalon de temps à partir duquel est définie la *seconde*, a été déduite de la vitesse angulaire qu'avait la Terre le 31 décembre 1899 à midi, date que les astronomes écrivent 1900 janvier 0 à 12 heures.

Pour les besoins des physiciens, la seconde est pratiquement représentée par l'intervalle de temps qui sépare deux tops consécutifs des signaux horaires diffusés par le Bureau International de l'Heure et les observatoires rattachés à ce Bureau.

3. Les unités dérivées géométriques et mécaniques.

— Unité d'aire : le **mètre carré** (m^2), aire d'un carré de 1 mètre de côté.

— Unité de volume : le **mètre cube** (m^3), volume d'un cube de 1 mètre de côté.

— Unité de *masse volumique* (quotient de la masse par le volume) : le **kilogramme par mètre cube** (kg/m^3).

— Unité de *moment d'inertie* : le **kilogramme-mètre carré** ($kg \cdot m^2$).

— Unité de *vitesse* : le **mètre par seconde** (m/s), vitesse d'un mobile, en mouvement uniforme, parcourant 1 mètre en 1 seconde.

— Unité d'*accélération* : le **mètre par seconde, par seconde** (m/s^2), accélération d'un mobile, en mouvement rectiligne uniformément accéléré, dont la vitesse varie de 1 mètre par seconde en 1 seconde.

— Unité de *force* : le **newton** (N), intensité de la force qui, agissant sur un corps de masse égale à 1 kilogramme, lui communique une accélération de 1 mètre par seconde, par seconde.

— Unité de *poids volumique* (quotient du poids par le volume) : le **newton par mètre cube** (N/m^3).

— Unité de *moment* d'un couple ou d'une force par rapport à un axe : le **mètre-newton** ($m \cdot N$).

— Unité de *travail* : le **joule** (J), travail d'une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.

— Unité de *puissance* : le **watt** (W), puissance d'un moteur qui fournit, en régime permanent, un travail de 1 joule en 1 seconde.

— Unité de *quantité de mouvement* : le **kilogramme-mètre par seconde** ($kg \cdot m/s$).

— Unité de *pression* : le **pascal** (Pa), pression uniforme qui, agissant sur une surface plane de 1 mètre carré, exerce perpendiculairement à cette surface une force pressante de 1 newton.

4. Le tableau des unités usuelles.

Le tableau de la page 125 rassemble les symboles des principales unités géométriques, cinématiques et mécaniques SI et de leurs multiples ou sous-multiples couramment utilisés.

On y a joint d'autres unités usuelles, définies dans le cours de Seconde et qui n'appartiennent pas au système SI. La plupart d'entre elles se définissent à partir du **kilogramme-force** (kgf),

qui est le *poids*, à Paris, du **kilogramme-étalon** (fig. 2).

Nous avons vu que :

$$1 \text{ kilogramme-force} \approx 9,8 \text{ newtons} \quad (3)$$

Par suite : $1 \text{ N} \approx 0,102 \text{ kgf}$.

On en déduit :

a. — une unité de *travail* : le **kilogrammètre** (kgm), travail d'une force de 1 kgf dont le point d'application se déplace de 1 m dans sa propre direction. Comme $1 \text{ kgf} \approx 9,8 \text{ N}$, on voit que :

$$1 \text{ kilogrammètre} \approx 9,8 \text{ joules} \quad (4)$$

b. — deux unités de *puissance* :

1° le **kilogrammètre par seconde** (kgm/s);

2° le **cheval-vapeur** (ch), égal par définition à 75 kilogrammètres par seconde. De la relation (4) il résulte immédiatement que :

$$1 \text{ kgm/s} \approx 9,8 \text{ W} \\ 1 \text{ ch} \approx 9,8 \times 75 \approx 735 \text{ W, ou } 0,735 \text{ kW} \quad (5)$$

c. — une unité de *pression* : le **kilogramme-force par centimètre carré**, dont la valeur, en unités SI, s'obtient en appliquant la relation de définition de la grandeur pression :

$$p = \frac{F}{S}$$

Si : $F = 1 \text{ kgf} \approx 9,8 \text{ N}$, et $S = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$, on a :

$$p \approx \frac{9,8}{10^{-4}} = 9,8 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Ainsi :

$$1 \text{ kgf/cm}^2 \approx 9,8 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (6)$$

Rappelons qu'on exprime aussi les pressions en :

— **bar** ; $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$;

— **atmosphère** ; l'atmosphère est la mesure de la pression atmosphérique *normale*, représentée par une hauteur barométrique de 76 centimètres de mercure « normale ». ⁽¹⁾

$$1 \text{ atmosphère} \approx \begin{cases} 101\,300 \text{ Pa} \\ 1013 \text{ millibars} \\ 1,033 \text{ kgf/cm}^2 \end{cases}$$

Au voisinage du niveau de la mer, la **pression atmosphérique** demeure peu différente d'une atmosphère ; c'est dire qu'elle est de l'ordre de :

$$10^5 \text{ Pa, ou } 10^3 \text{ millibars, ou } 1 \text{ kgf/cm}^2$$

⁽¹⁾ A la température 0° C et pour la valeur « normale » de l'intensité de la pesanteur (altitude zéro ; latitude 45°).

Grandeurs	Symboles	UNITÉS SI			AUTRES UNITÉS USUELLES		
		Dénomination	Symbole	Multiples et sous-mult.	Dénomination	Symbole	Valeurs en u. SI
géométriques	Longueur	mètre	m	km ; cm	mille marin		1 852 m
	Aire	mètre carré	m ²	cm ² = 10 ⁻⁴ m ²	are	a	100 m ²
	Volume	mètre cube	m ³	cm ³ = 10 ⁻⁶ m ³	litre	l	10 ⁻³ m ³
cinématiques	Temps	seconde	s		minute heure	mn h	60 s 3 600 s
	Vitesse	mètre par seconde	m/s		kilomètre à l'heure nœud (1 mille/heure)	km/h	1/3,6 m/s ≈ 0,514 m/s
	Accélération	mètre par seconde par seconde	m/s ²				
mécaniques	Masse	kilogramme	kg	g = 10 ⁻³ kg t = 10 ³ kg	carat (Commerce des pierres précieuses)		2 × 10 ⁻⁴ kg
	Masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg/m ³		gramme par centimètre cube	g/cm ³	10 ³ kg/m ³
	Force	newton	N		kilogramme-force	kgf	≈ 9,8 N
	Poids volumique	newton par mètre cube	N/m ³		gramme-force par centimètre cube	gf/cm ³	≈ 9,8 × 10 ³ N/m ³
	Moment	mètre-newton	m . N				
	Travail	joule	J	kJ = 10 ³ J	kilowatt-heure kilogrammètre	kWh kgm	= 3,6 × 10 ⁶ J ≈ 9,8 J
	Puissance	watt	W	kW = 10 ³ W	kilogrammètre par seconde cheval-vapeur	kgm/s ch	≈ 9,8 W = 75 kgm/s ≈ 735 W
	Pression	pascal (N/m ²)	Pa	bar = 10 ⁵ Pa	kilogramme-force par centimètre carré atmosphère	kgf/cm ²	≈ 9,8 × 10 ⁴ Pa ≈ 1,013 × 10 ⁵ Pa

EXERCICES

1. Un volant en fonte, de densité 7,7, est assimilable à un cylindre de révolution homogène, de rayon $R = 30$ cm et de volume $V = 800$ dm³. Calculer, en unités SI :

a) sa longueur, b) sa masse, c) son poids, d) son moment d'inertie par rapport à son axe de révolution. ($g = 9,8$ N/kg.)

2. L'unité SI d'angle plan est le **radian** (rd) : angle au centre qui intercepte, sur une circonférence quelconque, un arc de longueur égale à celle du rayon. On demande d'exprimer la valeur du radian en degré et la valeur en radian d'un angle de 1 minute.

$$\text{Rép. : } 1 \text{ rd} \approx \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 3' \text{ ou } 57^\circ 17' 42'' ;$$

$$1' \approx 2,9 \times 10^{-4} \text{ rd à moins de } 1 \% \text{ près.}$$

3. La constante R de la formule des gaz parfaits ($pV = RT$) représente le produit $p_0 V_0 \alpha$, où p_0 est la pression atmosphérique normale, V_0 le volume molaire normal ($V_0 \approx 22\,400$ cm³), α le coefficient de dilatation des gaz ($\alpha \approx 1/273$). Calculer cette constante R en unités SI.

4. Calculer, en kilomètre à l'heure par heure, l'accélération du mouvement de chute libre à Paris ($g \approx 9,81$ m/s²).

$$\text{Rép. : } 1,271 \times 10^5 \text{ km/h}^2.$$

5. Un train de 500 t a un mouvement rectiligne uniformément accéléré, d'accélération égale à 1 296 km à l'heure par heure. Calculer en newton et en kilogramme-force la résultante des forces qui s'exercent sur le train.

6. Pour exprimer des travaux importants, on peut utiliser les unités suivantes :

1° le **kilowatt-heure**, travail produit en 1 heure par un moteur dont la puissance est 1 kilowatt ;

2° le **cheval-heure**, travail produit en 1 heure par un moteur dont la puissance est 1 cheval.

Combien chacune de ces unités de travail vaut-elle de joules et de kilogrammètres ?

$$\text{Rép. : } 1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ joules} \approx 3,67 \times 10^5 \text{ kgm ;} \\ 1 \text{ ch.h} = 2,7 \times 10^5 \text{ kgm} \approx 2,65 \times 10^5 \text{ joules.}$$

7. Pour qu'une certaine automobile garde, en palier, une vitesse constante de 72 km/h malgré les résistances passives (frottements, résistance de l'air), son moteur doit engendrer, parallèlement au déplacement, une force motrice de 600 newtons. Calculer le travail effectué par kilomètre (en joule et en kgm) et la puissance développée (en kW et en ch). On prendra $g \approx 10$ u. SI.

8. Si la pression atmosphérique du moment vaut $1,04 \times 10^3$ millibar, quelle est la dénivellation H d'un baromètre à mercure ?

Masse volumique du mercure : 13,6 g/cm³.

$$\text{Rép. : } 0,78 \text{ mètre.}$$

9. De combien faut-il s'élever verticalement au-dessus du niveau de la mer pour que la pression atmosphérique diminue :

1° de 1 millibar ?

2° de 1 cm de mercure ?

(On admettra que la pression atmosphérique au niveau de la mer est normale, et on prendra $\rho = 1,3$ g/l pour masse volumique de l'air et $d = 13,6$ pour densité de mercure.)

L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

A. L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

D'une manière générale, on dit qu'un système possède de l'énergie quand il peut fournir du travail au milieu extérieur.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de préciser cette définition de l'énergie en examinant deux formes particulières d'énergie : l'énergie cinétique et l'énergie mécanique potentielle. Nous terminerons en étudiant les transformations mutuelles de ces deux formes d'énergie mécanique.

1. Le rappel de l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique E_c d'un système matériel a été définie au chapitre 8. Rappelons en particulier que :

— pour un solide de masse m , animé d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v}$:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

— pour un solide tournant autour d'un axe avec une vitesse angulaire ω (J étant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation) :

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Cette définition

— fait apparaître l'énergie cinétique d'un système comme une forme d'énergie essentiellement liée aux **mouvements** des points matériels cons-

tituant le système ; l'énergie cinétique s'annule en même temps que le système s'immobilise, c'est-à-dire lorsque tous les points du système ont des vitesses nulles.

— Elle met en évidence l'importance du facteur **vitesse**, qui intervient par son carré (v^2 ou ω^2) dans l'expression de l'énergie cinétique.

D'après le **théorème de l'énergie cinétique** (p. 81), la variation ΔE_c de l'énergie cinétique d'un système matériel, entre deux instants quelconques t_1 et t_2 , est égale à la somme algébrique W des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui s'exercent sur le système entre ces instants :

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = W$$

— Si la somme algébrique W est positive, l'énergie cinétique du système *augmente* de W . On peut dire que le système stocke le travail global W sous la forme d'un **gain** d'énergie cinétique ;

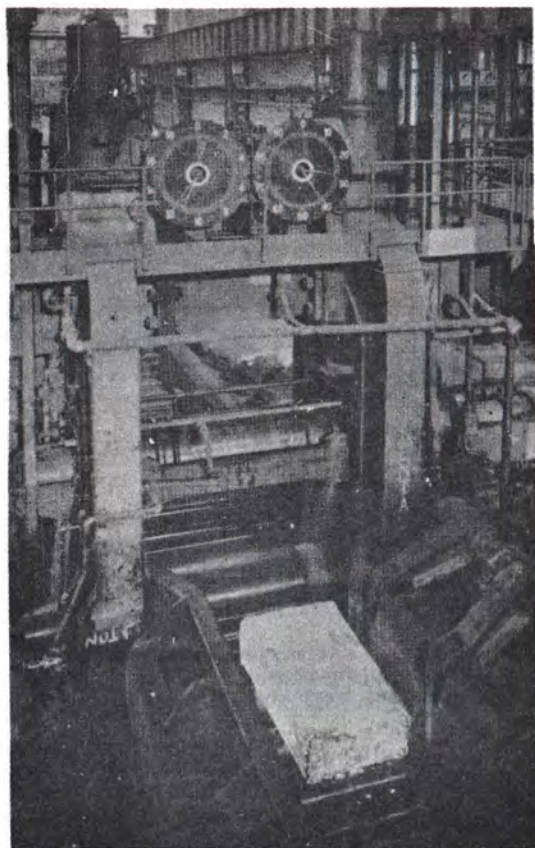
— Si la somme algébrique W est au contraire négative, l'énergie cinétique *diminue* de W . Le système restitue alors le travail W au prix d'une **perte** d'énergie cinétique.

Les quantités d'énergie qu'un système peut ainsi stocker sous la forme cinétique sont souvent considérables :

— **L'exemple d'un train.**

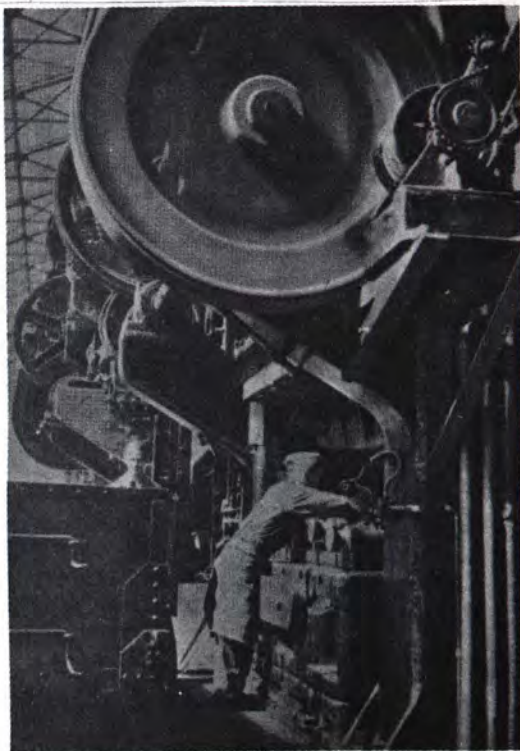
Soit un train de 1 000 tonnes lancé à la vitesse de 108 km/h (30 m/s) ; son énergie cinétique a pour valeur :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 10^6 \times 9 \times 10^3 = 4,5 \times 10^9 \text{ joules.}$$

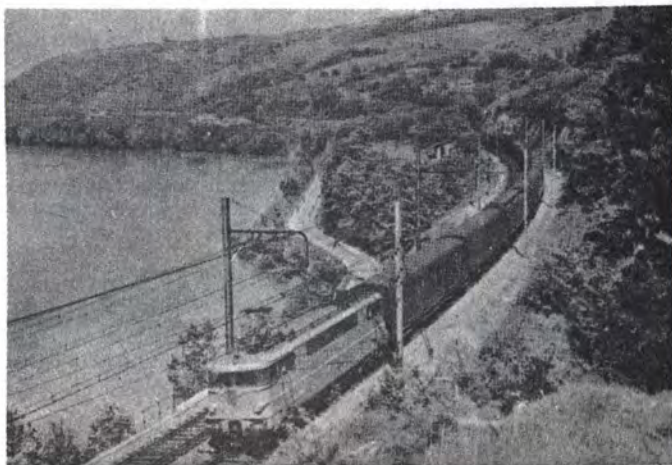


▲ *Un laminoir dans une aciérie.*
Photo OTUA (Lacheroy).

Une presse à emboutir dans une usine de construction automobile. Le volant, en rotation rapide, met en réserve une quantité considérable d'énergie cinétique. Photo Peugeot. ▼



Un train rapide en pleine vitesse. Photo S.N.C.F. ▼



Ces 450 millions de joules (environ 46 millions de kgm) représentent la somme algébrique des travaux effectués par les forces qui se sont exercées sur le train depuis son départ. En fournissant un travail de cette valeur pour soulever les 1 000 tonnes du train, on pourrait les élever à 46 mètres au-dessus des rails !

Lorsque le train s'arrête, un travail de même valeur mais de signe contraire est effectué par l'ensemble des forces résistantes qui s'opposent au mouvement; on comprend alors l'importance des effets d'un déraillement ou d'un télescopage : tôles enfoncées et déchirées, traverses arrachées, rails tordus, terre déportée...

— L'exemple d'un volant.

Un volant de grand moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation emmagasine aussi, quand il tourne

rapidement, une quantité importante d'énergie cinétique. Considérons par exemple le volant d'un train de laminage :

On sait qu'un laminoir est constitué essentiellement par deux cylindres, tournant en sens contraires, entre lesquels on fait passer des lingots de métal pour les réduire en barres ou en feuilles.

Au moment de l'écrasement du métal, le travail à fournir est considérable et le moteur qui entraîne le laminoir n'y suffirait pas. En associant à ce moteur un volant de grande inertie, le travail effectué par le couple moteur entre deux passes est surtout emmagasiné sous forme d'énergie cinétique dans le volant, puis est restitué au moment de la passe, de sorte que le travail d'écrasement provient presque uniquement de l'énergie cinétique du volant.

B. L'ÉNERGIE POTENTIELLE

Les forces *intérieures* s'exerçant entre les diverses parties d'un système *déformable* peuvent fournir du travail lorsque le système se déforme. Nous allons en examiner deux exemples simples.

2. L'énergie potentielle de pesanteur.

Soit un solide A maintenu au-dessus du sol (fig. 1); il forme avec la Terre un système *déformable*, entre les deux parties duquel s'exercent

deux forces *intérieures* : la force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$, appliquée au centre de gravité de A et une force opposée à $\vec{P}$, appliquée au centre de gravité de la Terre.

Si l'on déplace A par rapport à la Terre, le faisant passer de l'altitude z_1 à l'altitude z_2 par un chemin *quelconque*, le travail W_i des forces intérieures se réduit au seul travail du poids $\vec{P}$:

$$W_i = mg(z_1 - z_2) \quad (1)$$

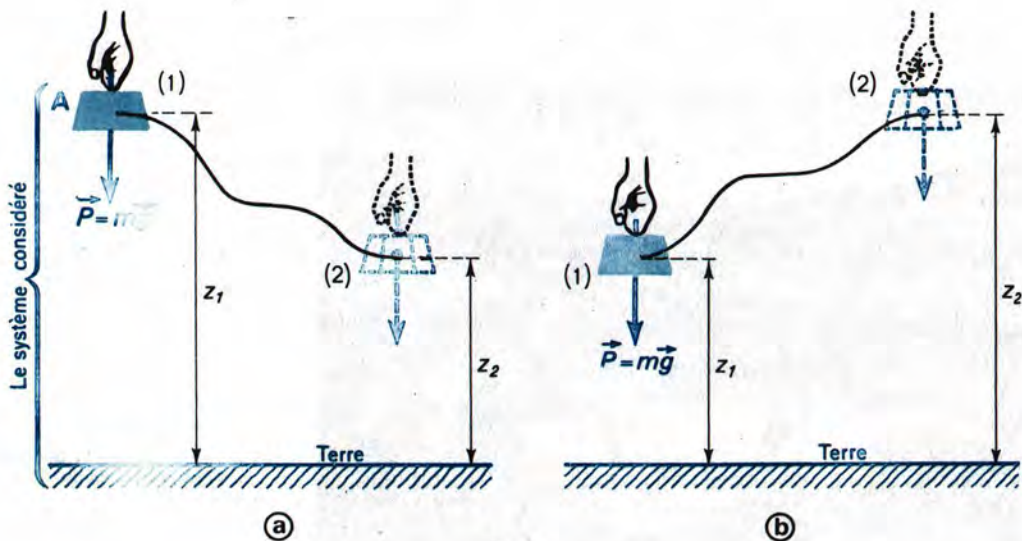


Fig. 1.

La relation (1) exprime que le travail W_i des forces intérieures ne dépend que de la position initiale 1 et de la position finale 2 du corps A par rapport à la Terre; nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$W_i = E_{p1} - E_{p2}, \quad (2)$$

en posant : $mgz_1 = E_{p1}$; $mgz_2 = E_{p2}$

Nous définissons ainsi une grandeur :

$$E_p = mgz \quad \begin{cases} m \text{ en kg;} \\ g \text{ en N/kg;} \\ z \text{ en m;} \\ E_p \text{ en J.} \end{cases}$$

qui, pour chacun des états que peut prendre le système A-Terre, a une valeur déterminée ne dépendant que de cet état. Cette grandeur E_p s'appelle l'énergie potentielle de pesanteur du système formé par le corps A et la Terre.

Dans une région de faible étendue où le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ est pratiquement constant, E_p n'est fonction que de l'altitude z ; en particulier, l'énergie potentielle est la même pour toute position du centre de gravité de A dans le même plan horizontal.

Lorsque ce centre de gravité passe d'une altitude z_1 à une autre altitude z_2 quelconque, E_p subit une diminution ⁽¹⁾ mesurée algébriquement par

le travail W_i du poids $\vec{P}$ (relation 2) :

— Si A se rapproche de la Terre (cas de la fig. 1-a : $z_2 < z_1$), le travail W_i est moteur, donc positif, et l'on a :

$$E_{p1} - E_{p2} > 0; \quad E_{p2} < E_{p1}$$

L'énergie potentielle du système A-Terre diminue. Corrélativement, la force musculaire

que la main exerce sur A pour le soutenir au cours du déplacement 1 $\rightarrow$ 2 effectue un travail résistant. Cette force musculaire étant une force extérieure au système formé par le corps A et la Terre, on dit que le système fournit du travail au milieu extérieur.

— Par contre, si la main soulève le corps A (fig. 1-b : $z_2 > z_1$), le travail W_i du poids $\vec{P}$ est résistant, donc négatif; par suite :

$$E_{p1} - E_{p2} < 0; \quad E_{p2} > E_{p1}$$

Dans ce cas, l'énergie potentielle du système A-Terre augmente parce que la force extérieure que la main exerce sur A effectue un travail moteur pour le soulever de l'altitude z_1 à l'altitude z_2 . On dit alors que le système reçoit du travail fourni par le milieu extérieur, et qu'il en stocke une quantité $E_{p2} - E_{p1} = -W_i$ sous la forme d'un gain d'énergie potentielle.

L'examen de ce cas simple fait apparaître l'énergie potentielle d'un système déformable comme du travail momentanément stocké dans le système à la suite d'une déformation et que ce système peut restituer au milieu extérieur en faisant effectuer un travail résistant à une force extérieure.

Par exemple, en remontant le « poids » d'une horloge ancienne, on effectue un travail qui est mis en réserve sous forme d'énergie potentielle de pesanteur dans le système formé par ce « poids » et la Terre; ce travail est restitué lorsque le « poids », en redescendant, fait tourner les rouages et entretient le mouvement du balancier.

Notons enfin que de très importantes quantités d'énergie potentielle de pesanteur peuvent être considérées comme stockées dans les énormes masses d'eau retenues par les barrages dans les lacs artificiels des montagnes.

⁽¹⁾ Nous appelons diminution d'une fonction, la différence (valeur initiale — valeur finale) comptée algébriquement; elle est opposée à la variation (valeur finale — valeur initiale).



Le barrage de Chastang avec son lac artificiel et l'usine hydroélectrique. Photo E.D.F.

Calculons par exemple la réserve d'énergie potentielle que constitue un lac artificiel de 200 000 m³ d'eau, retenu par un barrage à une altitude excédant de 100 m celle des turbines que cette eau pourrait alimenter :

Cette réserve d'énergie correspond à la diminution que subirait l'énergie potentielle du système eau-Terre si l'eau passait de l'altitude du lac à celle des turbines à l'alimentation desquelles elle est destinée; elle est donc mesurée par le travail du poids de l'eau pour une dénivellation $h = 100$ m :

La masse d'eau est :

$$m = 200\,000\text{ t} = 2 \times 10^8\text{ kg}$$

D'où, en prenant $g \approx 10\text{ N/kg}$:

$$\begin{aligned} E_{p1} - E_{p2} &= mgh \\ &= 2 \times 10^8 \times 10 \times 100 = \\ &= 2 \times 10^{11}\text{ joules (200 milliards de joules).} \end{aligned}$$

Remarque.

L'expression $E_p = mgz$ lie la valeur de l'énergie potentielle de pesanteur au choix arbitraire du plan horizontal d'altitude $z = 0$ (fig. 1); comme celui-ci peut être pris indifféremment au sol, au-dessus du sol ou même en dessous (si le corps considéré descend par exemple dans un puits), on voit que l'énergie potentielle de pesanteur E_p n'est définie qu'à une constante près.

En fait, cela est sans inconvénient puisque, seules, les diminutions de E_p (considérées algébriquement) ont un intérêt pratique et que le calcul de ces diminutions ne fait intervenir que des différences d'altitude.

3. L'énergie potentielle élastique.

a. — Considérons un ressort à spires non jointives : il constitue un exemple de système matériel à déformation élastique. L'une des extrémités du ressort étant fixée, si nous tirons sur l'autre, nous allongeons le ressort (fig. 2-a); cette déformation fait apparaître tout le long du ressort des forces intérieures, qui tendent à redonner aux spires leur écartement initial.

Sur la main qui inflige au ressort l'allongement x , l'action de ces forces intérieures est équivalente à celle d'une force F , appelée force élastique du ressort, dont le module est proportionnel à celui de x :

$$F = -kx$$

k désignant la raideur du ressort.

Évaluons le travail W_i effectué par la force F au cours d'une déformation faisant passer l'allongement d'une valeur x_1 à une autre valeur quelconque x_2 (fig. 2-b) :

Pour une variation infiniment petite dx de l'allongement, le travail élémentaire est

$$dW = F dx = kx \cdot dx.$$

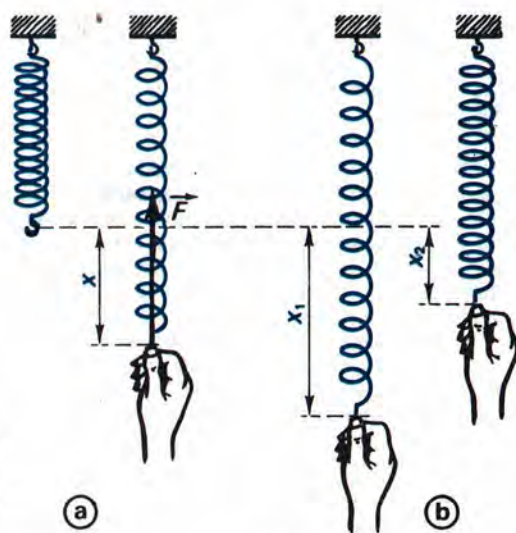


Fig. 2.

$$\text{Par suite : } W_i = \int_{x_1}^{x_2} kx \cdot dx = \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2$$

Cette relation exprime que le travail W_i ne dépend que de l'état initial et de l'état final du ressort; nous pouvons l'écrire :

$$W_i = E_{p1} - E_{p2} \quad (3)$$

$$\text{en posant : } E_{p1} = \frac{1}{2} k x_1^2; \quad E_{p2} = \frac{1}{2} k x_2^2$$

Nous définissons ainsi une grandeur :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} k \text{ en N/m;} \\ x \text{ en m;} \\ E_p \text{ en J.} \end{array} \right.$$

qui prend, pour chaque état du ressort, une valeur déterminée ne dépendant que de cet état.

Cette grandeur E_p s'appelle l'énergie potentielle élastique du ressort. Lorsque l'allongement du ressort passe de la valeur x_1 à la valeur x_2 , l'énergie potentielle E_p subit une diminution $E_{p1} - E_{p2}$ dont la valeur algébrique est donnée par la relation (3) :

— Si le ressort se raccourcit (cas de la fig. 2-b; $x_2 < x_1$), le travail W_i est moteur, donc positif, et l'on a :

$$E_{p1} - E_{p2} > 0; \quad E_{p2} < E_{p1}$$

L'énergie potentielle élastique diminue :

En faisant accomplir un travail résistant à une force extérieure — ici, la force musculaire de la main qui retient son extrémité —, le ressort

fournit du travail au milieu extérieur au prix d'une diminution de son énergie potentielle.

— Par contre, si l'on *allonge* le ressort ($x_2 > x_1$), le travail W_i est *résistant*, donc négatif. Par suite :

$$E_{p1} - E_{p2} < 0; \quad E_{p2} > E_{p1}$$

Dans ce cas, l'énergie potentielle du ressort *augmente* parce que la **force extérieure** qui allonge le ressort effectue un travail *moteur*. On dit alors que le ressort **reçoit du travail fourni par le milieu extérieur**, et qu'il en stocke une quantité $E_{p2} - E_{p1} = -W_i$ sous la forme d'un gain d'énergie potentielle.

Ainsi, l'énergie potentielle élastique d'un ressort déformé apparaît comme du travail momentanément stocké dans ses spires et qu'il pourra restituer lorsque celles-ci reprendront leur forme initiale.

b. — Un ressort acquiert aussi de l'énergie potentielle lorsqu'on le *comprime*. Par exemple, si l'on comprime le ressort d'un pistolet d'enfant, la force élastique du ressort, alors résistante, absorbe une certaine quantité de travail qui est stockée dans le ressort sous la forme d'énergie potentielle élastique; ce travail est restitué lorsque le ressort se détend en poussant le projectile.

De même, lorsqu'on *tord* un fil élastique ou que l'on *fléchit* une lame élastique, on met du travail en réserve dans le fil ou la lame à l'état d'énergie potentielle élastique ⁽¹⁾. Par exemple, en « remontant » une montre nous augmentons la flexion de la lame élastique d'un *ressort spiral* en faisant tourner l'arbre A sur lequel est fixée l'une des extrémités du ressort (fig. 3). Pour vaincre le couple de flexion du ressort, nous devons fournir un travail qui est stocké dans la lame élastique; ce travail est restitué peu à peu,

au fur et à mesure que le ressort se détend en faisant tourner les rouages et en entretenant les oscillations du balancier de la montre.

Remarque.

L'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie potentielle élastique sont deux formes d'énergie *mécanique* potentielle. Toutes deux ont été définies à partir du travail que les forces *intérieures* effectuent quand un système matériel se déforme, en tenant compte du fait que, pour les systèmes particuliers considérés, *ce travail ne dépend que de l'état initial et de l'état final du système*.

Cette notion d'énergie potentielle peut être généralisée : quelle que soit la nature des forces *intérieures* qui travaillent au cours de la déformation d'un système matériel, on peut définir une énergie potentielle à partir de ce travail, à condition qu'il ne dépende que de l'état initial et de l'état final du système.

Considérons par exemple un système de corps électrisés; lorsqu'ils changent de positions les uns par rapport aux autres, les forces électriques s'exerçant entre ces corps effectuent des travaux qui ne dépendent que des positions initiales et finales. La somme algébrique de ces travaux mesure la diminution de l'énergie électrique potentielle du système.

De même, la somme algébrique des travaux effectués par les forces magnétiques intérieures mesure la diminution de l'énergie magnétique potentielle d'un système d'aimants permanents dont les pôles changent de positions les uns par rapport aux autres.

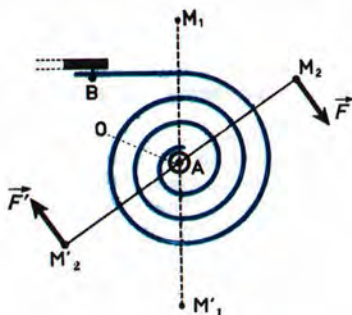


Fig. 3.

⁽¹⁾ Dans ce cas, l'énergie potentielle élastique s'exprime, en fonction de l'angle α de torsion (ou de flexion) et de la constante C de torsion (ou de flexion), par la relation :

$$E_p = \frac{1}{2} C \alpha^2 \begin{cases} \alpha \text{ en rd;} \\ C \text{ en m.N/rd;} \\ E_p \text{ en joule.} \end{cases}$$

C. L'ÉNERGIE MÉCANIQUE TOTALE SA CONSERVATION

4. La définition de l'énergie mécanique totale d'un système matériel déformable.

a. — Accrochons le solide A (§ 2) à l'extrémité d'un fil passant dans la gorge d'une poulie et dont l'autre extrémité est tenue à la main (fig. 4).

Dans le cas général où la force extérieure $\vec{F}$, ainsi appliquée en K, a une intensité différente

de celle du poids P , le corps A est animé d'un mouvement de translation vertical *varié*, ascendant ou descendant, accéléré ou retardé.

Si A passe à l'instant t_1 par la position 1 avec une vitesse de module v_1 et à l'instant t_2 par la position 2 avec une vitesse de module v_2 , la *variation* de l'énergie cinétique du système A-Terre a pour expression, d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{c2} - E_{c1} = W_r + W_i$$

W_r désignant le travail de la force extérieure $\vec{F}$ et W_i celui de la force intérieure $\vec{P}$.

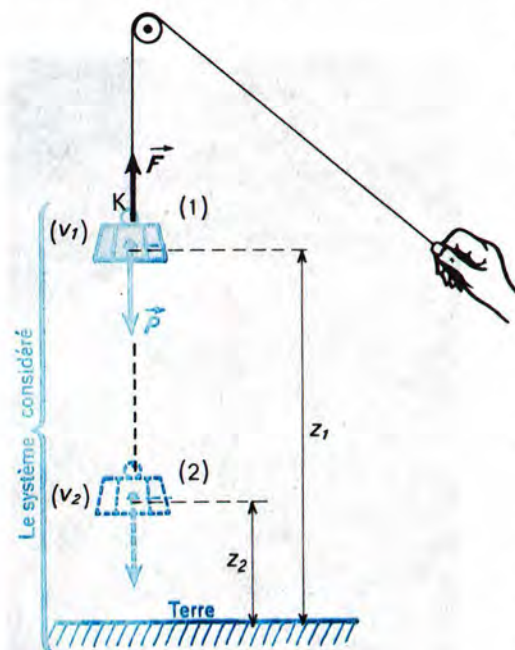


Fig. 4.

Or, nous avons vu (relation 2 du § 2) que le travail W_i est égal, en grandeur et en signe, à la diminution $E_{p1} - E_{p2}$ de l'énergie potentielle de pesanteur du système A-Terre.

Par suite :

$$E_{c2} - E_{c1} = W_r + (E_{p1} - E_{p2})$$

ou :

$$\underbrace{E_{c2} - E_{c1}}_{\text{Var. de l'én. cinétique}} + \underbrace{E_{p2} - E_{p1}}_{\text{Var. de l'én. potentielle}} = W_r \quad (4)$$

Ainsi, entre deux instants t_1 et t_2 arbitrairement choisis au cours d'un mouvement de translation vertical *quelconque* du solide A, le travail W_r de la force extérieure mesure algébriquement la somme des **variations** de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système formé par A et la Terre.

b. — Si $|F| = |P|$, le solide A est immobile ou en mouvement de translation rectiligne et *uniforme*; dans ce dernier cas, l'énergie cinétique E_c est constante et la relation (4) se réduit à :

$$E_{p2} - E_{p1} = W_r$$

— Si A *monte*, le travail W_r est *moteur*, donc positif et corrélativement, l'énergie potentielle du système A-Terre *augmente*; le système *reçoit* de l'extérieur un travail W_r qu'il stocke intégralement sous la forme d'un gain d'énergie potentielle.

— Si A *descend*, le travail W_r est *résistant*, donc négatif : l'énergie potentielle du système *diminue*; le système *fournit* au milieu extérieur un travail W_r égal à la diminution de son énergie potentielle.

c. — Écrivons la relation (4) sous la forme équivalente :

$$(E_{c2} + E_{p2}) - (E_{c1} + E_{p1}) = W_r$$

Nous sommes ainsi amenés à considérer la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système à un instant donné; cette somme :

$$E = E_c + E_p$$

est appelée l'**énergie mécanique totale** du système à l'instant considéré.

La relation :

$$E_2 - E_1 = W_r$$

exprime qu'**entre deux instants quelconques, la variation de l'énergie mécanique totale du système est algébriquement égale au travail que la force extérieure (ou l'ensemble des forces extérieures) effectue entre ces instants.**

Cette importante relation, établie à propos du système très simple formé par un corps quelconque et la Terre, est valable dans tous les cas où la transformation d'un système matériel est purement mécanique.

Par **transformation purement mécanique**, il faut entendre une transformation qui se réduit exclusivement à un changement des *vitesse*s et des *positions* relatives des diverses parties du système et au cours de laquelle le travail effectué par les forces intérieures ne dépend que de l'état initial et de l'état final de ce système. Une telle transformation exclut en particulier tout frottement à l'intérieur du système.

5. La conservation de l'énergie mécanique d'un système isolé ; les transformations mutuelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Un système matériel est dit **mécaniquement isolé** s'il n'est soumis à aucune force *extérieure*. Dans ce cas, le travail W_e des forces extérieures est évidemment nul et l'on a, pour toute transformation *purement mécanique* du système :

$$E_2 - E_1 = 0 ;$$

$$E = C^te$$

L'énergie mécanique totale E d'un système isolé se conserve au cours d'une transformation purement mécanique.

Ce que le système gagne en énergie cinétique il le perd en énergie potentielle ou vice versa : on dit qu'il y a *transformations mutuelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle*.

En voici quelques exemples :

a. — La chute libre d'un point matériel.

Soit une petite bille, de masse m , lancée avec une vitesse initiale *verticale ou oblique*, de module v_0 ; à l'instant où elle est lâchée, à l'altitude z_0 , elle forme avec la Terre un système isolé dont l'énergie mécanique totale a pour expression :

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0$$

Parvenue à une altitude quelconque z , le module de sa vitesse a pris la valeur v et son énergie mécanique est :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m g z$$

Écrivons que l'énergie mécanique se conserve :

$$E = E_0$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g z = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0$$

$$\text{D'où : } v^2 - v_0^2 = 2 g (z_0 - z)$$

Lorsque la bille retombe, sa vitesse à l'altitude z a même module $v' = v$ qu'à la montée à la même altitude (fig. 5).

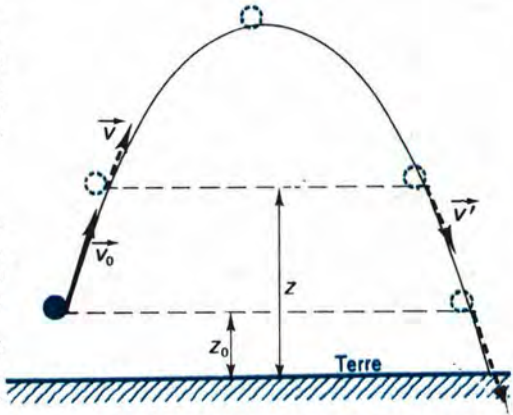


Fig. 5.

▼ La même expérience, faite sur la Lune qui ne possède pas d'atmosphère, conduirait à une vérification plus rigoureuse des propriétés précédentes.



Nous retrouvons ainsi, très facilement, une relation déjà établie dans le cas de la chute libre avec vitesse initiale verticale (p. 25) ou oblique (p. 49).

Bien entendu ce résultat n'est valable en toute rigueur que si le système isolé ne comprend que le corps et la Terre, c'est-à-dire en l'absence d'air dont la résistance freine d'autant plus le mouvement que la vitesse de lancée est plus grande.

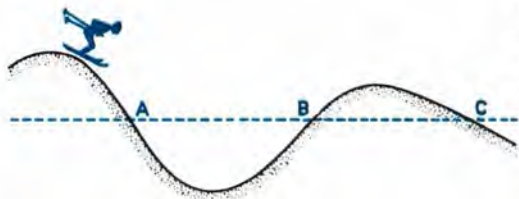


Fig. 6.

Le raisonnement précédent est applicable au mouvement de *translation d'un solide*, abandonné sur une piste de profil quelconque; par exemple un **skieur** (fig. 6) arrivant en A avec une vitesse de module v et se laissant glisser, skis parallèles et sans déraiper, retrouverait en B et C, à l'altitude de A, des vitesses de même module v si son mouvement n'était pas freiné par le frottement des skis sur la neige et par la résistance de l'air.

b. — Le pendule simple.

Un pendule forme, avec la Terre, un système que l'on peut considérer comme *isolé*, dans la mesure où l'on peut négliger les frottements et l'action de l'air.

Écartons un pendule *simple*, M, de sa position d'équilibre et abandonnons-le en M_1 sans vitesse initiale (fig. 7); il parcourt l'arc $\widehat{M_1M_0}$ d'un mouvement circulaire accéléré au cours duquel l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique.

Si nous convenons de prendre le plan horizontal H_0 passant par M_0 comme plan de référence $z = 0$,

— en M_1 , à l'altitude z_1 , l'énergie cinétique est nulle de sorte que l'énergie mécanique est tout entière sous la forme potentielle et a pour valeur :

$$E = E_1 = mgz_1$$

— en M_0 , l'énergie potentielle est nulle et l'énergie mécanique est tout entière sous forme

cinétique. Écrivons que l'énergie mécanique du système pendule-Terre s'est conservée :

$$E_{c0} = E$$

D'où, si v est le module de la vitesse en M_0 :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz_1; \quad v^2 = 2gz_1$$

Au-delà de M_0 , la vitesse et, par suite, l'énergie cinétique diminuent jusqu'à s'annuler tandis que l'énergie potentielle augmente d'autant, ce qui exige que le pendule remonte jusqu'en M_2 , à l'altitude z_1 de la position de départ M_1 . Cette remontée à l'altitude z_1 s'observe encore, et pour la même raison, si l'on place en O' une cheville obligeant le point matériel M à décrire l'arc de cercle $\widehat{M_0M'_2}$, de centre O' et de rayon $O'M_0$ (fig. 7).

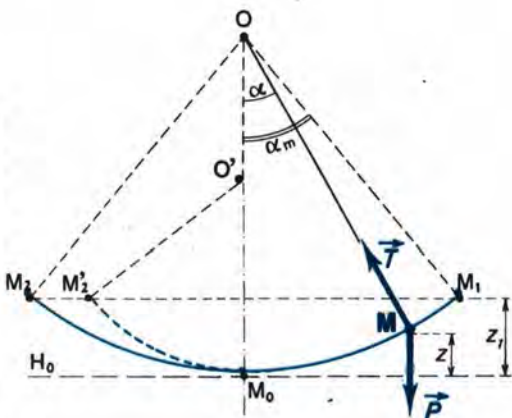


Fig. 7.

c. — Le pendule élastique.

Le système formé par un ressort, le corps solide suspendu à ce ressort et la Terre peut aussi être considéré comme *isolé* dans la mesure où les frottements et l'action de l'air sont négligeables.

Abaïssons de G_0 en G_1 le centre de gravité du solide suspendu au ressort, puis abandonnons le solide sans vitesse initiale; il prend un mouvement de translation vertical sinusoïdal (p. 55).

Dans une position quelconque G du centre de gravité, si l'on néglige la masse du ressort devant celle du solide, l'énergie mécanique totale du système est la somme de trois termes :

- l'énergie potentielle élastique du ressort;
- l'énergie potentielle de pesanteur du système solide-Terre;

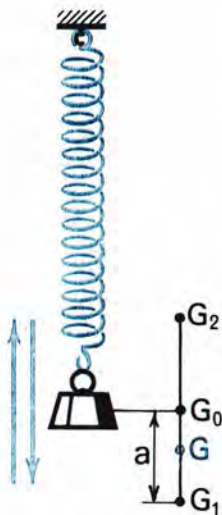


Fig. 8. — Les transformations mutuelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système formé par un corps accroché à un ressort et animé d'un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal.

Les maximums correspondent aux positions :

— G_0 (position d'équilibre) pour l'énergie cinétique ;

— G_2 pour l'énergie potentielle de pesanteur ;

— G_1 pour l'énergie potentielle élastique.

En G_1 et G_2 l'énergie cinétique s'annule et l'énergie mécanique est purement potentielle.

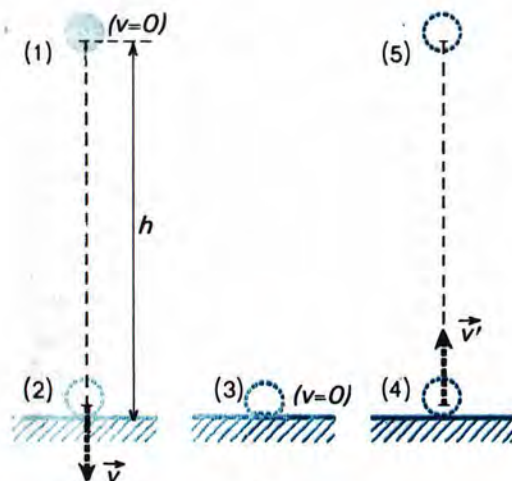


Fig. 9.

— l'énergie cinétique de translation du solide (fig. 8).

Entre deux positions successives du centre de gravité, ce que le système gagne en énergie cinétique, il le perd en énergie potentielle et vice versa ; l'énergie mécanique totale se conserve. Il en résulte que s'il n'y avait pas de résistances passives, les oscillations du pendule élastique, comme celles du pendule pesant, se poursuivraient indéfiniment avec une amplitude constante.

d. — Le rebondissement d'une bille élastique.

Étudions par exemple le cas du **rebondissement d'une bille d'acier** ou d'ivoire sur un plan dur et poli que nous supposons pratiquement indéformable (fig. 9) :

— En **1**, la bille n'a pas d'énergie cinétique mais le système qu'elle forme avec la Terre possède de l'énergie potentielle de pesanteur ;

— En **2**, cette énergie potentielle a diminué de mgh , la perte étant exactement compensée par un gain d'énergie cinétique ;

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh ; \quad v^2 = 2gh$$

— En **3**, toute l'énergie cinétique s'est transformée en énergie potentielle élastique du fait de la déformation élastique de la bille ;

— En **4**, la bille, ayant repris sa forme initiale, retrouve la même énergie cinétique qu'en 2 et, par suite, quitte le plan avec une vitesse de même module $v' = v$ qu'à l'arrivée ;

— En **5**, la vitesse s'annule de nouveau, l'énergie cinétique s'étant transformée en énergie potentielle de pesanteur.

Le mouvement se poursuivrait ainsi indéfiniment si le choc de la bille sur le plan était parfaitement élastique et si la résistance de l'air n'intervenait pas.

e. — Le système « volant-poids » (fig. 10).

Les ficelles qui soutiennent la masse marquée M étant enroulées sur l'arbre du volant, on abandonne M sans vitesse initiale ; elle subit une chute ralentie et le volant prend autour de son axe une rotation de plus en plus rapide. Quand les ficelles sont entièrement déroulées, l'énergie cinétique du volant les oblige à s'enrouler en sens inverse et à faire remonter M . On obtient une succession de descentes et de remontées approximativement symétriques.

A la descente de M , l'énergie potentielle de pesanteur du système M -Terre se transforme partie en énergie cinétique de translation pour la masse M et partie en énergie cinétique de rotation pour le volant ; au bas de la course, la vitesse de

translation s'inverse à la suite d'une transformation assez complexe qui rappelle le choc élastique de l'exemple précédent.

Au cours de la remontée, l'énergie cinétique de translation de la masse M et l'énergie cinétique de rotation du volant se transforment en énergie potentielle de pesanteur pour le système masse M -Terre.

Au reste, le choc et les frottements divers dissipent toujours de l'énergie mécanique de sorte que, d'une course à l'autre, la hauteur de remontée diminue graduellement.

Comme dans les cas des pendules pesant et élastique et de la bille élastique, la conservation de l'énergie mécanique n'est qu'une limite idéale dont on peut s'approcher sans jamais l'atteindre; en fait, au cours des transformations mutuelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, l'énergie mécanique totale diminue peu à peu; le système finit par s'immobiliser dans un état d'équilibre stable qui correspond à la valeur *minimale* de l'énergie potentielle.

Nous verrons dans le prochain chapitre que l'énergie mécanique perdue trouve sa contrepartie dans l'apparition d'une certaine quantité de *chaleur*.

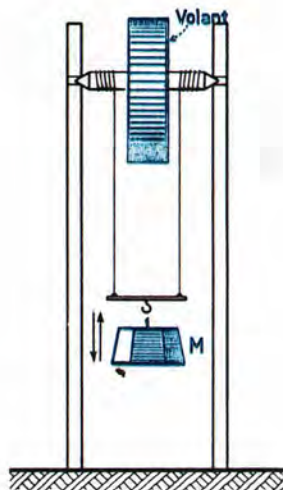


Fig. 10.

EXERCICES

1. Une masse marquée 1 kg est maintenue immobile à 3 m au-dessus du sol. Calculer l'énergie mécanique E du système qu'elle forme avec la Terre en comptant pour nulle l'énergie potentielle au sol.

Cette masse marquée est maintenant abandonnée en chute libre sans vitesse initiale. Calculer l'énergie potentielle quand elle se trouve à 1 m du sol et en déduire l'énergie cinétique et la vitesse acquise.

(On prendra $g \approx 10$ u. SI.)

Rép. : $E \approx 30$ joules ; $E_p \approx 10$ joules ; $E_c \approx 20$ joules ;
 $v \approx 6,3$ m/s.

2. Un ressort s'allonge de 1 cm sous l'action d'une force de 1 N. Calculer sa raideur et l'énergie potentielle élastique qu'il acquiert lorsqu'on l'allonge de 10 cm. Quel est le travail effectué par les forces intérieures lorsque l'allongement passe de la valeur 8 cm à la valeur 4 cm ?

3. L'énergie potentielle élastique d'un ressort spiral, auquel on a infligé une déformation angulaire

α , a pour expression : $E_p = \frac{1}{2} C \alpha^2$. En déduire le travail que l'on doit fournir pour vaincre le couple de rappel du ressort lorsqu'on fait tourner très lentement, de 10 tours complets, la clé qui commande la rotation de l'arbre sur lequel s'enroule le ressort préalablement détendu.

On donne la constante de flexion du ressort : $C = 5 \times 10^{-3}$ m.N/rd et l'on néglige les frottements.

Rép. : Environ 10 joules.

4. Une boule sphérique homogène aborde un plan incliné de 30° par rapport au plan horizontal avec une vitesse de son centre de gravité égale à 1 m/s . Calculer la distance qu'elle parcourt sur une ligne de plus grande pente du plan avant de s'arrêter et l'accélération de son mouvement. On admettra qu'elle roule sans glisser et on négligera les résistances passives ($g \approx 10 \text{ u. SI}$).

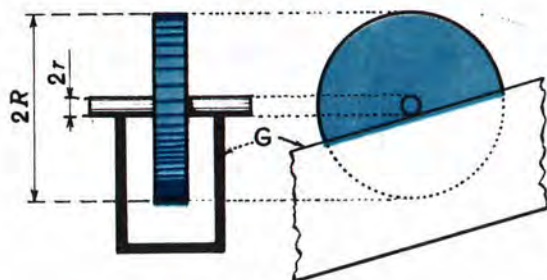


Fig. 11.

5. Un cylindre de rayon R comporte un arbre de roulement coaxial, de rayon r (fig. 11); l'arbre roule (sans glisser) sur une gouttière G , inclinée de α par rapport au plan horizontal. En admettant que le cylindre muni de son arbre est assimilable à un cylindre homogène de rayon R et en négligeant les résistances passives, calculer l'accélération du mouvement du centre de gravité lorsqu'on abandonne le cylindre en haut de la gouttière.

$$\text{Rép. : } \gamma = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}.$$

6. Reprendre le 1° du problème n° 10 du chapitre 8 et calculer l'accélération en écrivant que l'énergie mécanique totale du système cylindre-solide S-Terre se conserve.

7. Un ressort à boudin, de masse négligeable, parfaitement élastique, s'allonge de 5 cm sous l'action d'une force de 10 N. On suspend ce ressort à vide et à son extrémité inférieure on accroche un corps de masse $m = 10$ kg que l'on abandonne sans vitesse initiale. En négligeant les résistances passives, calculer :

- 1° L'amplitude des oscillations;
- 2° L'énergie potentielle du ressort quand le corps passe au point le plus bas de sa trajectoire;
- 3° La vitesse maximale du corps oscillant ($g \approx 10$ u. SI).

Rép. : 1° 0,5 m; 2° 100 joules; 3° 2,2 m/s.

8. Un disque homogène de masse m et de rayon R est suspendu horizontalement par un fil de torsion dont l'une des extrémités est soudée au centre O du disque et l'autre est encastrée en O' (fig. 12). A partir de la position d'équilibre, on fait tourner le disque autour de OO' d'un angle α_m et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1° De quelle nature est le mouvement du disque en l'absence de toute résistance passive? Préciser son amplitude et exprimer sa période en fonction de la constante de torsion C du fil et des caractéristiques m et R du disque.

2° Évaluer l'énergie mécanique totale du système fil-disque à un moment où l'angle de torsion a une valeur quelconque α et montrer qu'elle est constante.

Application numérique :

$\alpha_m = \pi$ rad; $C = 0,4$ m.N/rad; $m = 2$ kg; $R = 10$ cm.

N.-B. L'énergie potentielle élastique d'un fil de torsion s'exprime comme celle d'un ressort spiral (exercice n° 3).

9. 1° Rappeler les conditions nécessaires pour maintenir un mobile sur une orbite circulaire d'un mouvement uniforme.

Application : Une masse $M = 1$ kg est suspendue à l'extrémité d'un fil de longueur $OM = 1$ m, O étant fixe.

L'ensemble étant écarté de sa position d'équilibre d'un angle α , la masse M est lancée avec une vitesse convenable V de manière que le fil décrive un cône de révolution de demi-angle au sommet α .

Expliquer ce mouvement (pendule conique) et calculer V pour que $\alpha = 60^\circ$ demeure constant.

2° a) Définir la période T de ce mouvement et calculer T .

b) Définir la tension F du fil et calculer F .

3° a) Montrer, dans cet exemple les formes de l'énergie mécanique mises en jeu. Calculer le travail qu'il faut fournir pour mettre la masse M sur sa trajectoire circulaire, en partant de la position d'équilibre.

b) On brûle le fil. La masse M décrit une trajectoire et rencontre le sol situé 1 m plus bas. Quelle est la forme de cette trajectoire? Calculer la vitesse de M lorsqu'elle rencontre le sol.

(Bacc.)

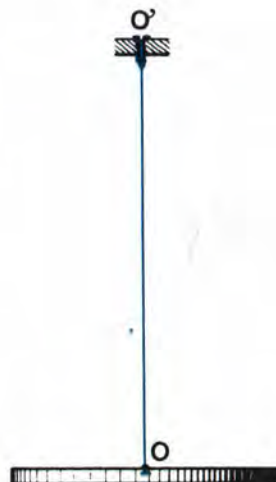


Fig. 12.

LES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

A. RAPPELS CONCERNANT LES QUANTITÉS DE CHALEUR

1. La notion de quantité de chaleur ; la chaleur massique d'un corps ; la calorie.

a. — Si un récipient contenant de l'eau est approché de la flamme d'un brûleur à gaz, la température de l'eau s'élève. On considère que la cause de cette élévation de température est l'absorption par l'eau d'une certaine **quantité de chaleur**.

D'une manière générale, la quantité de chaleur Q absorbée par un corps qui s'échauffe de θ_1 à θ_2 , est proportionnelle à la masse m du corps et à l'élévation $(\theta_2 - \theta_1)$ de sa température :

$$Q = c m (\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

Dans la transformation *exactement inverse* au cours de laquelle le même corps se refroidit de θ_2 à θ_1 , pour revenir à l'état initial, le corps *cède* la même quantité de chaleur Q .

Le facteur de proportionnalité c de la relation (1) s'appelle la **chaleur massique** du corps considéré.

Si l'on fait $m = 1$ et $(\theta_2 - \theta_1) = 1^\circ \text{C}$ dans cette relation, on obtient $Q = c$:

La **chaleur massique d'un corps** est numériquement égale à la quantité de chaleur qu'une unité de masse du corps absorbe pour s'échauffer de 1°C ⁽¹⁾ (ou bien *cède* pour se refroidir de 1°C).

⁽¹⁾ Ou de un degré Kelvin (1°K), si l'on utilise l'échelle absolue de température.

Sa valeur dépend de la nature du corps et des unités choisies pour mesurer les masses et les quantités de chaleur.

b. — **La calorie** (cal), ancienne unité de quantité de chaleur encore fréquemment employée aujourd'hui, se définit en posant $c = 1$ pour l'eau :

La calorie est la quantité de chaleur qu'un gramme d'eau absorbe pour s'échauffer de 1°C (ou bien *cède* pour se refroidir de 1°C).

On utilise aussi les multiples de la calorie : La **kilocalorie** ($1 \text{ kcal} = 10^3 \text{ cal}$) et la **thermie** ($1 \text{ th} = 10^6 \text{ cal}$).

Pour s'échauffer ou se refroidir de 1°C , un kilogramme d'eau absorbe ou cède une **kilocalorie**, une tonne d'eau absorbe ou cède une **thermie**.

De la relation (1) nous tirons :

$$c = \frac{Q}{m (\theta_2 - \theta_1)}$$

Cette expression montre qu'une chaleur massique c se mesure en :

calorie par gramme et par degré Celsius
(cal/(g • °C))
ou *kilocalorie par kilogramme et par degré C*
(kcal/(kg • °C)).

Par exemple :
pour le cuivre : $c \approx 0,095 \text{ cal/(g • °C)}$ ou kcal/(kg • °C)
pour la glace
(eau solidifiée) : $c \approx 0,5$ » » »
pour le mercure : $c \approx 0,033$ » » »

2. La capacité calorifique et la valeur en eau d'un corps.

a. — Le produit cm de la masse d'un corps par sa chaleur massique s'appelle la **capacité calorifique** de ce corps.

Si l'on fait $(\theta_2 - \theta_1) = 1^\circ \text{C}$ dans la relation (1), on obtient $Q = cm$; on voit ainsi que :

La capacité calorifique d'un corps est numériquement égale à la quantité de chaleur qu'il absorbe pour s'échauffer de 1°C (ou bien qu'il cède pour se refroidir de 1°C); elle se mesure en $\text{cal}/^\circ\text{C}$ ou en $\text{kcal}/^\circ\text{C}$.

b. — La même quantité de chaleur $Q = cm$ échaufferait de 1°C une masse d'eau μ , telle que $\mu = Q$ (puisque $c = 1$ pour l'eau).

μ est la **valeur en eau** du corps de masse m et de chaleur massique c ; elle s'exprime (en g ou en kg) par le même nombre que la capacité calorifique cm (en $\text{cal}/^\circ\text{C}$ ou en $\text{kcal}/^\circ\text{C}$).

3. La chaleur massique de changement d'état physique d'un corps pur.

C'est, à une température donnée $\theta^\circ \text{C}$, la quantité de chaleur absorbée ou cédée par une unité de masse du corps pur, préalablement amenée à $\theta^\circ \text{C}$, pour changer d'état physique à température et pression constantes.

Par exemple,

— la **chaleur de vaporisation de l'eau à 100°C** est : $l_v = 539 \text{ kcal/kg}$

— la **chaleur de fusion de la glace à 0°C** est voisine de : $l_f \approx 80 \text{ kcal/kg}$

La transformation inverse s'accompagne d'un échange thermique inverse. C'est ainsi que :

1 kg de vapeur d'eau saturante à 100°C cède 539 kcal en se transformant en eau liquide à la même température.

De même, 1 kg d'eau liquide à 0°C cède environ 80 kcal en se transformant en glace à la même température.

B. LE PRINCIPE DE L'ÉTAT INITIAL ET DE L'ÉTAT FINAL

4. La transformation du travail en chaleur et la transformation inverse de la chaleur en travail.

a. — Considérons un cycliste qui, dans une forte pente, conserve une *vitesse constante* grâce à la mise en action des freins.

La diminution d'énergie potentielle du système cycliste-Terre, mesurée par le travail moteur du poids du cycliste et de sa machine au cours de la descente, n'a pas sa contrepartie dans une augmentation de l'énergie cinétique, puisque la vitesse ne change pas.

Il n'y a donc pas conservation de l'énergie mécanique.

Mais il y a un fait nouveau : l'apparition d'une certaine quantité de chaleur, qui se manifeste par l'échauffement des patins et des tambours des freins, au contact desquels sont localisées les forces de frottement.

— Si l'on fait tourner assez vite le système que représente la figure 1, le tube de cuivre T sur lequel frottent les mâchoires de la pince s'échauffe fortement. De ce fait, l'éther contenu dans le tube reçoit de la chaleur et, par suite, se vaporise. La force pressante qu'exerce la vapeur d'éther fait alors sauter violemment le bouchon.

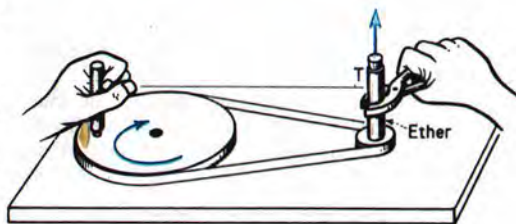


Fig. 1. — La transformation du travail en chaleur. (Expérience de Tyndall.)

Dès que le système est en mouvement uniforme, le travail moteur de la force musculaire n'augmente pas l'énergie mécanique du système, mais de la chaleur apparaît à la surface de contact des mâchoires de la pince et du tube, là où se trouvent localisés les frottements qui s'opposent au mouvement.

— Des observations familières s'interprètent de façon analogue : une lame de scie qui entaille du bois, un foret qui perce un trou dans une pièce de métal s'échauffent et peuvent devenir brûlants.

Dans ces divers cas, la force motrice ne fait qu'entretenir un mouvement auquel s'opposent

des forces de frottement. Le travail moteur qu'elle effectue n'a pas de contrepartie mécanique : en échange de ce travail, on n'obtient ni l'accélération du mouvement produit, ni l'élévation d'un fardeau (comme dans l'emploi d'un treuil ou d'une grue).

D'une manière générale, **si l'on fournit du travail à un système pour vaincre des forces de frottement, le système s'échauffe et produit de la chaleur.**

b. — Un moteur de locomotive à vapeur ou de locomotive Diesel, un moteur d'automobile, une turbine à vapeur ou à gaz, un réacteur d'avion, une fusée, sont appelés des **moteurs thermiques** parce qu'ils produisent du travail quand on leur fournit de la chaleur.

Par exemple, dans un moteur d'automobile, un mélange d'air et d'essence est introduit successivement dans chacun des cylindres, puis comprimé et enflammé (fig. 2 et 3); la chaleur produite par la combustion explosive de l'essence dans l'air comprimé chauffe fortement le mélange gazeux et, par suite, porte sa pression à une valeur très élevée; ce mélange exerce alors sur le piston une force pressante de grande intensité qui le repousse, provoquant la rotation de l'arbre moteur.

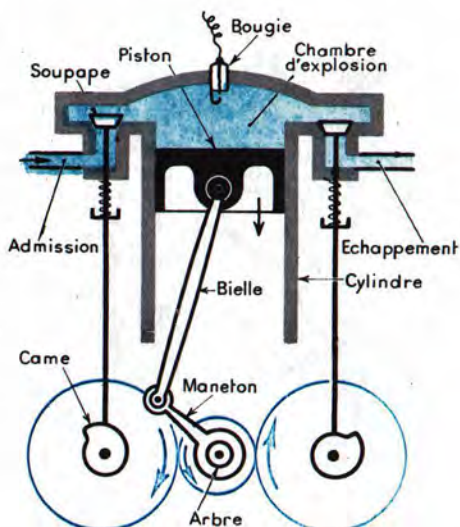


Fig. 2. — Le schéma d'un cylindre de moteur à explosion à 4 temps.

Un tour de l'arbre correspond à un aller-retour du piston.

Les pignons qui commandent les cames des soupapes ayant un rayon double du rayon du pignon solidaire de l'arbre, les soupapes ne s'ouvrent qu'une fois pour 2 tours de l'arbre.

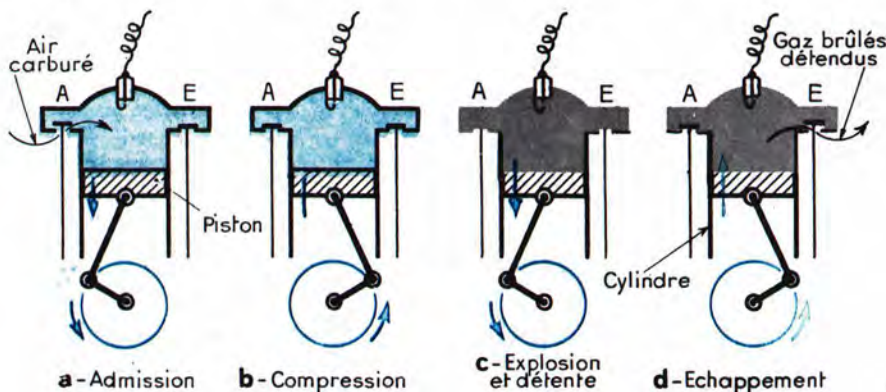


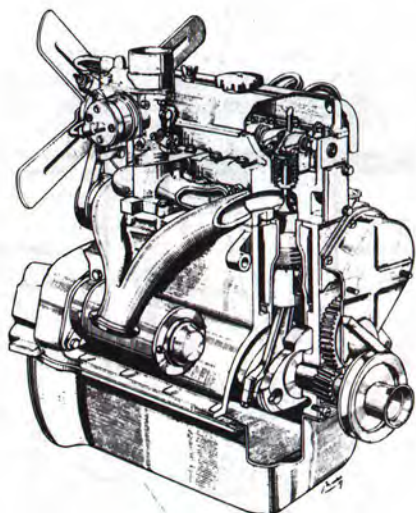
Fig. 3. — Les 4 temps d'un moteur à explosion.

a) A l'**admission**, le piston descend, entraîné par un volant calé sur l'arbre. Seule, la soupape d'admission est ouverte et le cylindre s'emplit d'un mélange d'air et de vapeur d'essence, dosé par le carburateur.

b) A la **compression**, le piston remonte, toujours entraîné par le volant. Les deux soupapes étant fermées, le mélange gazeux est comprimé et s'échauffe.

c) En fin de compression se produit l'**allumage** : une étincelle jaillit entre les électrodes de la bougie et provoque l'**explosion** ; le mélange formé par l'air et les produits de la combustion quasi instantanée de l'essence est porté à très haute température et, par suite, à très forte pression. Il **se détend** en repoussant fortement le piston vers le bas. Ce 3^e temps est le seul temps « moteur » du cycle.

d) A l'**échappement**, la soupape d'échappement s'étant ouverte, les gaz « brûlés » sont refoulés dans l'atmosphère par la remontée du piston, entraîné par le volant. Au terme de ce 4^e temps, la soupape d'échappement se ferme en même temps que s'ouvre la soupape d'admission et le cycle recommence.



Un moteur d'automobile.

Or, si l'on compare la quantité de chaleur reçue par le mélange gazeux au moment de l'explosion à celle que ce mélange gazeux cède au milieu extérieur en se refroidissant après avoir fourni du travail au piston, on constate qu'une partie de la chaleur fournie par la combustion disparaît. On considère qu'elle représente la contrepartie du travail effectué par la force qui repousse le piston et l'on dit que **le moteur thermique transforme de la chaleur en travail**.

Une remarque importante s'impose ici :

Alors qu'en faisant intervenir des forces de frottement on peut transformer *intégralement* du travail en chaleur, un moteur thermique ne peut transformer en travail qu'une *fraction* de la

chaleur que lui fournit la combustion du carburant ⁽¹⁾.

5. L'équivalence de la chaleur et du travail.

a. — L'idée de l'équivalence.

La possibilité d'obtenir de la chaleur en fournissant du travail et, inversement, de produire du travail en fournissant de la chaleur a conduit les physiciens du début du XIX^e siècle à l'idée d'une *équivalence entre le travail et la chaleur*.

Précisons le sens de cette idée :

Considérons par exemple une certaine masse d'un corps dont la température s'élève de 0_1° à 0_2° ; cet échauffement peut être obtenu en faisant absorber au corps, soit une quantité de chaleur Q , soit une quantité de travail W .

Si le rapport W/Q est *constant* quels que soient le corps utilisé, la valeur $0_2 - 0_1$ de l'échauffement et les conditions dans lesquelles cet échauffement est réalisé, on pourra considérer que la quantité de chaleur Q *équivalait* au travail W . Les premières expériences précises de ce type furent réalisées par le physicien anglais *Joule* de 1840 à 1847.

b. — Les expériences de Joule.

Le dispositif utilisé par Joule est représenté schématiquement par la figure 4. Le treuil, mû par les poids des deux disques de plomb K et K', entraîne les palettes mobiles du calorimètre. Les frottements à l'intérieur du calorimètre freinent considérablement le mouvement et absorbent la majeure partie du travail fourni par

⁽¹⁾ Cette fraction est généralement comprise entre 10 et 35 %, suivant le type de moteur considéré.

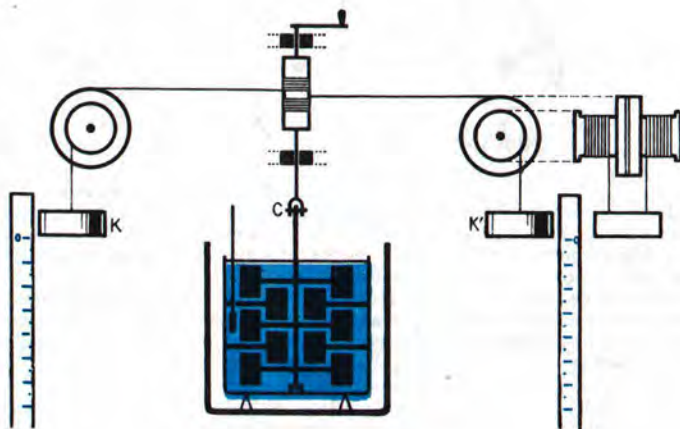
► Fig. 4. — Le schéma du dispositif de Joule.

Le calorimètre contient une masse d'eau connue. Les palettes fixées à la paroi du calorimètre s'opposent à la mise en mouvement de l'eau par les palettes mobiles, solidaires du treuil.

Les frottements fluides à l'intérieur du calorimètre se trouvent ainsi augmentés; ils ralentissent la chute des disques K et K' qui est pratiquement *uniforme*.

La clavette C permet de séparer le treuil de l'arbre à palettes.

Joule employait des disques en plomb pesant une dizaine de kgf; il les faisait tomber d'une hauteur de l'ordre de 2 m.



les poids; corrélativement, la température du calorimètre et de son contenu s'élève.

1° Évaluons le travail absorbé par les frottements à l'intérieur du calorimètre :

Le système mobile formé par le treuil, les poulies et les disques K et K' est soumis à

- des forces motrices : les poids $\vec{P} = Mg$ des deux disques identiques;
- un couple résistant C (au niveau de la clavette C) dû aux frottements des palettes mobiles sur le liquide;
- des forces résistantes : la résistance de l'air et les frottements sur les arbres du treuil et des poulies.

Au cours d'une chute h des disques :

- Les poids $\vec{P}$ effectuent un travail moteur $2 Mgh$;
- Le couple C effectue un travail résistant dont la valeur absolue W mesure le travail absorbé par le calorimètre;
- Les forces résistantes absorbent un travail W' .

Corrélativement, le système treuil-poulies-disques acquiert une certaine quantité d'énergie cinétique E_c .

Appliquons à ce système le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_c = 2 Mgh - W - W'$$

$$\text{D'où : } W = 2 Mgh - (E_c + W') \quad (2)$$

Pour déterminer la valeur du terme $(E_c + W')$ qui représente la faible fraction du travail des poids absorbée à l'extérieur du calorimètre, Joule séparait le treuil de l'arbre à palettes et enroulait l'une des cordes en sens contraire de l'autre de façon que l'action de l'un des disques, placé en haut de sa course, équilibre celle de l'autre disque placé en bas. Il cherchait alors par tâtonnement la masse m de la surcharge qu'il devait mettre sur le disque supérieur pour communiquer au système mobile un mouvement ayant, en fin de course, la même vitesse que dans l'expérience principale.

Si l'on admet, comme le faisait Joule, que le travail W' des forces résistantes est le même que précédemment, l'application du théorème de l'énergie cinétique donne dans ce cas :

$$E_c = mgh - W'$$

$$\text{D'où l'on tire : } E_c + W' = mgh.$$

En portant dans (2) on voit que la valeur absolue du travail absorbé par les frottements à l'intérieur du calorimètre, au cours d'une chute, a pour expression :.

$$W = 2 Mgh - mgh = (2M - m)gh$$

La valeur de ce travail étant relativement faible, Joule recommençait plusieurs fois de suite la chute du premier type, libérant le treuil (en C) après chaque chute et remontant les disques de plomb à l'aide de la manivelle; le calorimètre recevait ainsi, pour n chutes successives, un travail :

$$W = n (2M - m) gh \quad (3)$$

Avec M et m mesurées en kg, h en m et g en N/kg, W s'exprime en joule (J).

2° — Désignons par θ_i , la température initiale du calorimètre, θ_f sa température après les n chutes successives et μ la valeur en eau totale du calorimètre (1) :

Le même échauffement $\theta_f - \theta_i$ du calorimètre pourrait être obtenu en fournissant au calorimètre une quantité de chaleur :

$$Q = \mu (\theta_f - \theta_i) \quad (4)$$

La valeur en eau μ étant mesurée en gramme et les températures θ_i et θ_f repérées dans l'échelle Celsius (ou Kelvin), la quantité de chaleur Q s'exprime en calorie.

c. — Le résultat : l'« équivalent mécanique » de la calorie.

Si l'on modifie les conditions dans lesquelles le travail est fourni au calorimètre (en changeant par exemple le poids des disques de plomb et la hauteur de chute) et si l'on remplace l'eau du calorimètre par un autre liquide (Joule y mit du mercure, puis de l'huile de baleine), les relations (3) et (4) donnent une autre valeur, W' , du travail fourni et une autre valeur, Q' , de la quantité de chaleur qui produirait le même échauffement que ce travail, mais on constate que :

$$\frac{W'}{Q'} = \frac{W}{Q} = \text{constante } J$$

La conclusion de ces expériences est donc qu'il y a équivalence de la chaleur et du travail :

Q calories équivalent à W joules;

1 calorie équivaut à $\frac{W}{Q} = J$ joules.

Le nombre J , qui apparaît ainsi comme le travail équivalant à une quantité de chaleur de une calorie, est appelé « équivalent mécanique » de la calorie.

(1) C'est la somme de la masse de l'eau contenue dans le calorimètre et des valeurs en eau du vase calorimétrique, des palettes fixes et mobiles et du thermomètre.

A l'époque à laquelle Joule réalisa ses expériences et durant les vingt années qui suivirent, d'autres expérimentateurs, utilisant des dispositifs très variés, arrivèrent à la même conclusion :

Lorsque du travail se transforme *uniquement* en chaleur ou que de la chaleur se transforme *uniquement* en travail, l'apparition ou la disparition d'une calorie correspond *toujours* à l'absorption ou à la production d'un même travail J joules.

Les déterminations les plus précises de cette constante J ont donné :

$$J = \begin{cases} 4,1855 \text{ joules par calorie,} \\ \text{ou} \\ 4,1855 \text{ kilojoules par kilocalorie} \end{cases}$$

Si l'on choisit le *kilogrammètre* comme unité de travail, on a, en remarquant que $1 \text{ kgm} \approx 9,8 \text{ joules}$:

$$J \approx \frac{4185}{9,8} \approx 427 \text{ kgm par kcal}$$

d. — Le joule, unité SI de quantité de chaleur.

L'équivalence de la chaleur et du travail conduit à considérer chaleur et travail comme des grandeurs de la même espèce. Aussi, la Conférence Internationale de 1948 consacrée aux unités de mesures a-t-elle décidé que :

Le joule est à la fois l'unité SI de travail et de quantité de chaleur.

Par suite :

— L'unité SI de *chaleur massique* est le $J/(kg \cdot ^\circ C)$:

Par exemple $\begin{cases} \text{pour l'eau : } c \approx 4185 \text{ J/(kg} \cdot ^\circ C) \\ \text{pour le cuivre : } c \approx 390 \text{ J/(kg} \cdot ^\circ C) \end{cases}$

— L'unité SI de *capacité calorifique* est le $J/^\circ C$;

— L'unité SI de *chaleur de changement d'état* est le J/kg .

Toutefois, la calorie et les unités qui en dérivent sont encore très utilisées en raison de la simplification qu'elles apportent dans les calculs où n'interviennent que des quantités de chaleur, en particulier dans l'évaluation des échanges de chaleur à l'intérieur d'un calorimètre à eau.

6. Le principe de l'état initial et de l'état final.

Les expériences du type Joule établissent l'équivalence du travail et de la chaleur dans un cas particulier : le calorimètre et son contenu s'échauffent de la température θ_1 à la tempéra-

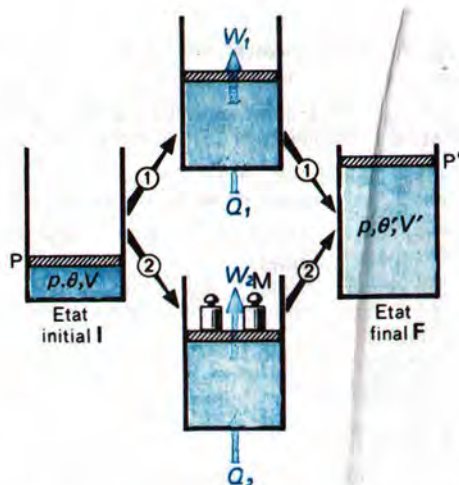


Fig. 5. — Le passage d'une masse d'air d'un état I à un état F par deux chemins différents (1) et (2).

ture θ_2 , soit en recevant *uniquement* du travail, soit en recevant *uniquement* de la chaleur.

On peut se demander ce que devient la relation entre quantités de travail et quantités de chaleur dans le cas plus complexe d'un système subissant des transformations au cours desquelles il reçoit et fournit à la fois du travail et de la chaleur?

Considérons par exemple une masse d'air emprisonnée dans un cylindre qui ferme hermétiquement un piston P (fig. 5).

La paroi du cylindre étant supposée perméable à la chaleur, si on la chauffe extérieurement, le gaz s'échauffe de θ à θ' et, par suite, se dilate de V à V' à pression constante p . Il passe ainsi de l'état initial I (p, θ, V) à l'état final F (p, θ', V').

Au cours de cette transformation, la masse d'air reçoit du milieu extérieur une quantité de chaleur Q_1 ⁽¹⁾ et fournit au milieu extérieur un travail W_1 pour soulever le piston de P en P'.

Le travail W_1 est égal, en valeur absolue, à la somme des travaux résistants effectués par le poids du piston et par la force pressante atmosphérique. Si m désigne la masse du piston, S sa section droite, p_a la pression atmosphérique, et si le piston se soulève d'une longueur l , ce travail a pour expression :

$$W_1 = (mg + p_a S) l$$

Il est possible de faire passer la même masse d'air du même état initial I (p, θ, V) au même état final F (p, θ', V') par une suite différente de transformations (on dit encore par un « chemin différent »).

⁽¹⁾ Il est désormais sous-entendu que les quantités de chaleur, comme les quantités de travail, sont mesurées en joule.

Par exemple, au cours de l'échauffement du gaz, on mettra des masses marquées M sur le piston : le travail W_1 fourni par le gaz pour amener le piston en P' sera alors plus grand que W_1 et il faudra échauffer davantage le gaz, au prix d'une quantité de chaleur Q_2 . Le piston étant en P' , on laissera le gaz se refroidir partiellement tout en retirant progressivement les masses marquées M de façon que le piston ne change pas de position; lorsque celles-ci seront toutes enlevées, l'air aura la température $0'$ et la masse gazeuse sera dans le même état final ($p, 0', V'$) que précédemment.

Faisons le bilan des quantités de chaleur et de travail échangées entre le gaz et l'extérieur au cours de ces deux suites de transformations; convenons de compter *positivement* ce qu'il reçoit et *négativement* ce qu'il fournit :

— Dans la transformation 1, le gaz reçoit, $W_1 + Q_1$, avec $Q_1 > 0$ et $W_1 < 0$;

— Dans la transformation 2, le gaz reçoit Q_2 pour s'échauffer mais rend Q_3 en se refroidissant jusqu'à $0'$; le bilan de ce qu'il reçoit est donc $W_2 + Q_2 + Q_3$, avec $Q_2 > 0$, $W_2 < 0$ et $Q_3 < 0$.

Quelle relation existe-t-il entre les valeurs de ces différentes quantités de chaleur et de travail?

La réponse est donnée par le **principe de l'état initial et de l'état final** :

Dans toute transformation au cours de laquelle un système n'échange avec l'extérieur que du travail et de la chaleur, la somme algébrique des travaux et des quantités de chaleur reçues par le système ne dépend que de l'état initial et de l'état final du système.

Le bilan ne dépend donc pas du chemin suivi pour amener le système de son état initial à son état final; par suite :

$$W_1 + Q_1 = W_2 + Q_2 + Q_3$$

Remarquons que dans le cas particulier du calorimètre de Joule, qui passe du même état initial au même état final en recevant soit un travail W , soit une quantité de chaleur Q , le principe postule l'équivalence de W et de Q , puisqu'il se traduit par l'égalité :

$$W = Q$$

7. L'énergie interne d'un système matériel.

Soit un système passant d'un état initial I à un état final F à la suite d'une transformation au cours de laquelle il n'échange avec le milieu extérieur que de la chaleur et du travail.

Si la somme algébrique $W + Q$ des quantités de chaleur et de travail reçues est *positive*, le système reçoit du milieu extérieur plus qu'il ne lui fournit. On admet que, de ce fait, **l'énergie interne du système augmente**; c'est par exemple le cas pour la masse d'air au cours des transformations 1 ou 2 (fig. 5).

Inversement, si $W + Q < 0$, le système fournit plus au milieu extérieur qu'il n'en reçoit et l'on admet que, corrélativement, **son énergie interne diminue**.

Dans les deux cas, on convient de mesurer la variation de l'énergie interne du système par la somme algébrique $W + Q$. Si, dans l'état I , le système a pour énergie interne U_I , celle-ci prend, dans l'état F , la valeur U_F telle que :

$$U_F - U_I = W + Q \quad (5)$$

Comme, d'après le principe de l'état initial et de l'état final, la somme $W + Q$ ne dépend pas du « chemin suivi » de I à F , la valeur U_F de l'énergie interne caractérise l'état F du système.

Ainsi, **l'énergie interne d'un système apparaît comme une grandeur qui caractérise l'état actuel de ce système** : elle reprend la même valeur chaque fois que le système se retrouve dans le même état.

Par exemple, on peut augmenter l'énergie interne du système formé par un calorimètre et son contenu en lui fournissant du travail au moyen d'un dispositif de Joule (fig. 4) ou encore en lui faisant absorber de la chaleur cédée par un corps chaud. Quelles que soient ces transformations, l'énergie interne du système reprend la même valeur U chaque fois que le système se retrouve à la même température θ .

Remarque.

La relation (5) montre que pour évaluer l'énergie interne d'un système dans un état quelconque F il faut connaître la valeur U_I de cette énergie dans un état particulier I . Comme on n'a aucun moyen expérimental de mesurer U_I , on voit que l'énergie interne d'un système n'est définie qu'à une constante près; **seules, les variations de l'énergie interne sont accessibles à l'expérience.**

8. Le cas des transformations cycliques.

On dit qu'un système matériel subit un **cycle** de transformations quand, au terme de celles-ci, le système reprend exactement son état initial.

Dans ce cas, l'énergie interne du système retrouve, à l'état final, la même valeur qu'à l'état initial :

$$U_F = U_I$$

Par suite, d'après (5)

$$W + Q = 0 \quad (6)$$

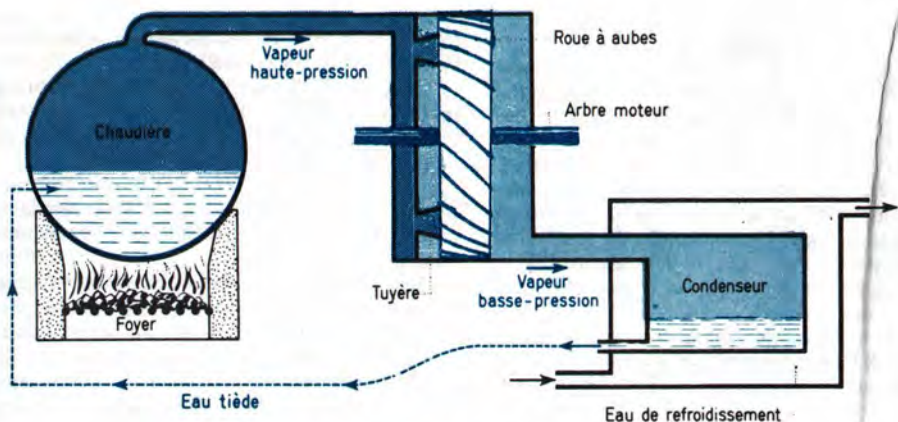


Fig. 6. — Le schéma d'une turbine à vapeur.

Examinons par exemple ce qui se passe pour l'eau dans une **turbine à vapeur** (fig. 6), du type des turbines utilisées dans les centrales thermiques de l'E.D.F. et aussi sur les paquebots et les grands bateaux de guerre.

L'eau s'échauffe et se vaporise sous pression dans la *chaudière*; la détente de la vapeur haute pression dans les tuyères accroît considérablement la vitesse d'écoulement; il en résulte de puissants jets de vapeur qui, passant entre les aubes de la *turbine*, impriment à celle-ci un rapide mouvement de rotation. La vapeur, détendue et refroidie, va ensuite se condenser dans une enceinte close, appelée *condenseur*, constamment refroidie extérieurement par une circulation d'eau froide. L'eau de condensation est renvoyée dans la chaudière où elle retrouve son

état initial; elle a alors subi un **cycle** de transformations.

Au cours d'un tel cycle, la masse d'eau considérée :

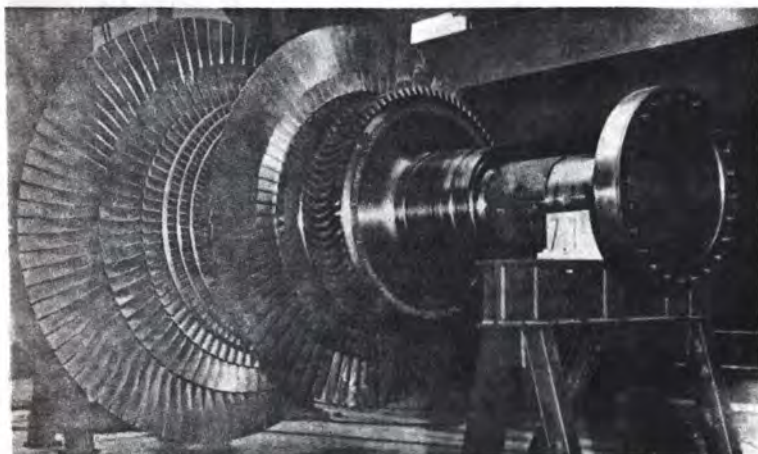
- reçoit dans la chaudière la quantité de chaleur Q_1 pour s'échauffer et se vaporiser,
- fournit un travail W en poussant les aubes de la turbine,
- fournit au condenseur la quantité de chaleur Q_2 en reprenant l'état liquide.

Compte tenu de la convention de signes indiquée précédemment :

$$Q_1 > 0; \quad W < 0; \quad Q_2 < 0$$

Et, d'après (6) :

$$W + Q_1 + Q_2 = 0,$$



◀ La roue à aubes d'une turbine à vapeur.

Document « La Photographie générale »

ce qui s'écrit, en considérant les valeurs absolues des quantités de travail et de chaleur échangées entre l'eau et les organes de la machine à l'intérieur desquels elle évolue :

$$|W| = |Q_1| - |Q_2|$$

Ainsi, le travail fourni est égal à la différence entre la quantité de chaleur prise à la chaudière et la quantité de chaleur rendue au condenseur.

Sous une autre forme, on peut dire que la quantité de chaleur disparue $|Q_1| - |Q_2|$ est transformée en travail $|W|$; la turbine à vapeur est donc un moteur thermique dans lequel l'agent de la transformation de la chaleur en travail est l'eau.

Remarque.

La relation (6), écrite sous la forme :

$$W = -Q$$

résume une loi générale connue sous le nom de **principe de l'équivalence** du travail et de la chaleur :

Lorsqu'un système décrit un cycle de transformations au cours duquel il n'échange avec l'extérieur que du travail et de la chaleur :

— **S'il reçoit du travail ($W > 0$), il fournit de la chaleur ($Q < 0$);**

— **S'il fournit du travail ($W < 0$), il reçoit de la chaleur ($Q > 0$);**

Les quantités de travail et de chaleur échangées avec le milieu extérieur sont dans tous les cas égales en valeurs absolues.

Le principe de l'équivalence et le principe de l'état initial et de l'état final constituent deux énoncés équivalents du **premier principe de la Thermodynamique**. L'un s'applique aux transformations dites *ouvertes*, l'autre aux transformations *cycliques*.

9. La chaleur considérée comme une forme de l'énergie.

La relation (5) montre que l'on peut accroître l'énergie interne d'un système matériel en lui fournissant de la chaleur. Cela conduit à considérer la chaleur comme l'une des multiples formes de l'énergie, **l'énergie calorifique** (ou encore *thermique*).

De ce point de vue, un moteur thermique — tel, par exemple, qu'un moteur à explosion (fig. 2) ou une turbine à vapeur (fig. 6) — apparaît comme un dispositif capable de transformer de l'énergie calorifique en énergie mécanique.

10. La conservation de l'énergie interne d'un système isolé.

Du point de vue thermodynamique, un système matériel est dit *isolé* lorsqu'il ne peut échanger ni travail, ni chaleur avec le milieu extérieur. C'est par exemple le cas d'un ensemble de corps enfermés dans un récipient clos, dont la paroi est indéformable et imperméable à la chaleur.

Pour un tel système, quelle que soit la transformation *intérieure spontanée* dont il peut être le siège, le travail reçu et la chaleur reçue (au sens algébrique du terme) sont nuls :

$$W = 0; \quad Q = 0$$

Par suite, d'après (5) :

$$U_F - U_I = 0; \quad U_F = U_I$$

L'énergie interne d'un système isolé se conserve. Si, du fait d'une transformation intérieure spontanée, l'énergie d'une partie du système diminue, celle du reste du système augmente d'autant.

Exemples particuliers :

a. — Les échanges thermiques dans un calorimètre; la conservation de l'énergie calorifique.

Introduisons un bloc de métal, préalablement chauffé, dans un calorimètre contenant de l'eau froide puis fermons le couvercle de celui-ci; il constitue alors un système isolé.

La transformation *spontanée* de ce système consiste en un refroidissement du bloc de métal accompagné d'un échauffement de l'eau et du vase calorimétrique, jusqu'à ce qu'un équilibre thermique s'établisse dans le calorimètre.

Au cours de la transformation, le bloc de métal cède de la chaleur aux autres parties du système et son *énergie calorifique* diminue d'autant. Corrélativement, l'eau et le calorimètre reçoivent de la chaleur et leur *énergie calorifique* augmente d'autant.

Conformément au principe de la conservation de l'énergie d'un système isolé, l'énergie calorifique perdue par le bloc de métal est égale à l'énergie calorifique gagnée par les autres parties du système; c'est dire que la *quantité de chaleur cédée par le corps qui se refroidit est égale à la quantité de chaleur reçue par les corps qui s'échauffent*. Nous retrouvons le **principe de l'égalité des échanges thermiques à l'intérieur d'une enceinte thermiquement isolée**, sur lequel est fondée la mesure des quantités de chaleur dans un calorimètre à eau. Ce principe calorimétrique est donc une conséquence du principe plus général de la conservation de l'énergie interne.

b. — La conservation de l'énergie mécanique.

Si la transformation spontanée d'un système *isolé* est *purement mécanique* (p. 134), elle ne peut produire que des variations de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique potentielle des diverses parties du système. Par suite, conformément au principe de la conservation

de l'énergie, ce que l'ensemble du système gagne en énergie cinétique il le perd en énergie potentielle et vice versa. Ainsi, là encore, la conservation de l'énergie mécanique totale d'un système isolé (corps lancé dans le vide, pendule pesant ou élastique non amorti...), n'est qu'un cas particulier de la conservation de l'énergie interne d'un système isolé.

En fait, nous savons qu'une transformation purement mécanique est un cas idéal, un « être de raison ». A

cause des frottements, que l'on peut réduire mais non supprimer, l'énergie mécanique diminue plus ou moins vite. Corrélativement, des parties du système s'échauffent et gagnent de l'énergie calorifique. Si le système est isolé, le principe de la conservation de l'énergie interne postule que l'énergie calorifique gagnée est égale à l'énergie mécanique perdue; sous une autre forme, on peut dire que les frottements transforment progressivement l'énergie mécanique en énergie calorifique.

C. LE PRINCIPE ET LE THÉORÈME DE CARNOT

11. Idée du principe de Carnot (second principe de la Thermodynamique)

On peut concevoir toutes sortes de transformations au cours desquelles un système reçoit (au sens algébrique) diverses quantités de travail et d'énergie calorifique. Le principe de l'état initial et de l'état final permet de calculer les bilans énergétiques des transformations envisagées mais il ne renseigne pas sur la possibilité de ces transformations.

Reprenons l'exemple du dispositif de Joule (fig. 4). On obtient facilement l'échauffement de l'eau du calorimètre en lui faisant absorber une partie du travail fourni par la descente des disques K et K'. Par contre, une transformation au cours de laquelle les disques remonteraient pendant que l'eau se refroidirait n'est pas possible, bien qu'elle n'infirme pas l'idée de l'équivalence travail-énergie calorifique contenue dans l'énoncé du principe.

Pour obtenir le travail de remontée des disques au prix d'une disparition d'énergie calorifique, il faut utiliser un moteur thermique.

Une question se pose alors : peut-on réaliser un moteur capable de produire du travail en transformant l'énergie calorifique fournie par le refroidissement de l'eau ?

Le principe de Carnot, qui résume les conclusions auxquelles aboutit, dès le début du XIX^e siècle, l'étude systématique des moteurs thermiques, postule qu'un moteur de ce genre est irréalisable; il affirme en effet que :

1^o Si l'agent ⁽¹⁾ d'un moteur thermique n'est en relation qu'avec une seule source d'énergie calorifique, il ne peut pas fournir de travail.

2^o Pour transformer de l'énergie calorifique en travail, l'agent d'un moteur thermique doit être en relation avec deux sources à des températures différentes. De plus, l'agent ne fournit du travail que s'il prend de l'énergie calorifique à la source « chaude » et s'il en rend une partie à la source « froide ».

Par source d'énergie calorifique, on entend un corps (ou un ensemble de corps) pouvant céder de l'énergie calorifique à l'agent ou en recevoir de lui sans que sa température subisse de variation sensible.

De deux sources, celle dont la température est la plus élevée est appelée la source chaude, l'autre la source froide.

Par exemple, dans une turbine à vapeur, la chaudière est la source chaude, le condenseur la source froide.

Conformément au principe de Carnot, l'eau de la turbine, au cours de chaque cycle de transformations, prend une quantité d'énergie calorifique Q_1 à la chaudière et en cède une quantité Q_2 au condenseur; seule, la différence $Q_1 - Q_2$ est transformée en travail.

On peut montrer que le fonctionnement d'un moteur d'automobile et, plus généralement, de tous les moteurs thermiques, est aussi conforme au principe de Carnot.

Il est important de remarquer que ce principe nie la possibilité d'une transformation intégrale d'énergie calorifique en travail, puisque l'agent de tout moteur thermique rend nécessairement à la source froide une partie de l'énergie calorifique reçue de la source chaude.

Du point de vue de la possibilité de sa transformation en travail, l'énergie calorifique apparaît donc comme étant d'une qualité inférieure à l'énergie mécanique, que l'on peut considérer comme du travail mis momentanément en réserve dans un corps ou un système de corps et qui peut être rendue à peu près intégralement.

⁽¹⁾ Rappelons qu'il s'agit de l'agent de la transformation de l'énergie calorifique en travail (ou énergie mécanique). C'est l'air dans un moteur à explosion et l'eau dans une turbine à vapeur.

12. Le rendement thermique d'un moteur thermique.

Considérons par exemple un moteur d'automobile ou une turbine à vapeur fonctionnant en régime permanent.

Pendant un certain temps t de fonctionnement, l'agent mis en œuvre dans le moteur thermique reçoit une quantité d'énergie calorifique $|Q_1|$ de la source « chaude » et fournit une quantité de travail $|W|$ aux pistons ou à la roue à aubes. On appelle **rendement thermique** du moteur, le rapport :

$$R_t = \left| \frac{W}{Q_1} \right|$$

Le rendement thermique ne dépasse guère :

0,35 pour un moteur à explosion;

0,45 pour une turbine à vapeur.

Cela signifie que, pour 100 joules pris à la source « chaude », l'agent thermique en transforme au plus 35 ou 45 en travail et rend le reste à la source « froide ».

13. Le théorème de Carnot et le rendement thermique maximal.

Supposons qu'au terme du temps t de fonctionnement, cet agent repasse par son état initial après avoir subi un certain nombre de **cycles** de transformations. Si $|Q_2|$ désigne l'énergie calorifique rendue à la source « froide » au cours du temps t , nous avons la relation :

$$|W| = |Q_1| - |Q_2| \quad (\S 8)$$

$$\text{D'où : } R_t = \left| \frac{W}{Q_1} \right| = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right|$$

Cette expression montre que l'augmentation du rendement, but principal des améliorations apportées aux moteurs thermiques depuis plus d'un siècle, exige la diminution du rapport $\left| \frac{Q_2}{Q_1} \right|$; dans quelle mesure cette diminution est-elle possible ?

La réponse à cette question est donnée par un théorème que l'on démontre à partir du principe de Carnot, le

Théorème de Carnot :

1° Pour un moteur thermique fonctionnant entre deux sources données, le rendement thermique est maximal quand les cycles accomplis par l'agent thermique mis en œuvre dans le moteur sont réversibles ;

2° Ce rendement maximal est alors indépendant de la nature de l'agent thermique et de la façon dont le cycle réversible est décrit ;

3° Il ne dépend que des températures des deux sources; son expression, à partir des températures absolues de ces sources, est :

$$R_m = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (7)$$

Rappelons que la température absolue T (en degrés Kelvin) est définie, en fonction de la température Celsius θ correspondante, par la relation :

$$T \approx \theta + 273.$$

Si θ_1 et θ_2 sont les températures Celsius des deux sources, on voit que l'expression (7) équivaut à :

$$R_m \approx \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + 273}$$

Un **cycle réversible** est constitué par une suite de transformations idéales que l'on peut concevoir, dont on peut se rapprocher, mais qu'il n'est pas possible de réaliser. Les conditions de la réversibilité sont en effet les suivantes :

— au point de vue mécanique : absence totale de frottements et de chocs, mouvements infiniment lents des pièces mobiles du moteur ;

— au point de vue thermique : l'agent doit être toujours à une température infiniment voisine de celle de la source avec laquelle il échange de la chaleur.

En fait, les cycles de tout moteur thermique réel sont toujours **irréversibles**, de sorte que le rendement thermique R_t d'un moteur n'atteint jamais la valeur théorique maximale R_m que lui assigne le théorème de Carnot :

$$\begin{aligned} R_t &< R_m \\ 1 - \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right| &< 1 - \frac{T_2}{T_1} \\ \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right| &> \frac{T_2}{T_1}. \end{aligned}$$

Cette inégalité répond à la question posée : il n'est pas possible de diminuer à volonté la fraction $\left| \frac{Q_2}{Q_1} \right|$ correspondant à l'énergie calorifique non transformée en travail.

Exemples numériques.

1° Calculons le rendement thermique maximal d'une turbine à vapeur dans laquelle la source « chaude » est à 500° C (grâce à la surchauffe de la vapeur, après

sa sortie de la chaudière) et la source « froide » (condenseur) à 50° C :

$$R_m = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + 273} = \frac{500 - 50}{773} \approx 0,58$$

2° Dans le cas d'un *moteur à explosion*, la définition des sources est plus délicate; on convient généralement de prendre pour θ_1 la température maximale atteinte par les gaz après l'explosion et pour θ_2 leur température à l'échappement. Par exemple, si $\theta_1 \approx 2\,000^\circ\text{C}$ et $\theta_2 \approx 800^\circ\text{C}$:

$$R_m \approx \frac{2\,000 - 800}{2\,273} \approx 0,53$$

Ces valeurs maximales sont nettement supérieures à celles que l'on obtient actuellement (0,45 pour la turbine et 0,35 pour le moteur à explosion).

Remarque.

Le théorème de Carnot n'a pas que l'intérêt d'assigner une limite théorique au rendement thermique; il a aussi orienté les recherches qui

ont permis d'améliorer notablement ce rendement.

En vue de réduire l'écart entre le rendement thermique réel R_t et le rendement maximal R_m , on a modifié le cycle de l'agent de façon qu'il soit *moins éloigné de la réversibilité*.

D'autre part, comme on a pu montrer que R_t et R_m varient toujours dans le même sens, on s'est attaché à améliorer R_m . Le théorème de Carnot indique qu'il n'y a pas lieu de rechercher, à cette fin, un agent thermique plus efficace

qu'un autre mais qu'il faut diminuer $\frac{T_2}{T_1}$.

Dans le cas des turbines à vapeur, par exemple, cela a conduit, d'une part, à élever de plus en plus la température des chaudières et à *surchauffer* la vapeur avant son passage dans les tuyères de détente et, d'autre part, à employer un condenseur très efficacement refroidi de l'extérieur.

EXERCICES

1. Un corps solide de masse $m = 100\text{ kg}$ glisse, à vitesse constante, sur un plan incliné de 30° par rapport au plan horizontal. Calculer la quantité de chaleur (en joule) produite par les frottements, au cours d'une translation de 100 m le long d'une ligne de plus grande pente du plan incliné.

2. Une boule de plomb pesant 1 kg tombe en chute libre en un lieu où l'accélération de la pesanteur est $g = 9,80\text{ m/s}^2$.

Après 10 m de chute, elle rencontre un obstacle et son énergie cinétique est transformée en chaleur. Calculer :

1° L'énergie cinétique acquise après 10 m de chute;

2° La chaleur dégagée au moment du choc.

3. Dans une détermination de J , du type « expérience de joule », les disques de plomb pèsent 15 kg , la hauteur de chute est de 2 m , la surcharge vaut 200 g , la valeur en eau totale du calorimètre est 5 kg et l'élévation de sa température, pour 20 chutes consécutives des disques, atteint $0,56^\circ$. Quelle valeur de J obtient-on ? ($g \approx 9,80\text{ u. SI}$).

Rép. : $4,17\text{ J/cal}$.

4. L'expérience de *Miculescu* (fig. 7). Les palettes du calorimètre sont entraînées par un moteur électrique. La mesure de la quantité de chaleur équivalente

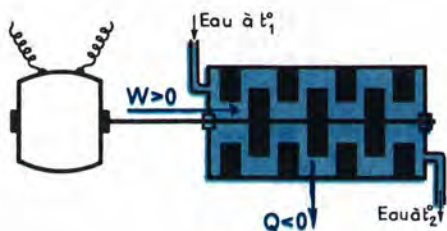


Fig. 7.

au travail reçu s'effectue par une méthode calorimétrique dite de *régime permanent*. A cette fin, le moteur tournant régulièrement, on fait traverser le calorimètre par un courant d'eau dont le débit est constant; dans ces conditions la différence des températures de l'eau à l'entrée (t_1) et à la sortie (t_2) reste constante. D'autre part, le moment $\mathcal{M}$ du couple moteur par rapport à l'axe du système peut être connu et l'on en déduit le travail reçu par le système, compte tenu de la vitesse de rotation.

En admettant que, en régime permanent, le débit soit de 5 l d'eau par minute, que le moteur tourne à raison de $1\,360\text{ tr/mn}$, que $\mathcal{M} = 4,9\text{ m} \cdot \text{N}$ et que $(t_2 - t_1) = 2^\circ$, quelle valeur trouve-t-on pour J ?

5. Pour mesurer l'équivalent mécanique de la calorie on utilise le dispositif suivant :

Dans un calorimètre à eau, de valeur en eau totale égale à 5 kg d'eau, soutenu par un fil d'acier vertical, on fait tourner des palettes à la vitesse constante de 1 200 tr/mn. Pour maintenir en place ce calorimètre de 16 cm de diamètre, on doit le soumettre à l'action d'un couple tangentiel dont les forces ont une intensité égale à 30,65 N. Après une minute de rotation des palettes, la température de l'eau du calorimètre, d'abord voisine de 15°, subit une élévation de 1°,768.

1° Calculer J .

2° Calculer la puissance dépensée dans le calorimètre.

3° On poursuit l'expérience, le moteur qui entraîne les palettes conservant sa vitesse. On mesure pour chaque minute l'élévation de température du calorimètre, et l'on constate qu'elle va s'accroissant pour devenir maximale et égale à 1°,772 aux environs de 40°. Que faut-il en conclure ?

(Bacc.).

6. Un récipient cylindrique fermé tourne d'un mouvement uniforme autour de son axe placé horizontalement. Il est soumis à deux couples : le couple moteur appliqué à son arbre axial, et un couple de frottement produit par un ruban pratiquement immobile posé sur le cylindre, tendu par des poids et dont l'action est égale à celle d'une force de 36,55 N, tangente à la surface du cylindre, normale à son axe.

1° Calculer, en unités SI, le moment du couple de freinage, sachant que le diamètre du cylindre vaut 15,2 cm.

2° Le cylindre fait 895 tours en 8 mn. Calculer la vitesse angulaire du cylindre et la puissance développée par le couple moteur.

3° Le récipient constitue un calorimètre ; il pèse 3,7 kg, sa chaleur massique est 0,10 kcal/(kg · °C) et il contient 250 g d'eau. Pendant les 8 mn de l'expérience, la température de ce calorimètre s'élève de 6°. Quel est en joule l'équivalent mécanique de la calorie ?

(Bacc.).

Rép. : 1° 2,78 m.N ; 2° 11,7 rd/s ; 32,6 W ; 3° 4,2 J.

7. On veut créer un satellite artificiel tournant d'un mouvement circulaire uniforme autour de la Terre, à l'altitude de 1 600 km.

Dans ces conditions, la vitesse linéaire du centre de gravité a pour module : $v \approx 7,15$ km/s.

1° Calculer l'énergie cinétique du satellite en admettant que sa masse est 1 t.

En prenant maintenant 8 u. SI comme valeur moyenne de l'intensité de la pesanteur entre l'altitude 0 et l'altitude 1 600 km, calculer l'augmentation de l'énergie potentielle du satellite quand il part de la surface de la Terre pour atteindre l'altitude indiquée.

2° Calculer la masse de combustible qu'il serait nécessaire de dépenser pour donner au satellite son énergie mécanique totale. On ne tiendra pas compte de la résistance de l'air dans le mouvement d'ascension à travers l'atmosphère. On utilise un combustible

qui dégage en brûlant une quantité de chaleur égale à 42 000 kilojoules par kilogramme ; d'autre part, 10%, seulement de la chaleur produite est transformée en énergie mécanique.

(D'après un probl. de bacc.).

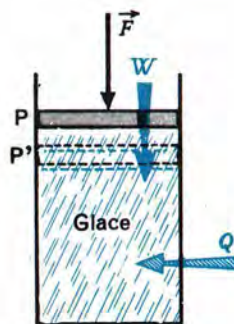


Fig. 8.

8. Calculer la somme $W + Q$ des quantités de travail et de chaleur reçues par un système glace-eau (fig. 8) de masse $m = 1$ kg lorsqu'il passe d'un état initial où il n'est formé que de glace à 0° C à un état final où il ne contient que de l'eau liquide à 0° C.

On donne : masse volumique de la glace : 920 kg/m³ ; chaleur de fusion de la glace : 335×10^3 J/kg. On remarquera que le travail fourni par l'atmosphère est égal au produit de la pression atmosphérique, $p \approx 10^5$ Pa, par la diminution de volume du système.

Rép. : $W \approx 9$ J ; $Q = 335 \times 10^3$ J.

9. Calculer l'accroissement de l'énergie interne d'une masse d'eau de 1 kg lorsqu'on la fait passer de l'état liquide, à 100° C sous la pression atmosphérique normale, à l'état de vapeur à la même température et sous la même pression. On donne : variation du volume accompagnant la vaporisation : $\Delta V \approx 1,68$ m³ ; chaleur de vaporisation de l'eau à 100° C : $l_v \approx 2,26 \times 10^6$ J/kg ; pression atmosphérique normale : $p_0 \approx 10^5$ Pa.

10. Un moteur à explosion à 4 temps possède 4 cylindres identiques ; la section des pistons est 25 cm² et leur course vaut 12 cm ; l'arbre fait 3 000 tr/mn ; calculer le volume d'air aspiré par le moteur en une heure de fonctionnement.

11. Un moteur à explosion à 4 temps comporte 4 cylindres identiques dont la section est 40 cm² ; la course des pistons est 10 cm. Le moteur est alimenté par un mélange d'air et de vapeur d'heptane :

1° Quelle est la composition en volumes de ce mélange gazeux lorsque la combustion complète est assurée par la quantité d'air strictement nécessaire ? (On admettra que l'air renferme 1/5 de son volume d'O₂.)

2° En supposant que l'admission se fasse à la température de 250° C et sous la pression normale, calculer la consommation horaire en kilogramme d'heptane quand l'arbre fait 2 400 tr/mn.

(Coefficient de dilatation des gaz : 1/273; volume molaire normal : 22,4 l).

Rép. : 1° 1/156 d'heptane dans le mélange ; 2° 4,8 kg.

12. Un moteur à explosion utilise, pour son fonctionnement, un mélange de méthane, d'hydrogène et d'oxyde de carbone.

1° 100 cm³ de ce mélange sont introduits dans un eudiomètre avec 140 cm³ d'oxygène. Après passage de l'étincelle et refroidissement, on obtient un volume gazeux de 90 cm³, dont 75 sont absorbables par la potasse et le reste par l'acide pyrogallique en présence de potasse. Dédurre de cette observation la composition centésimale en volumes du mélange considéré.

2° La combustion d'une mole d'oxyde de carbone dégage 68 kcal, celle d'une mole d'hydrogène 69 kcal et celle d'une mole de méthane 214 kcal. Calculer la quantité de chaleur dégagée par la combustion de 1 m³ du mélange précédent, ce volume étant mesuré à 15° C sous la pression normale.

3° Ce moteur à 4 temps consomme 25 m³ de ce mélange par heure et ne transforme en travail, dans ses cylindres, que 30% de la chaleur qu'y produisent les explosions. Calculer la puissance développée au niveau des pistons.

13. Un moteur à explosion à 4 temps et 4 cylindres identiques aspire un mélange de vapeur d'heptane et d'octane à volumes égaux, avec l'air juste nécessaire à la combustion complète. Le volume molaire, pour le calcul des gaz aspirés dans les conditions d'utilisation, sera pris égal à 30 l. Chaque piston a une section de 50 cm² et se déplace de 10 cm.

Chaque gramme du mélange des carbures d'hydrogène fournit 42 000 joules. Le moteur tournant à 1 500 tours par minute développe, au niveau des pistons, une puissance de 20 kW. On demande :

1° La masse d'hydrocarbures consommée à l'heure ;

2° Le rendement thermique du moteur.

On admettra que l'air contient 1/5 en volume d'oxygène.

(Partie de probl. de bacc.).

14. On a un mélange de propane et de butane dont on introduit 12 cm³ dans un eudiomètre ; on ajoute 100 cm³ d'oxygène et on provoque l'explosion par

une étincelle électrique. Après le retour aux conditions initiales, l'eau s'étant condensée, il reste un volume gazeux de 73 cm³, dont 42 sont absorbables par la potasse et le reste par le phosphore. Les conditions expérimentales permettent de négliger la pression de la vapeur d'eau saturante.

1° Trouver la composition centésimale, en volumes, du mélange primitif.

2° Trouver la masse d'un mètre cube de ce mélange de gaz, supposés parfaits, pris à 12,2° C sous la pression de 760 mm de mercure.

3° On suppose qu'un moteur à explosion à 4 temps et 4 cylindres identiques soit alimenté avec ce mélange gazeux et la quantité d'air juste nécessaire pour effectuer la combustion complète des deux gaz. Tous les gaz sont pris dans les conditions normales de température et de pression ; chaque piston a une surface de 50 cm² et une course de 10 cm ; le moteur tourne à 1 200 tr/mn ; la puissance développée au niveau des pistons est de 23 kW.

Calculer le rendement thermique de ce moteur, sachant que la combustion d'une mole de carbure saturé en C_n dégage

$$Q = 53 + 158,7 n \text{ kilocalories}$$

Composition de l'air en volumes : azote 80%, oxygène 20%.

(D'après un probl. de bacc.).

Rép. : 1° 50 % et 50 % ; 2° 2,18 kg ; 3° 0,3.

15. 1° Un moteur d'automobile comporte 4 cylindres identiques fonctionnant selon un cycle à 4 temps.

En régime permanent, la puissance développée au niveau des pistons est de 40 kW.

Le rendement thermique du moteur est $R_t = 0,35$; déterminer en kilocalories par seconde la quantité de chaleur Q_1 fournie par la combustion de l'essence et la quantité de chaleur Q_2 évacuée par le système de refroidissement. L'essence utilisée ayant un pouvoir calorifique de 11 500 kilocalories par kilogramme et sa densité étant de 0,72, trouver la consommation du moteur en litres à l'heure.

2° L'essence utilisée est un carbure d'hydrogène saturé de la série du méthane, dont la densité de vapeur par rapport à l'air est 3,45 ; trouver sa formule et calculer le volume d'air théoriquement nécessaire à la combustion complète de la quantité d'essence consommée par le moteur en une heure.

On admettra que l'air est formé de 1/5 d'oxygène et 4/5 d'azote.

(Partie de probl. de bacc.).

LES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES

15

GÉNÉRALITÉS

A. LES CARACTÈRES GÉNÉRAUX DES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES

1. La définition d'un mouvement périodique; sa période.

Un mouvement est dit *périodique* s'il se répète, identique à lui-même, à des intervalles de temps successifs de même durée T .

C'est dire que si t est un instant *quelconque*, le mouvement est exactement le même entre les instants

$$\begin{aligned} & t \quad \text{et} \quad t + T \\ & t + T \quad \text{et} \quad t + 2T \\ & t + 2T \quad \text{et} \quad t + 3T \\ & \dots\dots\dots \\ & t + kT \quad \text{et} \quad t + (k + 1) T \end{aligned}$$

k étant un nombre entier quelconque.

L'intervalle de temps constant T est la **période** du mouvement; on mesure les périodes en seconde.

Nous avons rencontré plusieurs mouvements périodiques dans le cours de Mécanique; citons le mouvement de rotation de l'arbre d'un moteur tournant à vitesse constante, le mouvement du balancier d'une horloge ou encore celui du pendule à ressort spiral qui règle le mouvement d'une montre. La période est le temps que l'arbre du moteur met à faire un tour, ou bien le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du balancier ou du pendule par la même position, avec le même sens de rotation.

2. Le mouvement vibratoire; sa fréquence.

On appelle généralement *mouvement vibratoire*, un mouvement périodique *rapide* s'effectuant de part et d'autre d'une position d'équilibre. La vibration de l'extrémité libre d'une lame d'acier (lame de rasoir, lame de scie) dont l'autre extrémité est serrée dans un étau (fig. 1), les oscilla-



Fig. 1. — Le mouvement vibratoire d'une lame élastique.

tions des branches d'un diapason, celles d'une corde de violon ou d'une corde de piano sont des exemples de mouvements vibratoires.

La période de tels mouvements étant une faible fraction de seconde, il est plus commode de les caractériser par leur **fréquence**, égale au nombre de périodes par seconde. (On dit encore nombre de cycles par seconde.)

La fréquence f se mesure en **hertz** (Hz); elle est évidemment liée à la période T du mouvement par la relation :

$$f = \frac{1}{T}$$

Par exemple, si $T = 0,01$ s, la fréquence est : $f = 100$ Hz.

Dans l'étude d'un mouvement vibratoire, on précise la forme de la vibration en recherchant l'expression, en fonction du temps, de l'**élongation** y d'un point du corps vibrant ⁽¹⁾. Si T désigne la période du mouvement, cette expression est de la forme :

$$y = f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \dots = f(t + kT)$$

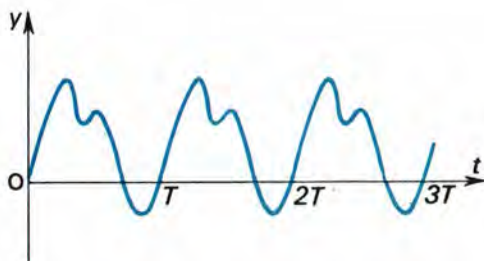


Fig. 2.

La courbe représentative d'une telle fonction périodique du temps se superpose à elle-même à la suite de translations parallèles à l'axe des temps, d'amplitude T (ou kT , k étant un nombre entier quelconque; fig. 2).

L'**amplitude** de la vibration est la valeur absolue de l'élongation maximale.

⁽¹⁾ Rappelons que l'élongation est, à chaque instant, la valeur algébrique de la distance du point mobile à sa position d'équilibre.

3. L'amortissement et l'entretien d'un mouvement vibratoire.

Considérons par exemple le cas d'une lame vibrante.

Pour amorcer sa vibration il faut la déformer, donc effectuer un travail qui se transforme en **énergie mécanique**, partie sous forme cinétique, partie sous forme potentielle élastique.

Si la lame était parfaitement élastique et isolée, son énergie mécanique se conserverait indéfiniment et l'amplitude de la vibration demeurerait **constante**.

En réalité, l'énergie se dissipe peu à peu, tant à cause des frottements que parce qu'une partie de cette énergie est communiquée à l'air, qui se met à vibrer, lui aussi; il en résulte que **la vibration s'amortit**, l'amplitude diminuant progressivement pour s'annuler au bout d'un temps plus ou moins long.

Comme dans le cas des pendules pesant ou élastique, on peut **entretenir la vibration en compensant**, par un apport extérieur périodique, la perte d'énergie survenant au cours de chaque période.

Le mouvement vibratoire est alors **entretenu**, son amplitude est **constante** (fig. 3 et 4).

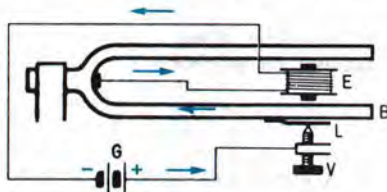


Fig. 3. — L'entretien du mouvement vibratoire d'un diapason.

En vibrant, la branche B du diapason ferme et ouvre alternativement le circuit électrique au niveau de la lame élastique L et de la pointe de la vis V. A chaque fermeture, l'électro-aimant E attire les branches, de sorte que celles-ci reçoivent des impulsions périodiques, rythmées par leurs propres oscillations.

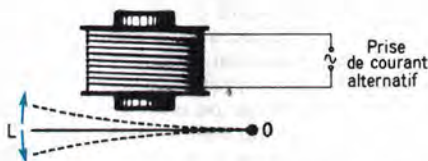


Fig. 4. — L'entretien du mouvement d'un vibreur. Une lame vibrante OL est attirée périodiquement par un électro-aimant alimenté par le courant alternatif du secteur.

B. LE CAS PARTICULIER DES VIBRATIONS SINUSOÏDALES

- 4 On dit qu'un mouvement vibratoire est **sinusoïdal** quand l'élongation d'un point vibrant est une fonction sinusoïdale du temps :

$$y = a \sin (\omega t + \varphi)$$

Le mouvement des branches d'un diapason, lorsqu'elles vibrent avec une amplitude faible, est un exemple de mouvement sinusoïdal.

Rappelons que la *pulsation* ω du mouvement sinusoïdal est liée à la période T et à la fréquence f par les relations :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega = 2\pi f$$

Si l'instant initial est choisi de façon que la phase initiale φ soit nulle, l'expression de y se simplifie; elle peut s'écrire, indifféremment :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = a \sin \omega t \\ y = a \sin \frac{2\pi}{T} t \\ y = a \sin 2\pi f t \end{array} \right.$$

Les vibrations sinusoïdales présentent une importance toute particulière du fait qu'une *fonction périodique quelconque*

$$y = f(t) = f(t + kT)$$

peut toujours être décomposée en une somme de fonctions sinusoïdales (§ 7).

5. La projection sur un axe fixe d'un vecteur en rotation uniforme. La représentation de Fresnel.

a. — Considérons un vecteur $\vec{OA}$ (fig. 5, partie gauche), de module a , tournant dans le plan OX, OY autour de son origine O avec une vitesse angulaire *constante* ω (en rd/s). Si, à l'instant initial $t = 0$, l'angle $(\vec{OX}, \vec{OA})$ a la valeur φ (en rd), il a, à un instant quelconque t , la valeur :

$$\omega t + \varphi$$

Projetons le vecteur tournant $\vec{OA}$ sur l'axe OY . La valeur algébrique de sa projection est, à l'instant t :

$$y = a \sin (\omega t + \varphi)$$

Ainsi :

— le mouvement de la projection de l'extrémité du vecteur tournant sur l'axe OY est un *mouvement sinusoïdal*, d'amplitude a égale au module de ce vecteur;

— la *pulsation* ω du mouvement sinusoïdal est égale à la vitesse angulaire du vecteur tournant;

— la phase initiale φ est égale à l'angle que fait le vecteur tournant avec l'axe OX à l'instant initial $t = 0$.

b. — Réciproquement, on peut faire correspondre un vecteur tournant à toute fonction sinusoïdale $y = a \sin (\omega t + \varphi)$:

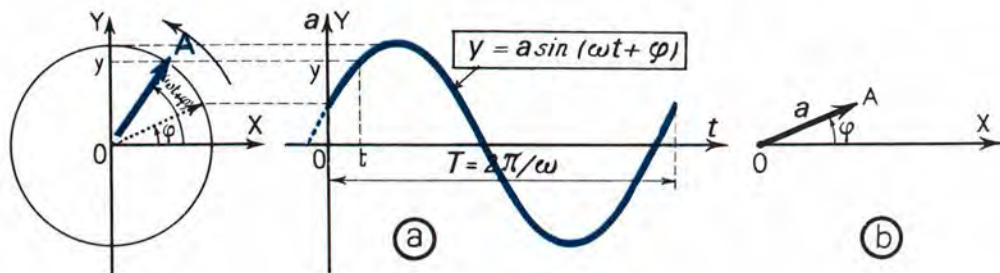


Fig. 5.

Par convention, on représente la fonction y par le vecteur $\vec{OA}$, dans la position qu'il occupe à l'instant initial $t = 0$ (fig. 5-b); le module du vecteur représente l'amplitude a de la fonction sinusoïdale et l'angle (OX, OA) représente sa phase initiale φ . La figure 6 montre comment se place le vecteur représentatif par rapport à l'axe OX selon que l'angle φ est positif ou négatif.

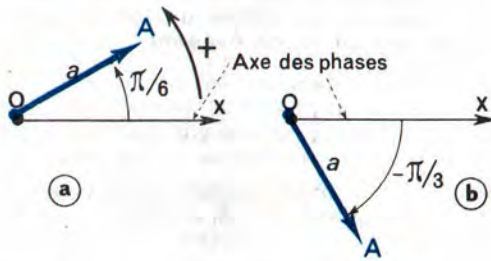


Fig. 6. — La représentation vectorielle d'une fonction sinusoïdale.

Les fonctions représentées sont :

— en a : $y = a \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right)$

— en b : $y = a \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right)$

6. La différence de phase entre deux fonctions sinusoïdales de même période.

Soit par exemple la fonction :

$$y_1 = a_1 \sin (\omega t + \varphi_1)$$

et la fonction :

$$y_2 = a_2 \sin (\omega t + \varphi_2)$$

Ces deux fonctions sinusoïdales ont même pulsation ω , donc même période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

La représentation vectorielle de Fresnel donne immédiatement leur **différence de phase** (ou **déphasage**) :

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \text{ (fig. 7-a) }^{(1)}$$

A cette différence de phase correspond un **décalage horaire**, égal au temps θ que mettrait le vecteur tournant $\vec{OA}_2$ pour passer de la direction OM_2 à la direction OM_1 ; on voit que :

$$\theta = \frac{\varphi}{\omega}$$

Ce retard de y_2 par rapport à y_1 mesure, sur l'axe des temps, le décalage des deux sinusoïdes représentatives (fig. 7-b).

⁽¹⁾ Dans l'exemple représenté, les phases initiales φ_1 et φ_2 sont toutes les deux négatives.

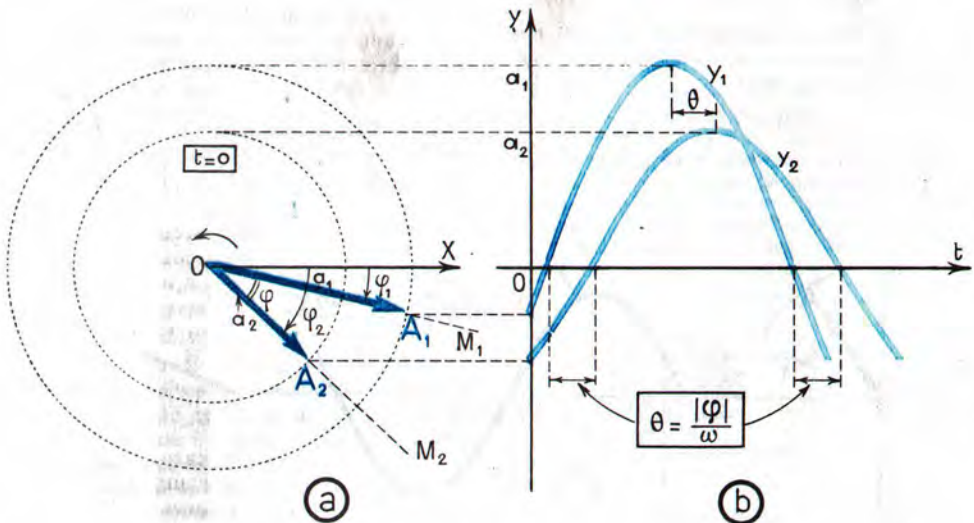


Fig. 7.

Des valeurs particulières du déphasage.

a. — Fonctions « en phase ».

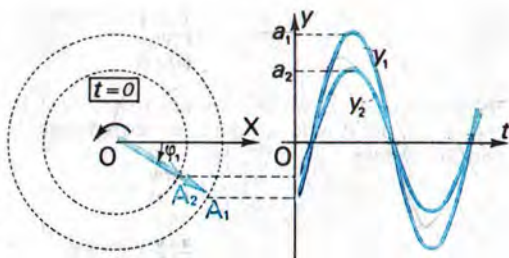
Si $|\varphi| = 0$ (ou $2k\pi$ radians), le décalage horaire est nul (ou vaut un nombre entier de périodes T) : y_1 et y_2 varient *en phase* ; elles s'annulent aux mêmes instants et atteignent ensemble leurs valeurs maximales et minimales (fig. 8-a).

b. — Fonctions « en opposition » de phase.

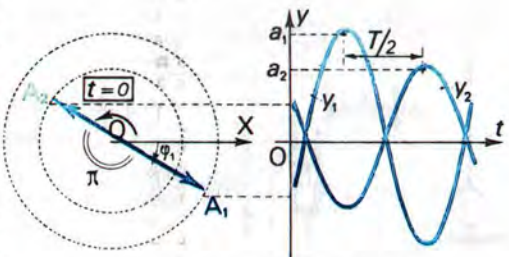
Si $|\varphi| = \pi$ (ou $\pi + 2k\pi$), le décalage horaire vaut une *demi-période* (ou un nombre impair de demi-périodes) ; y_1 et y_2 sont dites *en opposition de phase* : elles s'annulent en même temps mais l'une est maximale quand l'autre est minimale et réciproquement (fig. 8-b).

c. — Fonctions « en quadrature ».

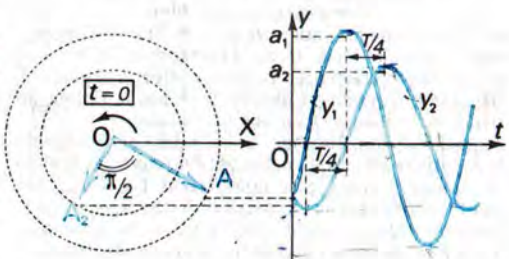
Si $|\varphi| = \pi/2$ (ou $2k\pi \pm \pi/2$), le décalage horaire vaut un *quart de période* (ou un nombre impair de quarts de période) ; y_1 et y_2 sont alors *en quadrature* : l'une est maximale ou minimale quand l'autre s'annule et vice versa (fig. 8-c).



a) Fonctions en phase.



b) Fonctions en opposition de phase.



c) Fonctions en quadrature.

Fig. 8.

7. La décomposition d'une fonction périodique quelconque en une somme de fonctions sinusoïdales. L'énoncé du théorème de Fourier.

a. — Un mouvement vibratoire *sinusoïdal* constitue une vibration *simple*.

Par contre, si l'élongation y du point vibrant est une fonction périodique *non sinusoïdale*, on dit que la vibration est *complexe* (fig. 2).

b. — Une vibration complexe peut toujours être considérée comme résultant de la superposition d'un certain nombre de vibrations simples.

En effet, on démontre en Mathématiques le théorème suivant, appelé **théorème de Fourier** :

Toute fonction périodique de fréquence f peut être décomposée d'une seule manière en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences $f, 2f, 3f, \dots, kf$, dont les amplitudes et les phases initiales sont bien déterminées :

$$y = a_0 + a_1 \sin(2\pi f t + \varphi_1) + a_2 \sin(2\pi \cdot 2f t + \varphi_2) + a_3 \sin(2\pi \cdot 3f t + \varphi_3) + \text{etc.}$$

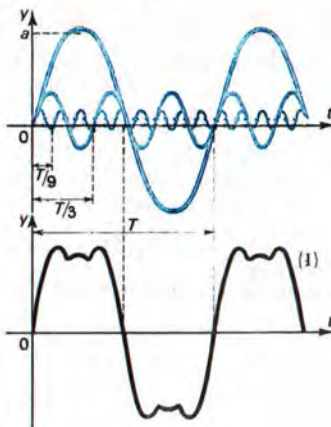
Le terme constant a_0 et certaines amplitudes peuvent être nuls, la suite ci-dessus ne comprenant alors qu'un nombre limité de termes.

Par exemple, la fonction périodique de fréquence f , dont la courbe (I) (fig. 9) représente les variations, se décompose en 3 fonctions sinusoïdales de fréquences $f, 3f$ et $9f$:

$$y = a \sin 2\pi f t + a/3 \sin 6\pi f t + a/9 \sin 18\pi f t.$$

Il importe de remarquer que le *premier terme sinusoïdal* représente une vibration simple de

Fig. 9. — La courbe périodique (I), de période T , représente la *somme* des 3 sinusoïdes de périodes $T, T/3$ et $T/9$ et d'amplitudes $a, a/3$ et $a/9$. (Pour toute abscisse t , l'ordonnée de la courbe résultante est égale à la somme algébrique des ordonnées des sinusoïdes composantes.)



même fréquence f que la vibration complexe étudiée : on lui donne le nom de **composante fondamentale**.

Les autres termes sinusoïdaux sont les **harmoniques** : harmonique 2 de fréquence $2f$, harmonique 3 de fréquence $3f$, etc.

C. L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES

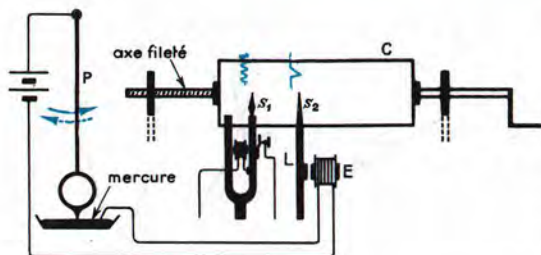


Fig. 10. — L'enregistrement du mouvement vibratoire d'un diapason entretenu.

Sur le cylindre C, enduit de noir de fumée, appuient légèrement le style s_1 du diapason et le style s_2 d'une lame élastique L qu'un électro-aimant E déplace brusquement chaque fois que la pointe du pendule P effleure la surface du mercure.

Quand on fait tourner le cylindre, s_1 enregistre la courbe représentative des oscillations du diapason et s_2 inscrit une ligne comportant des encoches dont l'espacement correspond à la demi-période (connue) du pendule. Du nombre de sinuosités entre 2 encoches on déduit la fréquence du diapason. Grâce à l'axe fileté, la rotation du cylindre s'accompagne d'une translation qui évite la superposition des courbes, d'un tour à l'autre.

8. L'obtention de la courbe représentant la fonction périodique qui caractérise le mouvement étudié.

a. — L'enregistrement graphique.

La figure 10 montre, à titre d'exemple, le principe de l'enregistrement du mouvement vibratoire d'un diapason entretenu. La courbe obtenue représente, en fonction du temps, les variations de l'élongation du style inscripteur, qui est à chaque instant proportionnelle à l'élongation de l'extrémité des branches du diapason.

Cette courbe renseigne donc à la fois sur l'amplitude et sur la forme du mouvement vibratoire étudié; on voit que les oscillations des branches d'un diapason entretenu sont sensiblement sinusoïdales.

Quant à la fréquence de ces oscillations, on la détermine facilement par comparaison, en enregistrant en même temps un autre phénomène périodique de fréquence connue.

b. — L'analyse optique; l'emploi d'un miroir tournant.

Soit, par exemple, à analyser le mouvement vibratoire entretenu d'un diapason (fig. 11) :

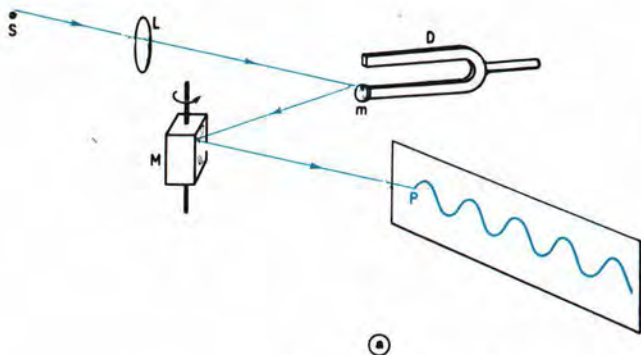


Fig. 11. — L'analyse optique à l'aide d'un miroir tournant.

a) Le montage.

b) Les observations successives sur l'écran.

► Une expérience d'enregistrement de vibration avec un système microphone-oscilloscope. La vibration est ici périodique mais *non* sinusoïdale.

Un pinceau de lumière issu de la source S, rendu convergent par la lentille L, se réfléchit une première fois sur le petit miroir m, collé à l'une des branches du diapason, une seconde fois sur le miroir tournant M, puis vient former un point lumineux P sur un écran diffusant.

— Si l'on fait vibrer le diapason sans faire tourner le miroir M, on observe sur l'écran un segment de droite verticale dû au mouvement vibratoire de P, image du mouvement vibratoire de m (fig. b; 1°);

— Le diapason ne vibrant pas, si M tourne uniformément autour de son axe vertical, P décrit un segment de droite horizontale OX qui représente un *axe des temps* (fig. b; 2°);

— Enfin, si le diapason vibre pendant que M tourne uniformément, P décrit sur l'écran une *courbe périodique*, image du graphe $y = f(t)$ de la vibration du petit miroir m (fig. b; 3°). En fait, des photographies instantanées de l'écran ne montreraient qu'un seul point P dans différentes positions; si l'on voit des segments de droite ou une courbe, c'est parce que le mouvement est assez rapide pour que, du fait de la persistance des impressions rétinienne, l'œil saisisse l'ensemble des positions successives de P.

c. — L'emploi d'un oscilloscope électronique.

Nous étudierons plus tard le principe d'un appareil électronique capable de faire correspondre, à toute vibration électrique, un mouvement vibratoire de *même fréquence, de même forme et d'amplitude proportionnelle*, affectant une très petite tache lumineuse (*spot*) qui apparaît sur un écran fluorescent.

L'appareil permet en outre de composer ce mouvement vertical du spot avec un mouvement de *balayage*, horizontal et *uniforme*, de la gauche vers la droite de l'écran : le spot dessine alors, sur l'écran, comme dans l'analyse optique, une courbe périodique qui donne fidèlement la forme de la vibration électrique étudiée.

Très précieux en Électricité, l'oscilloscope électronique ne l'est pas moins en Acoustique, car il permet d'étudier les mouvements vibratoires qui, nous le verrons, sont à l'origine de tous les phénomènes sonores. Il suffit en effet de lui adjoindre un *microphone* qui fait correspondre, aux vibrations de l'air, des vibrations électriques, de même fréquence, sensiblement de même forme, et d'amplitudes proportionnelles (fig. 12 et photo ci-dessus).

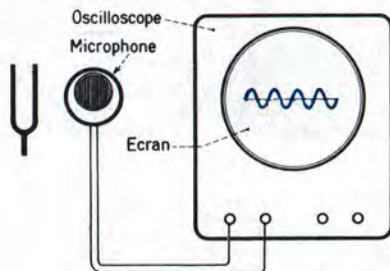
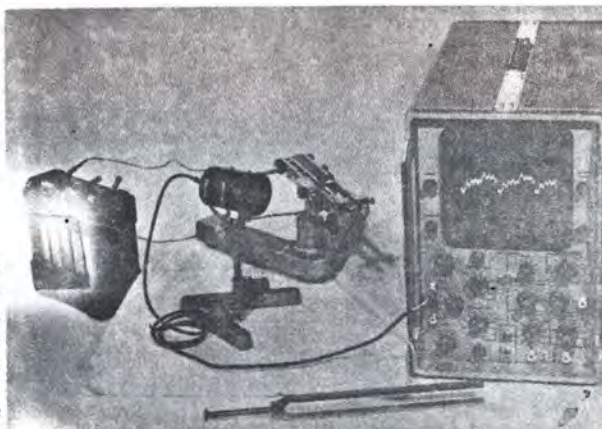


Fig. 12. — L'analyse d'une vibration avec un oscilloscope électronique associé à un microphone. La vibration d'un diapason, transmise par l'air au microphone, impose à la membrane sensible de celui-ci une vibration de même fréquence et de même forme $y = f(t)$, dont le graphe apparaît sur l'écran de l'oscilloscope.

9. L'étude d'un mouvement vibratoire au ralenti.

a. — L'ultracinéma.

Le ralenti cinématographique, que tout le monde connaît aujourd'hui, facilite l'étude d'un phénomène rapide, donc celle d'un mouvement vibratoire. Divers dispositifs « *ultra-cinématographiques* » permettent d'obtenir jusqu'à *plusieurs milliers d'images consécutives par seconde* sur un film à très grande vitesse de déroulement.

La projection cinématographique normale de ce film, à raison par exemple de 25 images par seconde, permet une analyse détaillée de phénomènes très rapides.

b. — La stroboscopie.

Le principe. — Pour observer un mouvement périodique de période T , on éclaire le dispositif par une *suite d'illuminations très brèves et périodiques* de période T' . On substitue ainsi, au mouvement réel, un *mouvement apparent* dont les caractéristiques dépendent des valeurs de T et T' .

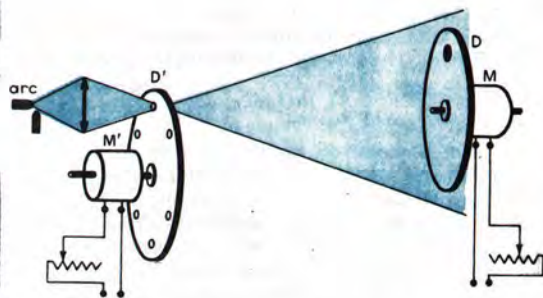
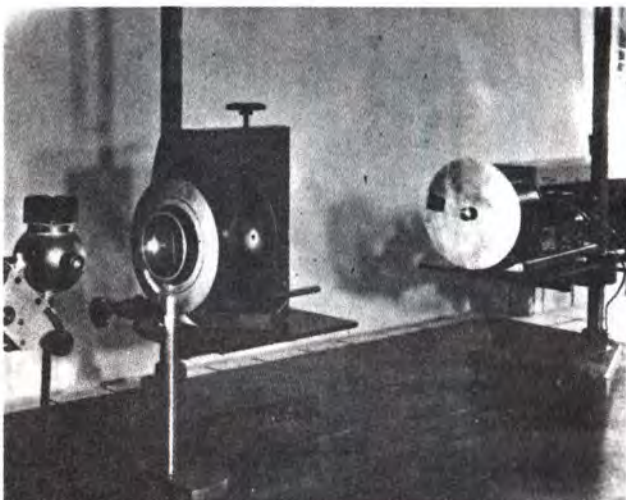


Fig. 13. — L'étude stroboscopique d'un mouvement périodique.

Chaque disque est entraîné par un moteur électrique dont on peut régler la vitesse de rotation. Si D' porte p trous et fait uniformément n tours par seconde, la fréquence des « éclairs » est $f' = np$; leur période T' (intervalle de temps entre 2 éclairs consécutifs) est : $T' = 1/f' = 1/np$.

L'illustration expérimentale. — La figure 13 montre, par exemple, comment on réalise la stroboscopie du mouvement circulaire *uniforme* d'une tache noire peinte sur un disque blanc D , entraîné à vitesse constante par un moteur électrique. La période T du mouvement périodique étudié est ici la durée d'un tour du disque D .

L'éclairage intermittent et périodique est obtenu en interceptant un faisceau lumineux par un disque troué D' qu'entraîne un autre moteur électrique.

En éclairage continu, à cause de la persistance des impressions visuelles, la tache s'étale en une bande noire circulaire (fig. 14); par contre, en éclairage intermittent, l'aspect est tout différent :

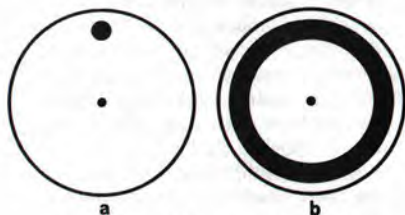


Fig. 14. — L'aspect du disque D :

- a) immobile;
b) quand il tourne.

1° Plusieurs taches immobiles.

Si la période T' des éclairs est une fraction T/k de la période T du mouvement de la tache, celle-ci fait $1/k^e$ de tour entre 2 éclairs consécutifs; à cause de la persistance des impressions visuelles, l'œil la voit en même temps dans les k différentes positions où les éclairs la surprennent : il a donc l'illusion de voir k taches immobiles, régulièrement distribuées (fig. 15).

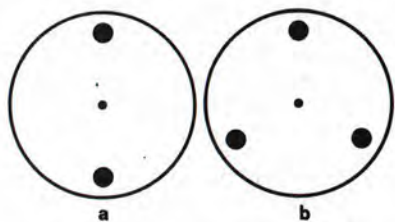


Fig. 15. — Apparence de k taches immobiles ($T' = T/k$).

- a) $k = 2$; b) $k = 3$.

2° Tache unique immobile.

Si $T' = kT$, k étant un nombre entier, la tache fait k tours complets entre deux éclairs consécutifs; comme elle apparaît alors dans la même position à chaque éclair, elle semble immobile.

L'immobilité apparente a lieu, en particulier, pour $k = 1$, c'est-à-dire quand la période du phénomène étudié est égale à la période des éclairs.

3° Mouvement apparent ralenti; le calcul de sa fréquence.

Supposons que la valeur de T' soit différente mais voisine de kT :

On voit alors une tache unique tourner lentement d'un mouvement uniforme dont le sens est celui du mouvement réel ou le sens inverse selon que T' est supérieure ou inférieure à kT .



Fig. 16. — Mouvement réel et mouvement apparent ($T' = T + \epsilon$).

Si, par exemple, $k = 1$ (la période T' des éclairs étant un peu supérieure à la période T de la rotation du disque), le mouvement réel de la tache, entre deux éclairs consécutifs, est AMB alors que son mouvement apparent n'est que AB.

Recherchons la période θ de ce mouvement ralenti apparent en admettant que T' est un peu supérieure à kT :

Entre deux éclairs consécutifs, c'est-à-dire en un temps T' , la tache fait en réalité k tours complets plus une petite fraction ($1/n^e$) de tour alors que l'œil a l'illusion qu'elle n'effectue que $1/n^e$ de tour (fig. 16). Elle paraît donc faire 1 tour en un temps n fois plus grand, de valeur :

$$\theta = nT' \quad (1)$$

Ce temps θ est la période du mouvement ralenti apparent.

En fait, dans le temps θ , la tache effectue :

$$(k + 1/n) n = kn + 1 \text{ tours}$$

Par suite : $\theta = (kn + 1) T$.

$$\theta - T = knT \text{ et } n = \frac{\theta/T - 1}{k}$$

Égalons cette expression de n à celle que donne la relation (1) :

$$\frac{\theta}{T'} = \frac{\theta/T - 1}{k}$$

$$\frac{k\theta}{T'} = \frac{\theta}{T} - 1$$

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T} - \frac{k}{T'}$$

D'où, en introduisant les fréquences $f = 1/T$, $f' = 1/T'$ et la fréquence du mouvement ralenti apparent $\nu = 1/\theta$:

$$\boxed{\nu = f - kf'}$$

En particulier, si $k = 1$ (c'est-à-dire si la fréquence des éclairs est légèrement inférieure à celle du phénomène étudié; fig. 16) :

$$\nu = f - f'$$

Dans ce cas, la fréquence du mouvement apparent est égale à la différence entre la fréquence du mouvement réel et la fréquence des illuminations.

Si la fréquence f' des éclairs est au contraire un peu plus grande que la fréquence f du phénomène étudié, on obtient une valeur négative de la fréquence ν , indiquant que le mouvement apparent a le sens inverse du mouvement réel.

Remarque.

L'éclairage intermittent est obtenu de diverses manières; en particulier, on peut employer des tubes lumineux auxquels des dispositifs électroniques imposent des tensions électriques périodiques : la fréquence des éclairs atteint ainsi plusieurs centaines et la durée de chacun d'eux ne dépasse pas 10^{-6} seconde.



Un stroboscope électronique.

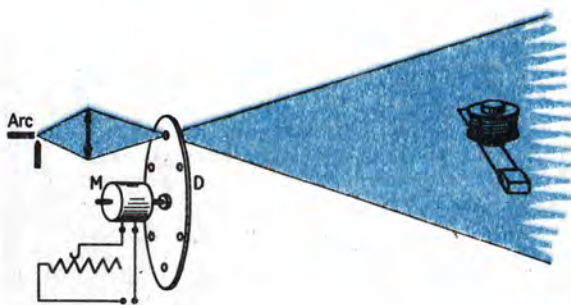


Fig. 17. — L'analyse stroboscopique du mouvement d'un vibreur entretenu.

Les applications de la stroboscopie.

L'éclairage stroboscopique permet :

- De déterminer facilement la fréquence f du phénomène périodique étudié connaissant la fréquence f' des éclairs (exercice n° 4);
- De vérifier que des mouvements périodiques simultanés sont ou non *synchrones* (même période);
- D'étudier, en le ralentissant à volonté, toutes les phases d'un mouvement vibratoire trop rapide pour être analysé directement (fig. 17).

C'est ainsi que, dans l'industrie, on étudie à l'aide d'un stroboscope les déformations d'une hélice en rotation, le va-et-vient des soupapes d'un moteur, etc.

EXERCICES

1. Représenter graphiquement la fonction (en s'inspirant de la figure 9) :

$$y = a \sin 2\pi ft + a/2 \sin 6\pi ft$$

($a = 3$ cm; une période de y correspondra à 6 cm sur l'axe des temps).

2. Représenter graphiquement la fonction :

$$y = a \sin 2\pi ft + a/2 \sin (4\pi ft + \varphi)$$

1° $\varphi = 0$; 2° $\varphi = \pi$ radians.

(On prendra $a = 4$ cm et $T = 8$ cm sur l'axe des temps).

Constatez l'influence de la phase initiale φ sur la forme de la courbe obtenue.

3. Étant donné la fonction $y = a \sin (\omega t - \pi/6)$, trouver graphiquement les phases initiales φ (exprimées en radian) de fonctions sinusoïdales respectivement en phase, en opposition, en quadrature avance et en quadrature retard avec y .

4. Dans l'étude stroboscopique d'une lame vibrante (fig. 17), le disque troué qui produit les éclairs a $p = 20$ trous et fait n tours par seconde.

1° Sachant que la plus grande valeur de n pour laquelle la lame paraît unique et immobile est $n = 20$, calculer la fréquence du vibreur.

2° Quel est l'aspect de la lame quand n vaut successivement : 10; 40; 19,75?

Rép. : 1° 400 Hz; 2° 1 lame immobile; 2 lames immobiles; vibration apparente de fréquence 5 Hz.

5. En combien de secteurs égaux faut-il diviser le plateau d'un tourne-disque pour qu'il paraisse immobile quand il est éclairé par une lampe lumineuse s'illuminant 100 fois par seconde; le plateau fait : 1° $n = 78$ tours; 2° $n = 45$ tours; 3° $n = 100/3$ tours par minute.

LA PROPAGATION D'UN MOUVEMENT VIBRATOIRE

A. LA PROPAGATION D'UN ÉBRANLEMENT LA CÉLÉRITÉ DE LA PROPAGATION

1. La propagation d'un ébranlement transversal.

a. — Les observations.

1° Considérons une longue corde de caoutchouc légèrement tendue, dont l'une des extrémités O (fig. 1-a) est subitement déplacée jusqu'en O', puis ramenée à sa position initiale.

La portion de corde immédiatement voisine de O se déforme, mais reprend aussitôt sa forme d'équilibre pendant que la portion suivante se déforme à son tour et ainsi de suite de proche en proche : on dit qu'il y a *propagation d'un ébranlement le long de la corde élastique*.

Au passage de l'ébranlement, les divers points de la corde se déplacent *perpendiculairement* à la direction de propagation : l'ébranlement est dit **transversal**.

2° Nous disposons d'un tube de verre de 1 à 2 m de long, de 3 à 4 cm de diamètre, à demi rempli d'un liquide coloré; au repos la surface du liquide est plane et horizontale (fig. 1-b). Une légère secousse fait apparaître une *vague* à la surface du liquide. Cet ébranlement ne reste pas localisé au point de sa formation, mais se propage à la surface du liquide tout le long du tube.

b. — Les conclusions.

L'étude expérimentale de ce phénomène de propagation conduit aux conclusions suivantes :

1° **L'ébranlement se propage à vitesse constante.**

Par exemple, dans la première expérience (fig. 1-a), l'ébranlement atteint des points M_1 ,

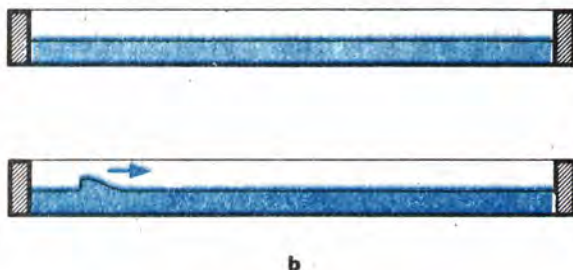
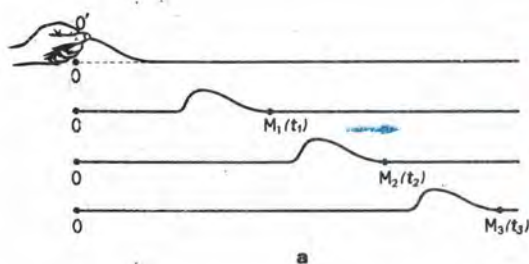


Fig. 1. — La propagation d'un ébranlement transversal :

a) le long d'une corde;

b) à la surface d'un liquide emprisonné dans un long tube.

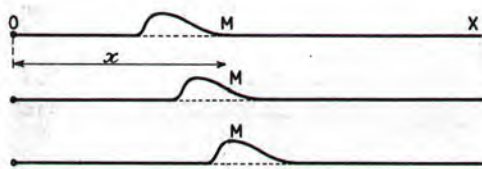


Fig. 2. — Au passage de l'ébranlement, le point M se soulève verticalement puis retombe, reproduisant ainsi le mouvement imprimé initialement à la source O de l'ébranlement, avec un retard $\theta = \frac{x}{V}$.

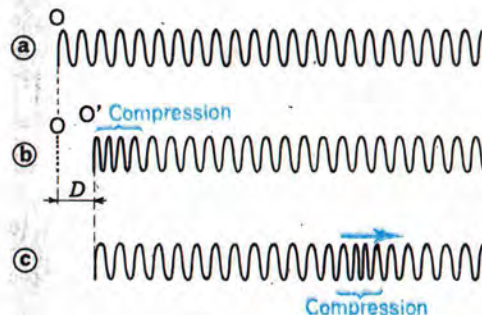


Fig. 3. — La propagation d'un ébranlement longitudinal.

- a) État initial; les spires du ressort sont équidistantes.
 b) Un brusque déplacement OO' , d'amplitude D , provoque une compression.
 c) La compression se propage à vitesse constante.

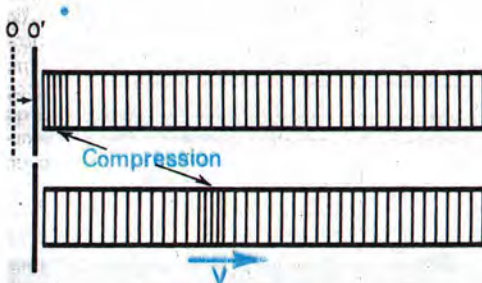


Fig. 4. — La propagation d'un ébranlement longitudinal dans la colonne gazeuse d'un tuyau. La compression provoquée à l'extrémité du tuyau par le brusque déplacement d'une feuille de carton de O en O' se propage dans la colonne gazeuse à vitesse constante.

$M_2, M_3, \dots$ à des dates $t_1, t_2, t_3, \dots$ et l'on a la relation :

$$\frac{M_1 M_2}{t_2 - t_1} = \frac{M_2 M_3}{t_3 - t_2} = \text{constante } V$$

2° Au passage de l'ébranlement, chaque point du milieu de propagation reproduit le mouvement de la source, point initialement déplacé de sa position d'équilibre;

3° Puisque la vitesse V de la propagation est constante, le mouvement d'un point M, situé à la distance x de O (fig. 2), présente, par rapport au mouvement de O, un retard θ égal à $\frac{x}{V}$.

2. La propagation d'un ébranlement longitudinal.

a. — Le long d'un ressort.

Utilisons un long ressort très souple et faiblement tendu. Comprimons quelques spires au voisinage de l'extrémité O puis abandonnons-les à elles-mêmes; elles reprennent leurs positions d'équilibre tandis que les spires voisines se rapprochent à leur tour, et ainsi de suite de proche en proche : il y a propagation du déplacement D et, par suite, de la compression (fig. 3).

Si l'on infligeait à l'extrémité O un brusque déplacement D de sens inverse, il se produirait un écartement des spires voisines de O et l'on observerait dans ce cas la propagation d'une dilatation.

Qu'il s'agisse d'une compression ou d'une dilatation, le passage de la perturbation correspond, pour chacune des spires successives, à un petit déplacement de même direction que la propagation : l'ébranlement est dit longitudinal.

b. — Dans la colonne gazeuse d'un tuyau.

L'expérience du ressort permet de comprendre, par analogie, comment une perturbation (compression ou dilatation) se propage dans la masse gazeuse d'un tuyau (fig. 4)

Comme les spires du ressort, les tranches du gaz subissent, l'une après l'autre, un petit déplacement longitudinal qui s'accompagne d'une petite variation, brusque et temporaire, de la pression du gaz.

Les lois de la propagation d'un ébranlement longitudinal sont analogues à celles d'un ébranlement transversal :

1° La vitesse de propagation est constante.

2° Chaque élément matériel du milieu où s'effectue la propagation subit une perturbation identique à celle que l'on produit initialement

en O, mais avec un retard θ égal au quotient $\frac{x}{V}$ de sa distance à la source O par la vitesse de la propagation.

Il importe de retenir que cette perturbation présente ici deux aspects, toujours inséparables : un *déplacement longitudinal* de l'élément perturbé et une *variation de la pression* de cet élément.

Remarques.

1° Pas plus dans la masse gazeuse que dans la corde ou le ressort, **la propagation d'un ébranlement ne correspond jamais à un transport de matière**; la vitesse de propagation V de l'ébranlement n'est en rien la vitesse d'un corps en mouvement, aussi est-il préférable de parler de la **célérité** de la propagation.

Les seuls mouvements matériels se réduisent aux très brefs déplacements des éléments du milieu au moment où l'ébranlement les atteint.

2° Par contre, **la propagation d'une perturbation s'accompagne d'un transport d'énergie, s'effectuant avec la célérité V .**

Considérons en effet le cas simple d'un ébranlement transversal le long d'une corde : la déformation qui le fait naître correspond à un travail, donc à l'apparition d'une certaine quantité d'énergie mécanique dans la partie déformée; comme cette déformation gagne de proche en proche les autres parties de la corde, l'énergie qui lui correspond *se propage avec elle* à la célérité V caractéristique de la corde.

Parce que le milieu de propagation n'est ni parfaitement élastique, ni isolé, cette énergie se dissipe plus ou moins rapidement au cours de sa propagation. Il en résulte un **amortissement** plus ou moins important de la perturbation, c'est-à-dire la diminution plus ou moins rapide des *élongations maximales* que les éléments du milieu prennent à son passage.

3. Les caractères de la célérité des ébranlements.

Si l'on modifie la forme de l'ébranlement qui prend naissance à l'extrémité de la corde ou du tube, il n'apparaît pas de changement dans la célérité de propagation; de même, le long du ressort, une *dilatation* se propage avec la même célérité qu'une *compression*.

Cependant, si l'on tend davantage la corde ou le ressort, la célérité augmente. Des expériences quantitatives ont permis de préciser et de généraliser ces résultats; elles établissent que :

1° **La célérité de la propagation ne dépend ni de la forme, ni de l'amplitude de l'ébran-**

lement, à condition, toutefois, que la déformation qui en résulte ne soit pas trop importante.

2° Par contre, **la célérité dépend de la nature et de l'état actuel du milieu de propagation.**

En particulier, la théorie prévoit et l'expérience confirme que la célérité des ébranlements transversaux le long d'une *corde sans raideur* ⁽¹⁾ s'exprime, en fonction du module F de la tension de la corde et de sa *masse linéaire* μ (masse par unité de longueur), par la relation :

$$(1) \quad V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \left\{ \begin{array}{l} F \text{ en newton;} \\ \mu, \text{ en kilogramme par mètre;} \\ V \text{ en mètre par seconde.} \end{array} \right.$$

Par exemple, pour une grosse corde de caoutchouc de 5 m de longueur, de masse 0,49 kg et dont la tension vaut 1 kgf, on a :

$$F \approx 9,8 \text{ N} ; \quad \mu = \frac{m}{l} = \frac{0,49}{5} = 0,098 \text{ kg/m}$$

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \approx \sqrt{\frac{9,8}{0,098}} = 10 \text{ m/s}$$

Dans un gaz, la vitesse de propagation est de l'ordre des centaines de m/s; nous y reviendrons à propos de la célérité du son (p. 175).

4. La propagation dans un plan.

Un choc à la surface libre d'un liquide tranquille (fig. 5) engendre une *ride circulaire* dont le rayon croît uniformément. A son passage, un flotteur subit un petit va-et-vient *vertical* mais n'est pas entraîné latéralement :

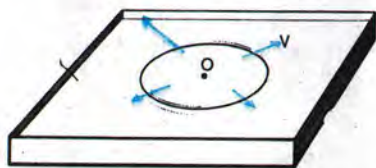


Fig. 5. — Une ride circulaire produite à la surface d'un liquide par une perturbation en O.

C'est donc que *la ride circulaire n'est encore que la propagation d'un ébranlement sans transport de matière*, et que cet ébranlement est ici *transversal*.

L'accroissement, par seconde, du rayon de la ride mesure la **célérité V** de l'ébranlement, qui n'est ici qu'à l'ordre des *décimètres par seconde*.

⁽¹⁾ Une corde est dite *sans raideur* quand, n'étant pas tendue, elle ne résiste pas à la déformation et conserve la forme qu'on lui donne.

Le fait que la ride est *circulaire* montre de plus que la *célérité* est la même dans toutes les directions du plan de propagation.

Remarque.

Il est clair que la propagation d'un ébranlement dans un milieu matériel solide, liquide ou gazeux, est liée à l'élasticité de ce milieu; les points, écartés de leur position d'équilibre par l'ébranlement, y reviennent d'eux-mêmes tout en transmettant l'ébranlement aux points voisins.

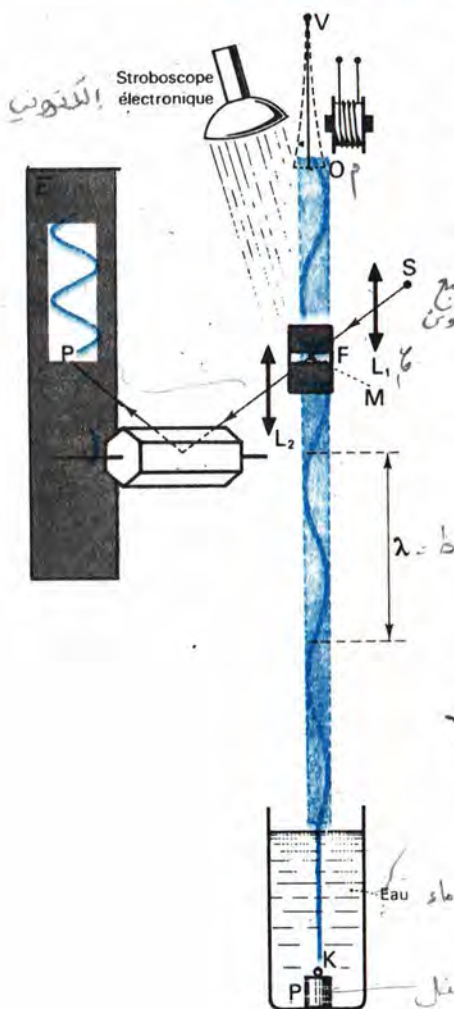
Toutefois, le comportement élastique des fluides (gaz et liquides) est différent de celui des

solides; ceux-ci, résistant à la fois aux changements de forme et aux variations de volume, sont capables de transmettre des ébranlements transversaux et longitudinaux (avec des célérités d'ailleurs différentes).

Au contraire, parce qu'ils ne résistent qu'aux changements de volume, **les fluides ne peuvent propager que des ébranlements longitudinaux** ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Il semble qu'il y ait exception pour la surface libre d'un liquide, où se propagent des ébranlements transversaux; en réalité, une telle surface libre a des propriétés particulières qui la rapprochent beaucoup des membranes élastiques tendues.

B. LA PROPAGATION D'UN MOUVEMENT VIBRATOIRE LA NOTION DE LONGUEUR D'ONDE



5. Un exemple simple : la propagation d'un mouvement vibratoire sinusoïdal le long d'une corde.

a. — L'observation de la propagation.

Un long cordonnet élastique est attaché en O à un vibreur V (fig. 6); le poids tenseur P et la partie inférieure du cordonnet sont immergés dans l'eau pour éviter la réflexion en K du mouvement vibratoire qui se propage à partir de O.

1° L'observation du mouvement d'un point de la corde par l'analyse optique :

Au voisinage d'un point M de la corde, une fente F laisse passer un faisceau lumineux qui, après passage à travers une lentille et réflexion sur un miroir tournant, donne sur l'écran E une bande lumineuse barrée d'une tache noire P, image de la portion M de corde située devant la fente F.

Dès que la corde vibre et que le miroir tourne, P dessine une sinusoïde sur l'écran.

Cette sinusoïde reproduit les variations de l'élongation du point M en fonction du temps; on l'appelle la **sinusoïde des temps**.

◀ Fig. 6. La propagation d'un mouvement vibratoire le long d'une corde.

L'analyse optique montre la **sinusoïde des temps** sur l'écran E : le point M de la corde a un mouvement transversal sinusoïdal.

L'éclairage stroboscopique montre la **sinusoïde des espaces** : à un instant donné, la corde a la forme d'une sinusoïde.

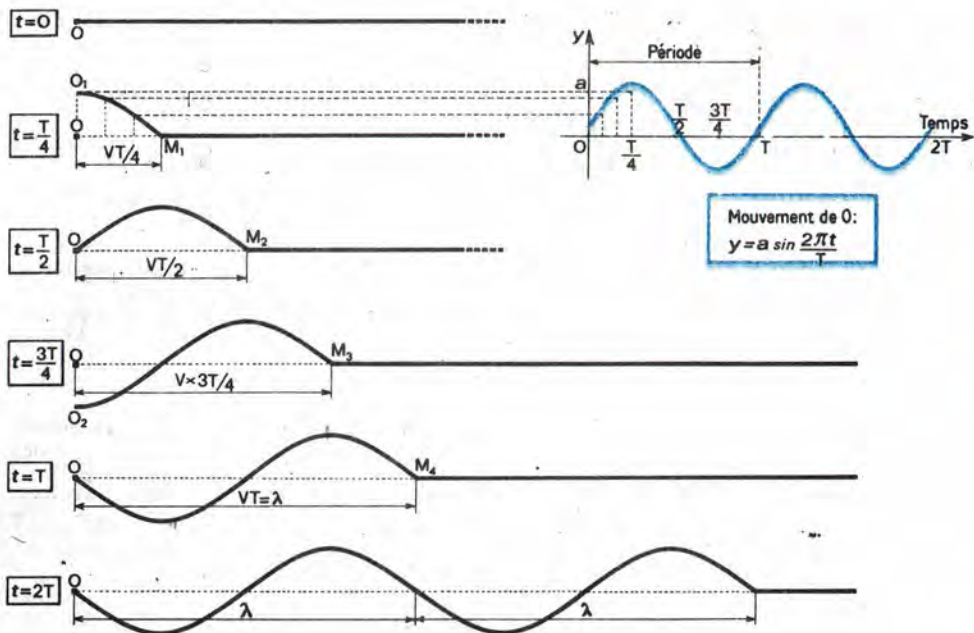


Fig. 7. — L'interprétation de la propagation d'une vibration sinusoïdale transversale le long d'une corde.
 Instant zéro : départ de la source ; tous les points de la corde sont encore au repos ;
 Instant $T/4$: le front de l'ébranlement atteint M_1 tel que $OM_1 = VT/4$; tous les points entre M_1 et O ont des élongations qui reproduisent la suite des élongations prises successivement par O entre les instants zéro et $T/4$.
 Le même raisonnement donne les formes prises par la corde aux instants $T/2, 3T/4, T, \dots$ etc.

Nous constatons qu'un point M de la corde a même mouvement transversal sinusoïdal que le point O source du mouvement, comme nous devions nous y attendre (§ 1-b).

2° L'observation de la corde en éclairage stroboscopique :

Éclairons la corde dans toute sa longueur par un faisceau de lumière stroboscopique dont il est possible de faire varier la fréquence des éclairs :

Pour une valeur convenable de cette fréquence nous voyons la corde prendre la forme d'une sinusoïde immobile.

Cette sinusoïde donne les positions de tous les points de la corde à un instant donné ; on l'appelle la **sinusoïde des espaces**.

En diminuant légèrement la fréquence des éclairs, nous pouvons voir la sinusoïde avancer à partir de O sans se déformer : c'est l'**onde progressive** observée au ralenti.

b. — L'interprétation ; la définition de la longueur d'onde.

Soit T la période du mouvement sinusoïdal communiqué par le vibreur à l'extrémité O de la corde. Pour comprendre comment la corde se déforme progressivement, il est commode de la représenter à divers instants rapprochés, par exemple aux instants zéro, $T/4, T/2, 3T/4, T, 2T$ (fig. 7).

Ces schémas s'obtiennent aisément en utilisant les résultats relatifs à un ébranlement unique : successivement, chaque point (M_1, M_2, M_3, M_4 ; fig. 7) s'anime d'un mouvement qui reproduit celui de la source O de la vibration avec un retard égal au temps que met le front du premier ébranlement à atteindre ce point.

Pour la première fois, au temps T , la source repasse par le même état qu'au temps zéro : la déformation intéresse alors une longueur de

corde ($\lambda = OM_1$) que l'on appelle une **longueur d'onde**.

On voit que la **longueur d'onde λ est la distance parcourue par le mouvement vibratoire pendant une période**; il en résulte, entre λ , la période T (ou la fréquence $f = 1/T$) et la **célérité V** , la relation :

$$\lambda = VT = \frac{V}{f} \quad (2)$$

Cette importante relation montre comment la longueur d'onde λ , qui caractérise la propagation d'un phénomène vibratoire, dépend à la fois de la constante T (ou f) caractéristique de la vibration seule, et de la constante V , caractéristique du milieu dans lequel s'effectue la propagation.

c. — La double périodicité du phénomène de propagation d'un mouvement vibratoire.

Soit un point M, d'abscisse x par rapport à la source O de la vibration :

Avec un choix convenable de l'instant initial $t = 0$, l'élongation de O, à un instant quelconque t , a pour expression :

$$y = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

Puisque le mouvement de M est en retard de $\theta = \frac{x}{V}$ sur celui de O, l'élongation de M à l'instant t est celle qu'avait O à l'instant antérieur ($t - \theta$); elle vaut donc ⁽¹⁾ :

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} (t - \theta)$$

ou, en remplaçant θ par sa valeur $\frac{x}{V}$ et en remarquant que $VT = \lambda$:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3)$$

⁽¹⁾ En négligeant la diminution d'amplitude due à l'amortissement.

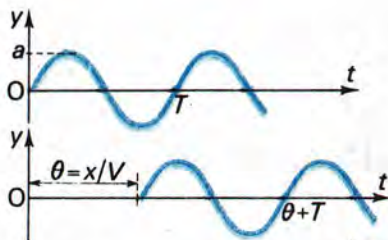


Fig. 8. — La sinusôïde des temps pour un point quelconque M de la corde.

Elle se déduit de la courbe représentative du mouvement de la source O par une simple translation de $\theta = x/V$ le long de l'axe des temps.

1° Périodicité dans le temps : la sinusôïde des temps. — Pour un point M donné, x est déterminé et l'élongation y de M est une fonction sinusoidale du temps seul. La figure 8 montre comment la sinusôïde qui la représente se déduit de celle qui correspond au mouvement de la source.

Ainsi, tous les points de la corde exécutent, comme la source, des vibrations sinusoidales de période T . (fig. 6, partie gauche).

2° Périodicité dans l'espace : la sinusôïde des espaces. — Si l'on donne à t une valeur déterminée, la relation (3) montre que l'élongation y d'un point de la corde n'est plus qu'une fonction de la seule abscisse $OM = x$ de ce point. La sinusôïde qui représente cette fonction est la **sinusôïde des espaces**; elle se confond avec l'image que l'on obtiendrait en photographiant la corde à l'instant t considéré (fig. 6, dans la région éclairée au stroboscope).

La période de cette sinusôïde est la longueur d'onde λ . Il en résulte que des points de la corde séparés par des distances égales à λ , 2λ , 3λ , ..., $k\lambda$, ont à tout instant la même élongation et la même vitesse : ils vibrent **en phase** (fig. 9). Des points distants d'un nombre impair de demi-longueurs d'onde ont à chaque instant des élongations opposées : ils vibrent **en opposition de phase**. (fig. 9).

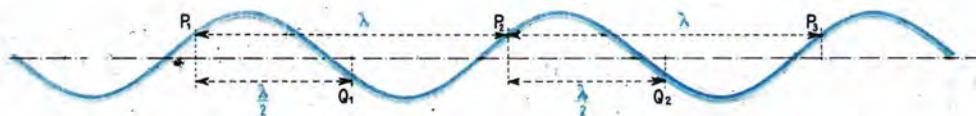


Fig. 9. — La sinusôïde des espaces.

Les points P_1 , P_2 , P_3 vibrent en phase. Les points P et les points Q vibrent en opposition de phase.

d. — L'onde sinusoïdale progressive.

A toute valeur de t correspond une sinusoïde des espaces; toutes ces sinusoïdes, ayant la même amplitude a et la même période dans l'espace λ , ont la même forme et il est facile de vérifier qu'elles ne sont que les aspects instantanés d'une même sinusoïde qui se déplace le long de OX sans se déformer, avec une vitesse constante V égale à la célérité caractéristique de la corde (fig. 10). On résume ces caractères de la propagation en disant que la vibration de la source fait naître sur la corde une **onde progressive transversale sinusoïdale**, de période temporelle T , de célérité V et de période spatiale $\lambda = VT$.

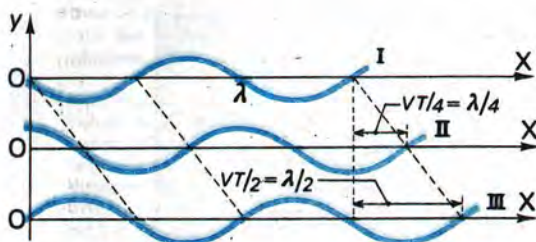


Fig. 10. — L'onde progressive sinusoïdale transversale.

L'équation de l'onde : $y = a \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ donne :

1° Pour $t = kT$: $y = -a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ (I)

2° Pour $t = kT + T/4$: $y = a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ (II)

3° Pour $t = kT + T/2$: $y = a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ (III)

Les sinusoïdes I, II et III ne sont que 3 aspects successifs de la même sinusoïde des espaces se déplaçant sur OX à la célérité constante V .

6. Le cas d'une onde progressive longitudinale.

a. — Le long d'un ressort.

Considérons le long **ressort** déjà utilisé (fig. 3) et supposons que la première spire O soit animée d'un mouvement sinusoïdal longitudinal.

Étant donné l'analogie des lois de la propagation des ébranlements transversaux et longitudinaux, les résultats précédents demeurent valables; en particulier, l'élongation y , à l'instant t , d'une spire située à la distance OM = x ,

a même expression que l'élongation d'un point M de la corde (équation (3)).

La seule différence est que la sinusoïde des espaces qui représente la fonction $y = f(x)$ à un instant donné n'est évidemment plus une photographie du milieu de propagation; elle permet néanmoins de trouver la position de chacune des spires du ressort à l'instant considéré : il suffit en effet de rabattre sur OX les élongations qu'elle fournit, en convenant par exemple de porter vers la droite les élongations positives et vers la gauche les négatives.

C'est ce qui a été fait sur la figure 11, tout au moins pour un certain nombre de spires et pour deux instants successifs; on y retrouve :
— la *distribution périodique des élongations*, avec une période dans l'espace qui est encore la longueur d'onde $\lambda = VT$;

— la *progression d'une onde longitudinale*, formée ici de parties *comprimées* alternant avec des parties *dilatées* et se déplaçant uniformément le long de OX avec la célérité V .

On observe de plus que les maximums de compression ou de dilatation correspondent aux spires dont l'élongation est nulle à l'instant considéré, alors qu'il n'y a ni compression ni dilatation au voisinage immédiat des spires d'élongation maximale.

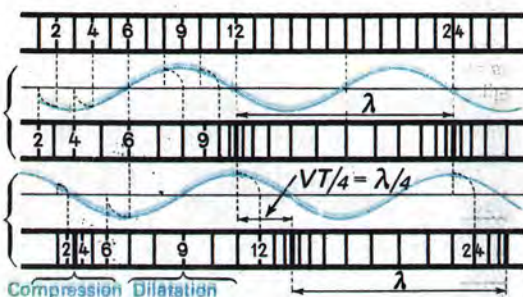


Fig. 11. — L'onde progressive longitudinale.

Le milieu est représenté d'abord au repos, puis à un instant $t = kT$ après l'instant initial de la propagation et enfin à l'instant $t = kT + T/4$.

Périodicité dans le temps : chaque spire effectue autour de sa position d'équilibre (celle qu'elle occupe au temps zéro) une vibration longitudinale de période T ; il en résulte des *compressions* alternant avec des *dilatations*.

Périodicité dans l'espace : les spires (telles que 12 et 24) distantes d'une longueur d'onde ($\lambda = VT$) ont à chaque instant des élongations égales et de même sens.

Les compressions et dilatations se déplacent uniformément vers la droite, formant une *onde progressive longitudinale* de célérité V .

b. — Dans la colonne gazeuse d'un tuyau.

L'analyse précédente du ressort permet de comprendre la propagation d'une vibration longitudinale dans un long tuyau contenant un gaz (fig. 4). La source est par exemple un carton O animé d'un mouvement vibratoire sinusoïdal, de direction parallèle à l'axe du tube, produisant à l'entrée une succession de compressions et de dilatations périodiques.

L'état de la masse gazeuse parcourue par l'onde est encore représenté par la figure 11, si l'on admet que les traits verticaux, au lieu de figurer les spires du ressort, représentent des tranches gazeuses qui, au repos, seraient équidistantes.

7. La propagation d'une onde à la surface d'un liquide.

A la surface d'un liquide, on peut aisément observer la naissance et la progression uniforme de rides superficielles, *circulaires et transversales*, dues au mouvement vibratoire imposé à un point O de la surface libre (fig. 12).

On observe en outre que l'amplitude du mouvement vibratoire communiqué à la surface du liquide décroît rapidement et régulièrement au fur et à mesure que l'onde s'éloigne de O. La raison en est que l'énergie mécanique cédée à l'onde par la source vibrante se répartit dans une masse de liquide de plus en plus grande.

L'éclairage stroboscopique permet de ralentir

(et même d'immobiliser) cette onde circulaire et de vérifier la *constance de la longueur d'onde*, représentée par l'équidistance des crêtes.

Il y a toutefois ici une complication : la célérité V dépend à la fois de la nature du liquide et de la fréquence f de l'onde ; par exemple, pour l'eau (en couche pas trop mince) et des ondes sinusoïdales :

Si $f = 15$ hertz, on a $V \approx 25$ cm/s et $\lambda = V/f \approx 1,7$ cm ;

Si $f = 65$ hertz, on a $V \approx 32$ cm/s et $\lambda \approx 0,5$ cm.

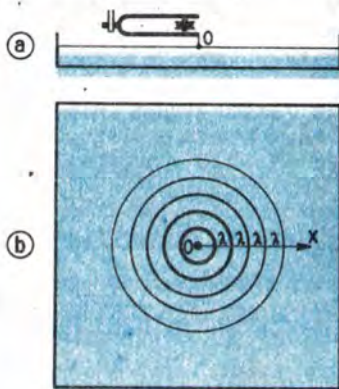
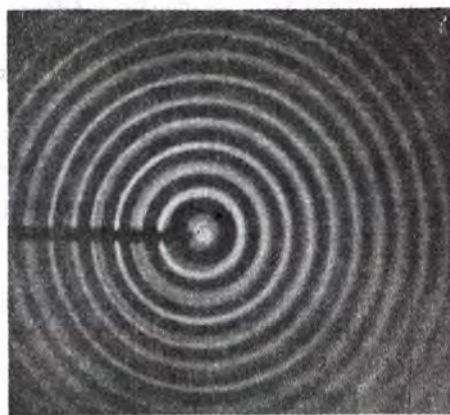
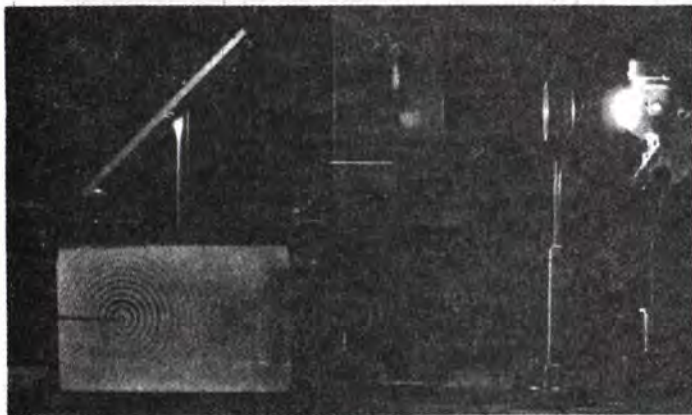


Fig. 12. — Une onde progressive circulaire à la surface d'un liquide.

a) La source. b) L'observation stroboscopique.



La formation d'une onde circulaire progressive à la surface de l'eau.

a) Le montage. — Un faisceau lumineux venant de droite traverse le disque d'un stroboscope, se réfléchit sur un miroir puis traverse la nappe d'eau à la surface de laquelle un vibreur entretenu engendre l'onde progressive. Un second miroir, placé sous la cuve à eau, réfléchit la lumière transmise sur un verre dépoli où se forme l'image de la surface libre en vibration.

b) L'agrandissement de la surface libre déformée par l'onde progressive.

EXERCICES

1. Le long d'une corde élastique, la célérité des ébranlements est 10 m/s; calculer la longueur d'onde des ondes émises par l'extrémité O quand elle est animée d'un mouvement sinusoïdal transversal d'amplitude 10 cm et de fréquence $f = 2,5$ Hz. Quelle est la forme de la corde une période après le début du mouvement de O ?

Rép. : $\lambda = 4$ m; la corde a la forme d'une sinusoïde d'amplitude 10 cm sur une longueur $\lambda = 4$ m à partir de O (fig. 7, pour $t = T$).

2. L'extrémité d'une corde élastique est animée d'un mouvement vibratoire sinusoïdal transversal de fréquence 65 Hz; le premier point de la corde à partir de la source O qui vibre en opposition de phase avec O est à l'abscisse OM = 30 cm. Calculer la célérité des ondes le long de la corde et chercher les abscisses des points qui vibrent en phase avec M.

3. Si l'on fait tomber de l'eau goutte à goutte, à raison de 80 gouttes à la minute, sur la surface d'une nappe d'eau, on constate qu'il naît des rides circulaires dont le centre est au point de chute et que la distance entre les crêtes consécutives est de 45 cm. Trouver la célérité de la propagation de ces rides à la surface de l'eau.

(Partie de probl. de bacc.).

Rép. : 60 cm/s.

4. Une lame vibrante, de fréquence $f = 100$ Hz, est munie d'un style qui détermine en un point S de la surface d'une nappe d'eau une perturbation transversale, périodique, sinusoïdale, de même période, d'amplitude 1 mm, se propageant dans toutes les directions à la surface du liquide à la vitesse uniforme de 37 cm/s.

a) Écrire l'équation du mouvement de S en fonction du temps, puis l'équation du mouvement d'un point M situé à la distance d de S. (On supposera qu'on peut négliger la variation d'amplitude sur la faible espace où l'on opère.)

Représenter graphiquement les résultats obtenus en prenant pour valeur particulière $d = 11,8$ mm.

b) Quel est l'aspect de la surface de l'eau à un instant t quelconque ?

Représenter graphiquement cet aspect le long d'un rayon S x quelconque, à l'instant $t = 0,06$ s, puis $t = 0,065$ s. (Origine des temps : instant où la perturbation débute en S, le point S allant vers le haut.)

(Partie de probl. de bacc.).

5. a) L'équation du mouvement d'une particule est de la forme :

$$y = a \sin(\omega t - \alpha)$$

Le temps t est exprimé en seconde; l'élongation y et l'amplitude a sont exprimées en centimètre. La période du mouvement est égale à 8 s. La trajectoire est un segment de droite de 12 cm de longueur. A l'origine du temps, la particule, qui se meut alors dans le sens positif de y , se trouve déplacée; par rap-

port à la position moyenne, de 3 cm dans le sens négatif.

On demande de calculer :

1° les valeurs des trois constantes a , ω et α ;

2° le temps au bout duquel l'élongation de la particule sera égale à 1 cm dans le sens positif;

3° la valeur en degrés de l'angle $(\omega t - \alpha)$ pour $t = 2$ s.

b) On suppose que le mouvement vibratoire se propage sans amortissement dans le milieu environnant, la période dans l'espace (ou longueur d'onde) étant égale à 320 cm. Calculer l'élongation, à l'instant $t = 6$ s, d'une particule située à 20 cm de la première.

(Pour tout angle inférieur à 10° on confondra le sinus et l'angle exprimé en radian.)

(Bacc.).

Rép. : a) 1° 6 cm; $\pi/4$ rd/s; $\pi/6$ rd; 2° 0,88 s; 3° 60° .

b) — 3,65 cm.

6. A) Étude de mouvements vibratoires.

1° Un point matériel A est animé d'un mouvement sinusoïdal rectiligne de fréquence 80 hertz et d'amplitude 3 mm.

En prenant pour origine des temps l'instant où le point A passe par sa position d'équilibre dans le sens positif des élongations, donner l'expression de son élongation y en fonction du temps. A quels instants l'élongation du point A sera-t-elle égale à 1,5 mm, le point A se déplaçant dans le sens des élongations décroissantes ?

2° Ce point matériel est pris à l'extrémité d'un vibreur, lié à une corde élastique, sans raideur, de longueur infinie, à qui il imprime une vibration transversale. La célérité de propagation le long de la corde est 16 m/s.

a) Donner en fonction du temps l'expression de l'élongation d'un point B situé à 5 cm de A.

Quelle sera l'élongation du point B aux instants $t_1 = 0,1$ s, $t_2 = 0,1125$ s, $t_3 = 0,1130$ s ?

b) Quel sera l'aspect de la corde aux instants t_1, t_2, t_3 (faire un graphique) ? Vérifier sur le graphique, les élongations du point B aux instants t_1, t_2 et t_3 .

B) Étude de la célérité de propagation le long d'une corde.

1° Pour faire cette étude, on réalise les expériences suivantes :

a) La corde est maintenant tendue entre deux points fixes. Sa longueur est égale à 6 m, à 3 cm près, et sa tension est 0,98 newton. Un ébranlement transversal se propage le long de la corde et effectue 3 allers et retours en 1,7 s.

b) On pèse la corde utilisée. Sa masse, supposée déterminée exactement, est 14,4 g.

Déterminer, à l'aide des résultats ci-dessus, la célérité de propagation. Sachant que les temps sont mesurés à 0,1 seconde près, évaluer la précision des résultats.

(Partie de probl. de bacc.).

LA NATURE VIBRATOIRE DU SON LA CÉLÉRITÉ DU SON

A. LA PRODUCTION ET LA PROPAGATION DU SON

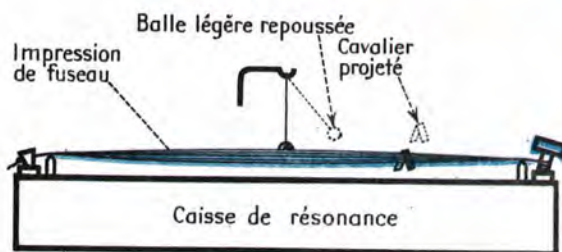
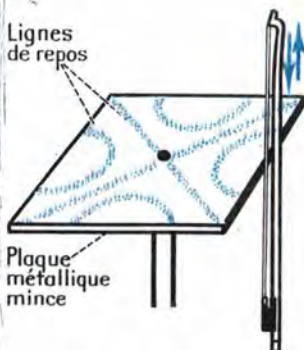


Fig. 1. — Une corde, tendue au-dessus d'une caisse de résonance, rend un son lorsqu'on la fait vibrer en la pinçant ou en la frottant avec un archet.

La vibration peut être mise en évidence par le mouvement communiqué à une petite balle légère approchée de la corde ou par la projection de cavaliers de papier placés sur la corde.



1. Un son est produit par un mouvement vibratoire.

Faisons vibrer un diapason en frappant légèrement l'une de ses branches : nous percevons un son. Si nous immobilisons les branches du diapason en les touchant du doigt, la sensation sonore cesse immédiatement, preuve que la vibration du diapason est la cause du son perçu.

Le fait est général : un son résulte de la mise en vibration d'un corps ou d'un ensemble de corps.

Le générateur de son, ou **source sonore**, est par exemple :

— Un **solide**, tel qu'une corde tendue (fig. 1), une plaque métallique (fig. 2), une cloche (fig. 3), une membrane de haut-parleur ou d'écouteur téléphonique. (La voix est produite par les cordes vocales, replis membraneux du larynx que fait vibrer le courant d'air expulsé des poumons.)

— Une masse d'**air**, soufflée sur le biseau d'un sifflet ou à travers les orifices d'une sirène, ou encore mise en vibration à l'intérieur d'un tuyau sonore (fig. 4).

◀ Fig. 2. — Frottée par un archet, une plaque métallique rend un son. Simultanément, le sable déposé sur la plaque sautille du fait de la vibration et se rassemble suivant certaines lignes de repos.

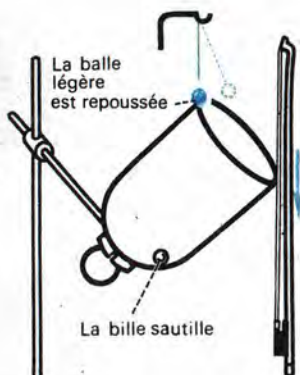


Fig. 3. — Lorsque la cloche rend un son, sa vibration fait osciller le pendule à boule légère et sautiller la petite bille.

2. Tout mouvement vibratoire n'engendre pas un son.

Des dispositifs électroniques permettent de produire et d'entretenir des oscillations électriques dont la fréquence a une valeur f imposée, que l'on peut faire varier très largement, par exemple entre 10 Hz et 30 000 Hz. En passant dans la bobine excitatrice d'un haut-parleur (fig. 5), ces oscillations engendrent une vibration de la membrane ayant aussi la fréquence f .

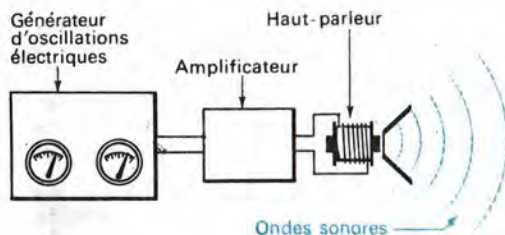


Fig. 5.

L'oreille ne perçoit un son que si la fréquence f est comprise entre certaines limites, d'ailleurs sensiblement différentes d'un auditeur à l'autre. Il est généralement admis que l'oreille cesse d'être impressionnée si la fréquence

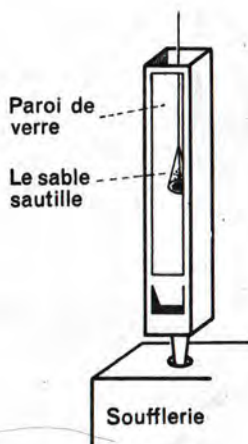


Fig. 4. — La mise en évidence de la vibration de la colonne d'air d'un tuyau sonore.

s'abaisse à moins de 20 Hz ou s'élève au-dessus de 20 000 Hz : on dit alors qu'on a affaire à un *infra-son* ($f < 20$ Hz) ou à un *ultra-son* ⁽¹⁾ ($f > 20\,000$ Hz).

3. La propagation du son.

a. — Le son émis par une source sonore ne parvient pas instantanément à l'oreille; l'observation d'un ouvrier qui, à quelques centaines de mètres de nous, frappe de son marteau une pièce métallique nous permet en effet de constater que la vision du choc du marteau sur le métal précède toujours l'audition du son provoqué par ce choc. C'est la preuve que le son **se propage** depuis sa source jusqu'à l'oreille et que la **célérité de sa propagation est très inférieure à celle de la lumière**.

Par *propagation du son*, il faut entendre celle du mouvement vibratoire issu de la source sonore; de cette source part une *onde progressive* dont les caractères sont ceux des ondes matérielles étudiées dans le chapitre précédent et qui transporte, sous la forme d'énergie dite *sonore*, une partie de l'énergie mécanique mise en jeu dans la source.

La formation d'une telle *onde sonore* suppose l'existence d'un milieu élastique entre la source et l'oreille; l'expérience montre en effet que le

⁽¹⁾ L'oreille des chiens perçoit les *ultra-sons* produits par certains sifflets silencieux.

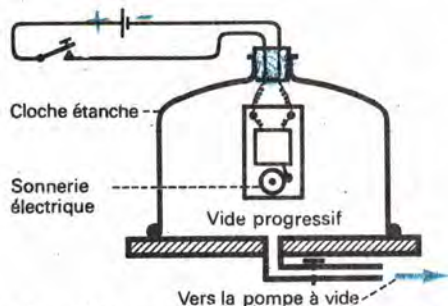


Fig. 6. — Une sonnerie électrique est suspendue par de minces fils d'alimentation à l'intérieur d'une cloche où l'on peut faire le vide. Le son qu'elle émet s'affaiblit graduellement à mesure que l'air se raréfie sous la cloche et devient imperceptible dès que le vide y est pratiquement réalisé.

son ne se propage pas dans le vide (fig. 6).

Le milieu de propagation est habituellement l'air, mais l'observation familière montre que le son peut aussi se propager dans les *solides* (les murs, les vitres, les canalisations d'eau ou de chauffage central, ...) et les *liquides* (un plongeur perçoit des sons au sein de l'eau); on peut le vérifier comme l'indiquent les figures 7 et 8.

Fig. 7. — La règle de bois, de métal, ou de matière plastique, transmet le son du diapason à la caisse de résonance.

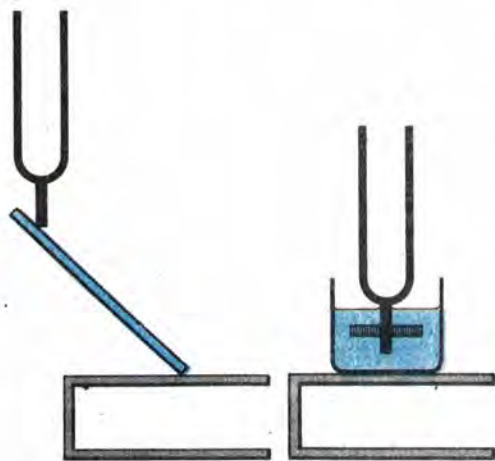


Fig. 8. — La transmission du son peut aussi s'effectuer par l'intermédiaire d'un liquide. Par contre, si le liquide est remplacé par de l'huile, le son n'est plus transmis.

b. — L'onde sonore dans l'air, l'eau ou tout autre fluide est, nous l'avons vu, une *onde longitudinale*, produisant sur son passage une vibration longitudinale des éléments de volume qu'elle perturbe et, corrélativement, une *variation périodique de la pression du fluide* au sein de ces éléments de volume.

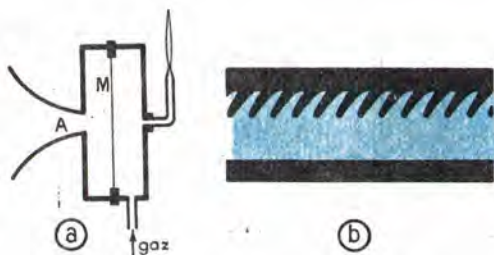


Fig. 9. — Capsule manométrique à flamme sensible. a) Les variations de pression de l'air, dues à l'onde sonore arrivant en A, provoquent la vibration de la lame élastique M et sont ainsi transmises au gaz qui vient brûler à l'extrémité d'un ajutage très fin. b) Examinée au miroir tournant, la flamme présente des dentelures périodiques qui mettent en évidence la vibration des masses gazeuses de la capsule.

On peut mettre en évidence ces variations de pression au moyen d'une *capsule manométrique à flamme sensible* (fig. 9); ce sont elles qui, agissant sur le tympan de l'oreille ou sur la membrane du microphone, déclenchent la sensation sonore ou bien engendrent les oscillations électriques dont le graphe apparaît sur l'écran de l'oscilloscope électronique (fig. 12 de la p. 159).

Notons que la sensibilité de tels récepteurs du son dépend de la fréquence de celui-ci; pour l'oreille, la sensibilité maximale correspond à des fréquences voisines de 1 000 Hz et elle est alors *extrêmement grande*, puisque des variations de pression de l'ordre du dix-milliardième d'atmosphère suffisent à impressionner le tympan d'une oreille normale.

c. — L'expérience quotidienne montre aussi que *la sensation sonore s'affaiblit rapidement avec la distance de l'oreille à la source*; cela tient à ce que :

— 1° L'énergie transportée par l'onde sonore dans toutes les directions issues de la source, se répartit dans une masse sans cesse croissante du milieu de propagation;

— 2° Une partie de cette énergie sonore se transforme en énergie calorifique au cours de la propagation, du fait que le milieu de propagation n'est pas parfaitement élastique.

Notons que le *pouvoir absorbant* d'un milieu donné est une propriété *sélective* : l'énergie sonore transformée en chaleur dans la traversée d'une certaine épaisseur du milieu considéré varie notablement avec la fréquence du son transmis. Par exemple, dans l'air, l'absorption croît avec la fréquence : un son aigu s'affaiblit plus rapidement qu'un son grave.

D'autre part, pour un son de fréquence donnée, les

divers milieux de propagation se révèlent plus ou moins *absorbants* : alors que l'air, la plupart des métaux, le ciment armé, le bois absorbent peu l'énergie sonore, des matériaux *poreux* tels que le feutre, la ouate (fig. 8), le liège, la paille comprimée, certains agglomérés de plâtre l'absorbent beaucoup plus, à égalité d'épaisseur traversée : ils « *étouffent* » le son ; aussi s'en sert-on pour réaliser des *insonorisations*.

B. LA CÉLÉRITÉ DU SON

4. La célérité du son dans les gaz.

a. — La formule de Laplace.

Des propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait au sein duquel se propage un mouvement vibratoire, on déduit l'expression suivante de la célérité du son dans un tel gaz, expression connue sous le nom de **formule de Laplace** :

$$V = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{p}{\rho}} \quad (1)$$

p est la *pression* du gaz, ρ sa *masse volumique* ; c_p et c_v sont les **chaleurs massiques** du gaz, l'une (c_p) pour un échauffement à *pression constante*, l'autre (c_v) pour un échauffement à *volume constant*. Ces deux chaleurs massiques diffèrent d'un gaz à l'autre, mais l'expérience montre que leur rapport $\frac{c_p}{c_v}$ est le même pour des gaz de même **atomicité**, c'est-à-dire dont les molécules possèdent le même nombre d'atomes.

C'est ainsi que pour des gaz *monoatomiques* comme l'argon (A), le néon (Ne) et les autres gaz inertes :

$$\frac{c_p}{c_v} \approx 1,67;$$

Pour des gaz *diatomiques* tels que l'oxygène, l'azote,

l'hydrogène (O_2 , N_2 , H_2) : $\frac{c_p}{c_v} \approx 1,4$; il en est de même pour l'air, qui contient essentiellement de l'azote (4/5) et de l'oxygène (1/5).

Pour le gaz carbonique, qui est *triatomique* (CO_2) :

$$\frac{c_p}{c_v} \approx 1,33.$$

Exprimons la masse volumique ρ en fonction de la *pression* p du gaz, de sa *température absolue* T °K et de sa *densité* d par rapport à l'air :

$$\rho = a_0 d \frac{p}{p_0 T} \quad (\text{cours de Seconde})$$

a_0 est la *masse volumique* de l'air dans les *conditions normales* de température et de pression :

$$a_0 \approx 1,293 \text{ kg/m}^3;$$

p_0 est la *pression atmosphérique normale* :

$$p_0 \approx 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

En remplaçant ρ par sa valeur dans la relation (1), nous obtenons :

$$V = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{p_0}{a_0 d} \frac{T}{273}} \quad (2)$$

Application numérique.

Calculons la célérité du son dans l'air à 0° C :

Nous avons dans ce cas :

$$\frac{c_p}{c_v} \approx 1,4 ; T = 273^\circ \text{ K} ; d = 1.$$

D'où, d'après (2) :

$$V = \sqrt{\frac{1,4 \times 1,013 \times 10^5}{1,293 \times 273}} \approx 331 \text{ m/s}$$

La célérité du son dans l'air a fait l'objet de nombreuses mesures, qui n'ont plus maintenant qu'un intérêt historique ; elles consistaient à mesurer le temps θ mis par un son pour parcourir une distance D connue et à faire le quotient de D par θ .

Les plus récentes mesures ont donné, pour la **célérité du son dans l'air à 0° C** :

$$V \approx 330,75 \text{ m/s},$$

résultat en très bon accord avec la valeur calculée ci-dessus à partir de la formule de Laplace.

b. — Les facteurs de la célérité du son dans un gaz.

La *pression* p du gaz ne figure pas dans l'expression (2). Cela s'accorde avec les résultats expérimentaux : des mesures de célérité effectuées en montagne à diverses altitudes, donc dans des masses d'air à des pressions notablement différentes, montrent en effet que la **célérité du son est indépendante de la pression du gaz**.

D'autre part, la célérité du son dans un gaz ne dépend ni de la *fréquence*, ni de l'*amplitude*, ni de la *forme* des ondes sonores. Aucun de ces facteurs ne figure dans la relation (2) et chacun de nous peut le vérifier en constatant que, à

l'intensité près, l'audition d'un concert ne change pas de caractère quand varie la distance de l'auditeur à l'orchestre.

Par contre, l'expression (2) montre que la célérité du son dépend de l'atonicité du gaz, de sa température et de sa densité par rapport à l'air :

1° La célérité du son dans un gaz est proportionnelle à la racine carrée de la température absolue du gaz. En effet, si nous

désignons par V_0 l'expression $\sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{p_0}{\rho_0 d}}$, qui représente la célérité du son dans le gaz à 0° C (ou 273° K), il vient, d'après (2) :

$$V = V_0 \sqrt{\frac{T}{273}}$$

Par exemple, dans l'air à 15° C
 $V_0 \approx 331$ m/s; $T = 15 + 273 = 288^\circ$ K;

$$V \approx 331 \sqrt{\frac{288}{273}} \approx 340 \text{ m/s}$$

2° Pour des gaz de même atonicité, pris à la même température, les célérités du son sont inversement proportionnelles aux racines carrées de leurs densités par rapport à l'air.

Considérons par exemple l'air, l'hydrogène et l'oxygène à 15° C.

Pour l'air ($d = 1$), nous avons déjà trouvé :
 $V \approx 340$ m/s.

Pour l'hydrogène ($H_2 = 2$), de densité par rapport à l'air $d' \approx \frac{2}{29} \approx 0,069$, la célérité V' est liée à la célérité V dans l'air par la relation :

$$V' \sqrt{d'} = V \sqrt{d}; \quad V' = V \sqrt{\frac{d}{d'}}$$

$$V' \approx 340 \sqrt{\frac{1}{0,069}} \approx 1290 \text{ m/s}$$

Pour l'oxygène ($O_2 = 32$), 16 fois plus dense que l'hydrogène, la célérité du son est 4 fois plus faible que dans ce dernier :

$$V'' \approx \frac{1290}{4} \approx 323 \text{ m/s}$$

5. La célérité du son dans l'eau et quelques solides.

Les sondages sous-marins par ultra-sons exigent la connaissance de la célérité V du son dans l'eau. On admet que, pour l'eau de mer, à une température de l'ordre d'une dizaine de degrés Celsius,

$$V \approx 1500 \text{ m/s}$$

Dans les solides, des mesures de divers types conduisent à des valeurs généralement plus grandes, de l'ordre de :

- 3 000 m/s dans la fonte;
- 3 500 m/s dans le laiton;
- 5 000 m/s dans l'acier ordinaire.

EXERCICES

1. Calculer la célérité du son dans le gaz carbonique à la température 27° C en se servant des données du § 4.

Rép. : 271 m/s.

2. Dans un gaz de densité relative $d = 1,38$ la célérité du son à la température 15° C est 314,2 m/s. Sachant qu'à la même température la célérité du son dans l'air est 340 m/s, calculer le rapport $\frac{c_p}{c_v}$ des chaleurs massiques principales de ce gaz; en déduire son atonicité et la valeur approchée de sa masse atomique.

3. Deux gaz, de densités par rapport à l'air d_1 et d_2 , sont mélangés dans des proportions telles qu'une unité

de volume du mélange contienne la fraction x du premier et la fraction $1 - x$ du second.

Établir que la densité d du mélange par rapport à l'air a pour expression :

$$d = x d_1 + (1-x) d_2$$

4. Calculer la célérité du son, à la température 15° C, dans un mélange d'hydrogène et d'oxygène comprenant, en volumes, 2/3 de l'un pour 1/3 de l'autre. Célérité du son dans l'air à 15° : 340 m/s.

Rép. : 528 m/s

5. La célérité du son à 0° C, dans de l'air contenant de l'hydrogène, est égale à $331\sqrt{2}$ m/s. Calculer la densité du mélange gazeux et sa composition en volumes.

Célérité du son dans l'air pur à 0° C : 331 m/s.

LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES LES INTERFÉRENCES ET LES BATTEMENTS

A. LA COMPOSITION DE DEUX VIBRATIONS SINUSOÏDALES DE MÊME PÉRIODE ET DE MÊME DIRECTION LA RÈGLE DE FRESNEL

1. Le principe de la superposition des petits mouvements.

Considérons un milieu élastique. Supposons qu'une certaine cause — par exemple la propagation d'un ébranlement dans le milieu — impose à une particule du milieu un *petit* déplacement

$\overrightarrow{MM_1}$ à partir de sa position d'équilibre M et qu'une autre cause, intervenant seule (c'est-à-dire en l'absence de la première cause), impose à la même particule un *petit* déplacement $\overrightarrow{MM_2}$.

Le principe de la superposition des petits mouvements consiste à admettre que *si les deux causes interviennent simultanément, le déplacement $\overrightarrow{MM'}$ imposé à la particule est égal à la somme géométrique des petits déplacements $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{MM_2}$ qu'imposeraient respectivement les deux causes en intervenant séparément :*

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} \quad (\text{fig. 1-a})$$

Si les deux petits déplacements composants ont la *même direction*, les ajouter vectoriellement revient à faire la somme *algébrique* de deux segments sur un axe orienté :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} \quad (\text{fig. 1-b})$$

On peut illustrer ce principe en cinématographique, sur un film à grande vitesse de déroule-

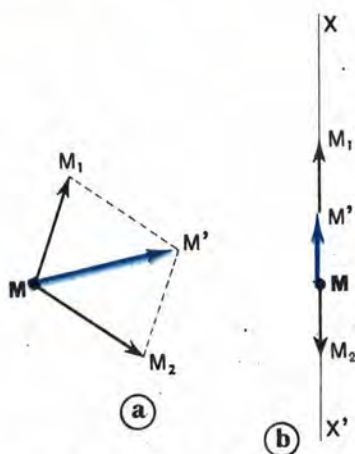


Fig. 1. — Le principe de la superposition des petits mouvements.

a) Les petits déplacements composants, $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{MM_2}$, ont des directions quelconques; le petit déplacement résultant, $\overrightarrow{MM'}$, est égal à leur somme *géométrique* :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2}$$

b) Les petits déplacements composants ont la *même direction* $X'X$. La valeur algébrique de leur résultante est alors égale à la somme :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2}$$

ment, les déformations d'une corde élastique dans la région où se superposent deux petits ébranlements de même forme qui se propagent en sens inverses le long de la corde. En projetant le film au ralenti, on vérifie que les formes successives de la corde sont celles que l'on peut prévoir en appliquant le principe de la superposition des petits mouvements (fig. 2).

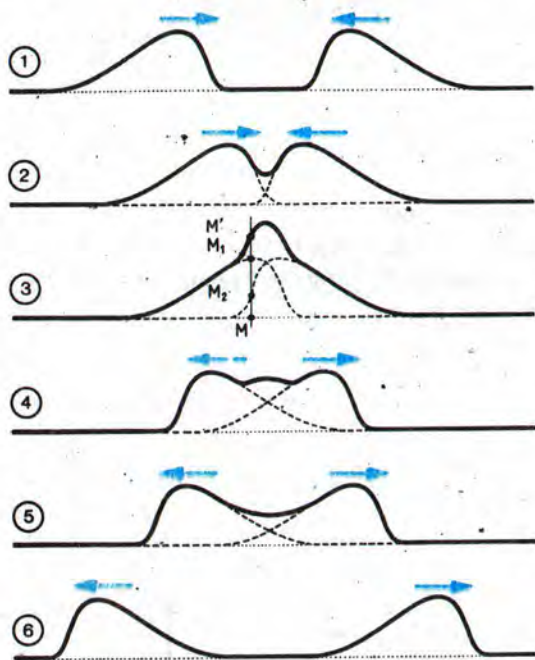


Fig. 2. — La superposition de deux ébranlements se propageant en sens contraires le long d'une corde tendue.

La forme que prend la corde à chacun des instants successifs 1, 2, 3, 4... montre que, sur la portion de corde où les deux ébranlements se superposent, l'élongation MM' d'un point quelconque de la corde est égale à la somme des élongations MM_1 et MM_2 que prendrait ce point M au passage de chacun des deux ébranlements, si cet ébranlement se propageait seul sur la corde.

Au lieu d'une corde, on peut utiliser un ressort long et souple, faiblement tendu, posé sur une table ou sur un parquet bien lisses.

Nous verrons que le principe de la superposition des petits mouvements, suggéré par des expériences de ce type, permet d'interpréter les

phénomènes d'interférences et d'ondes stationnaires; l'accord des prévisions ainsi faites avec les faits observés constitue une excellente vérification, a posteriori, de ce principe.

2. La somme de fonctions sinusoïdales de même période; la construction de Fresnel.

Supposons que la particule M du milieu élastique considéré soit sollicitée *simultanément* par deux mouvements sinusoïdaux de faible amplitude, ayant la *même direction* et la *même période* T (donc la même pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$).

Soit :

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

l'élongation qu'aurait la particule à un instant quelconque t si *un seul* des deux mouvements l'animait, et

$$y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

l'élongation qu'elle prendrait au même instant t si l'autre mouvement intervenait *seul*. Conformément au principe de la superposition des petits mouvements, le mouvement résultant a même direction que les mouvements composants et l'élongation résultante y , à l'instant t , est égale à la somme algébrique des élongations y_1 et y_2 :

$$y = y_1 + y_2$$

Nous effectuerons cette somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation en utilisant la représentation vectorielle de Fresnel (p. 155) :

Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$, de modules a_1 et a_2 , qui tournent autour de O avec la vitesse angulaire ω et font avec l'axe OX les angles φ_1 et φ_2 à l'instant initial $t = 0$ (fig. 3-a); leurs projections sur l'axe OY sont les fonctions sinusoïdales y_1 et y_2 dont nous cherchons la somme.

Soit $\overrightarrow{OA} (= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2})$ le vecteur *somme géométrique* des deux vecteurs tournants $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$; comme le parallélogramme OA_1AA_2 tourne

sans se déformer, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ tourne aussi avec la vitesse angulaire ω en gardant un module a constant. Si φ désigne l'angle qu'il fait avec OX à l'instant $t = 0$, la projection de ce vecteur tournant $\overrightarrow{OA}$ sur l'axe OY est la fonction sinusoïdale :

$$y = a \sin(\omega t + \varphi)$$

Cette fonction représente la somme algébrique cherchée puisque, d'après le théorème des projections :

$$y = y_1 + y_2$$

Ainsi, la somme de deux fonctions sinusoïdales de même période T est aussi une fonction sinusoïdale de période T .

Si l'on représente les vecteurs tournants $\vec{OA}_1$ et $\vec{OA}_2$ à l'instant initial $t = 0$ (fig. 3-a), le parallélogramme construit sur ces vecteurs donne graphiquement l'amplitude a et la phase initiale φ de l'élongation résultante y : il suffit en effet de mesurer la longueur OA et l'angle $\vec{OX}, \vec{OA}$.

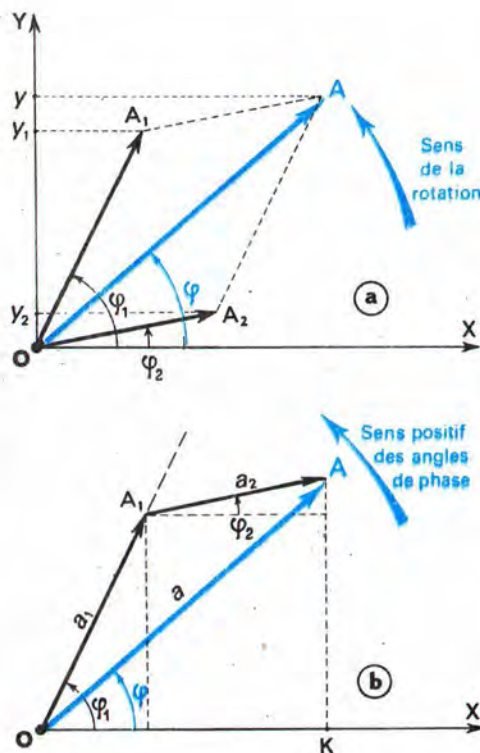


Fig. 3. — La construction de Fresnel.

a) Les vecteurs tournants représentés à l'instant initial $t = 0$.

b) La construction simplifiée donnant l'amplitude a et la phase initiale φ de la fonction somme :

$$y = y_1 + y_2.$$

On simplifie généralement la **construction de Fresnel** en se bornant à tracer le vecteur $\vec{OA}_1$ et le vecteur $\vec{A_1A}$, équipollent à $\vec{OA}_2$; il suffit alors de joindre l'origine O du premier à l'extrémité A du second pour obtenir le vecteur résultant $\vec{OA}$ (fig. 3-b).

La construction permet aussi d'obtenir l'amplitude a et la phase initiale φ par le calcul :

1° Dans le triangle OA_1A , l'angle en A_1 vaut :

$$\pi - (\varphi_1 - \varphi_2).$$

D'où :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

2° Dans le triangle rectangle OAK :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{KA}{OK}$$

Or, $KA = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2$
 $OK = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2$

D'où :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

Les cas particuliers importants

a. — Vibrations en phase.

Si les deux vibrations qui se superposent ont même phase :

$$\varphi_2 = \varphi_1 \text{ (ou } \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi),$$

les deux vecteurs $\vec{OA}_1$ et $\vec{A_1A}$ ont même support et même sens (fig. 4-a) ; par suite :

$$a = a_1 + a_2; \quad \varphi = \varphi_1.$$

L'amplitude de la vibration résultante, égale à la somme des amplitudes des vibrations composantes, est **maximale**; de plus, la vibration résultante a la même phase que les vibrations composantes.

b. — Vibrations en opposition de phase.

Si la différence de phase (ou déphasage ; p. 156) est :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \text{ (ou } \pi + 2k\pi)$$

les vecteurs $\vec{OA}_1$ et $\vec{A_1A}$ ont même support mais des sens contraires (fig. 4-b et c), de sorte que :

$$a = |a_1 - a_2|; \quad \varphi = \varphi_1 \text{ (fig. b) ou } \varphi = \varphi_2 \text{ (fig. c).}$$

L'amplitude de la vibration résultante, égale à la valeur absolue de la différence des amplitudes des vibrations composantes, est **minimale**; la

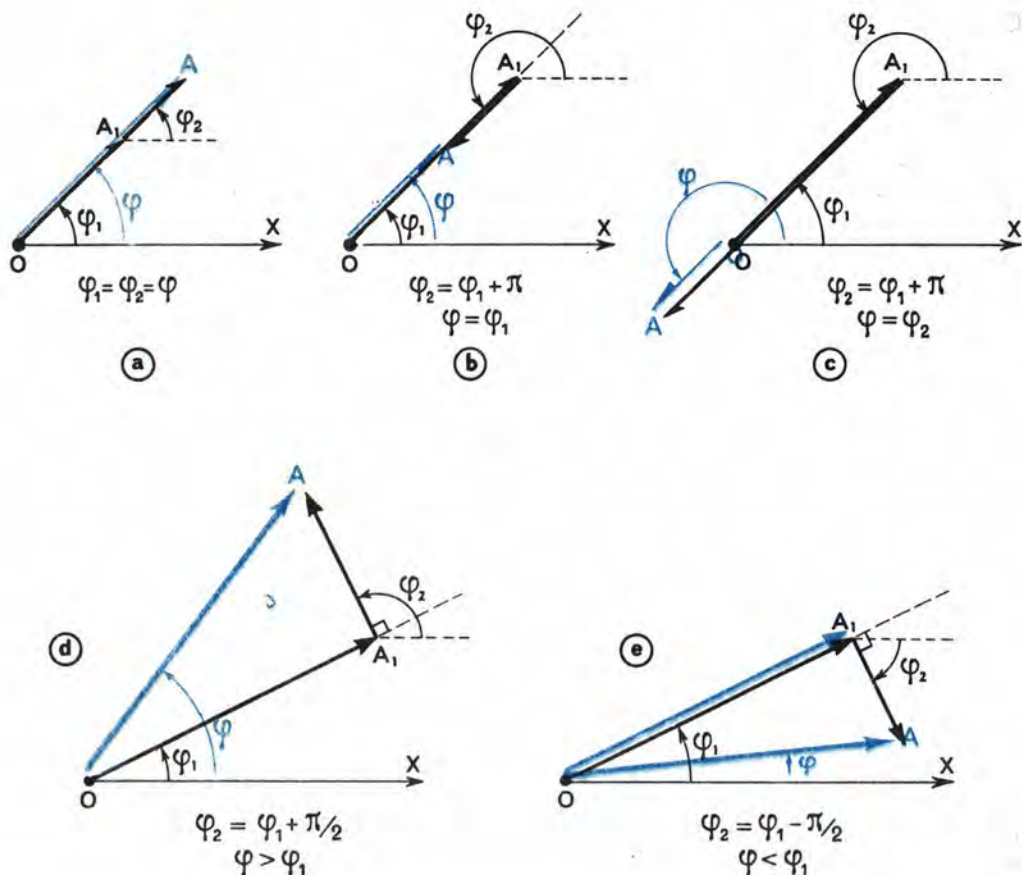


Fig. 4. — Les cas particuliers de vibrations :
En phase (a) ; en opposition de phase (b et c) ; en quadrature avance (d) et en quadrature retard (e).

vibration résultante a même phase que la vibration composante de plus grande amplitude.

c. — Vibrations en quadrature.

Si le déphasage est :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2} \left(\text{ou } \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{A_1A}$ sont rectangulaires (fig. 4 d et e) ; par suite :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

— Si $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, la vibration que représente $\vec{A_1A}$

est dite *en quadrature avance* par rapport à celle que représente $\vec{OA_1}$ et la vibration résultante $\vec{OA}$ est *en avance* sur $\vec{OA_1}$ (fig. 4 d).

— Par contre, si $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$, la vibration $\vec{A_1A}$ est dite *en quadrature retard* par rapport à $\vec{OA_1}$ et la vibration résultante $\vec{OA}$ est *en retard* sur $\vec{OA_1}$ (fig. 4-e).

Généralisation.

La construction de Fresnel se généralise à un nombre quelconque de fonctions sinusoïdales de même période :

► Fig. 5. — Soit, par exemple, à effectuer la somme algébrique des fonctions sinusoïdales :

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \pi/6) \text{ (vecteur } \overrightarrow{OA_1}) ;$$

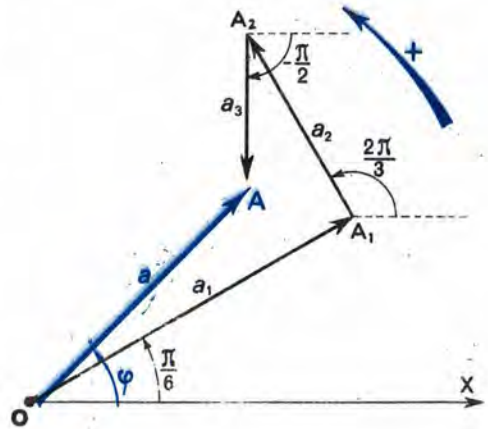
$$y_2 = a_2 \sin(\omega t + 2\pi/3) \text{ (vecteur } \overrightarrow{A_1A_2}) ;$$

$$y_3 = a_3 \sin(\omega t - \pi/2) \text{ (vecteur } \overrightarrow{A_2A}) ;$$

La somme $y = y_1 + y_2 + y_3$, représentée par le vecteur $\overrightarrow{OA}$, a pour expression :

$$y = a \sin(\omega t + \varphi)$$

Le vecteur représentatif de la somme algébrique d'un nombre quelconque de fonctions sinusoïdales de même période est la somme géométrique des vecteurs qui représentent ces fonctions (fig. 5).



B. LES INTERFÉRENCES

3. Une expérience d'interférences à la surface libre d'un liquide.

a. — Le dispositif expérimental.

Une fourche est fixée à l'une des branches d'un diapason dont la vibration peut être entretenue électriquement; les deux pointes de la fourche trempent légèrement dans l'eau d'une large cuve. Pour faciliter l'observation, on peut projeter au plafond ou sur un écran l'image agrandie de la surface libre du liquide (fig. 6).

Lorsque le diapason vibre, les points O_1 et O_2 de la surface libre du liquide en contact avec les pointes de la fourche constituent deux sources de vibrations sinusoïdales de même période et de même direction, ayant en outre, dans le cas présent, même amplitude et même phase.

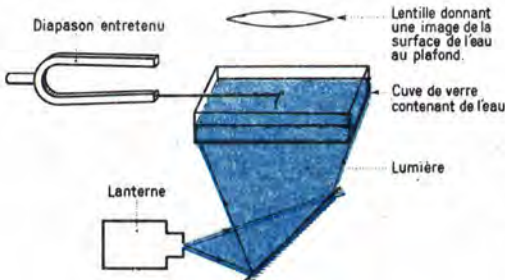


Fig. 6.

b. — Les faits observés.

Sur la surface libre ou sur sa projection on aperçoit des **rides fixes**, bien nettes dans la région voisine de la médiatrice du segment O_1O_2 . Elles ont la forme d'arcs d'hyperboles dont les foyers sont O_1 et O_2 ; on les appelle des **lignes** (ou « franges ») **d'interférences**.

Si l'on éclaire la surface libre avec un stroboscope, on observe que ces rides apparaissent dans la région où se superposent **deux ondes circulaires progressives** provenant de O_1 et O_2 .

4. L'interprétation du phénomène d'interférences.

Cette dernière observation suggère que les franges d'interférences résultent de la superposition de deux mouvements vibratoires de même période et de même direction, se propageant simultanément sur la surface libre du liquide à partir des deux sources O_1 et O_2 .

Ceci étant admis, le principe de la superposition des petits mouvements va nous permettre de déterminer le mouvement résultant d'un point quelconque M de la surface libre à partir des mouvements qu'il prendrait s'il ne lui parvenait que l'une des deux ondes circulaires transversales issues de O_1 et O_2 .

Avec un choix convenable de l'instant initial $t = 0$, l'élongation des deux sources **synchrones** O_1 et O_2 a pour expression :

$$y_{O_1} = y_{O_2} = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Nous avons vu qu'à la surface d'un liquide les ondes progressives *circulaires* s'amortissent rapidement; mais si nous ne considérons que des points de la surface libre voisins de la médiatrice du segment O_1O_2 , leurs distances aux deux sources O_1 et O_2 sont peu différentes et les ondes émises par ces sources ont, en ces points, des amplitudes *a* sensiblement égales.

A un instant quelconque t , un tel point M dont les distances à O_1 et O_2 sont d_1 et d_2 aurait pour élongation (relation (3), p. 168) :

— Si la source O_1 existait seule :

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right);$$

— Si la source O_2 existait seule :

$$y_2 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right).$$

Lorsque les deux sources vibrent simultanément, l'élongation du point M à l'instant t a pour expression :

$$y = y_1 + y_2.$$

Utilisons la **construction de Fresnel**. Les deux vibrations composantes peuvent s'écrire :

$$y_1 = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_1 \right), \text{ avec } \varphi_1 = -2\pi \frac{d_1}{\lambda}$$

$$y_2 = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_2 \right), \text{ avec } \varphi_2 = -2\pi \frac{d_2}{\lambda}$$

La construction (fig. 7) montre que la vibration résultante

$$y = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right),$$

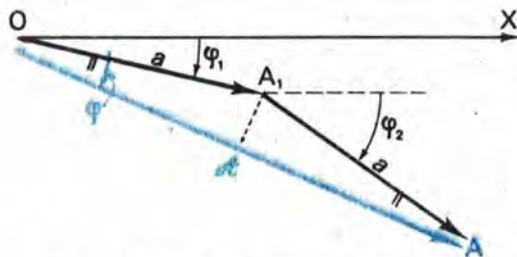


Fig. 7. — La construction de Fresnel.

Le triangle OA_1A étant ici isocèle, on a immédiatement :

$$\frac{OA}{2} = a \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

$$\text{et } \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

représentée par le vecteur OA , a pour :

— amplitude :

$$A = 2a \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 2a \cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda}$$

— phase initiale :

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = -\pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda}$$

Ainsi, en tout point où se superposent les mouvements vibratoires dus aux deux sources, la vibration résultante a même période et même direction que les vibrations des deux sources, mais son amplitude et sa phase dépendent de la position du point par rapport aux sources. En particulier, **l'amplitude A de la vibration résultante est fonction de la différence $d_2 - d_1$ des distances du point considéré aux deux sources.**

a. — Points dont le mouvement a l'amplitude maximale.

La valeur absolue $|A|$ de l'amplitude est maximale si :

$$\cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \pm 1, \text{ ou } \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = k\pi$$

$$\text{donc pour : } d_2 - d_1 = k\lambda$$

Ainsi, **le mouvement résultant est maximal aux points de la surface libre pour lesquels la différence de marche est nulle ou égale à un multiple entier de la longueur d'onde.**

Ce résultat s'explique en remarquant que si $d_2 - d_1$ vaut un nombre entier de longueurs d'onde, le mouvement provenant de O_2 arrive en M un nombre entier de périodes après le mouvement issu de O_1 ; ces deux mouvements ont donc *même phase* : les élongations y_1 et y_2 qui leur correspondent ont constamment même sens et s'ajoutent arithmétiquement, de sorte que le point M vibre avec l'amplitude maximale.

Le lieu des points où le mouvement est maximal est constitué par une famille d'*hyperboles fixes*, définies par la relation $d_2 - d_1 = k\lambda$ et admettant O_1 et O_2 pour foyers ⁽¹⁾. A la valeur particulière $k = 0$ correspond la médiatrice de O_1O_2 (fig. 8).

⁽¹⁾ Le nombre des hyperboles est évidemment limité puisque l'on doit avoir

$$\begin{aligned} |d_2 - d_1| &< O_1O_2 \\ |k| \lambda &< O_1O_2 \\ |k| &< \frac{O_1O_2}{\lambda} \end{aligned}$$

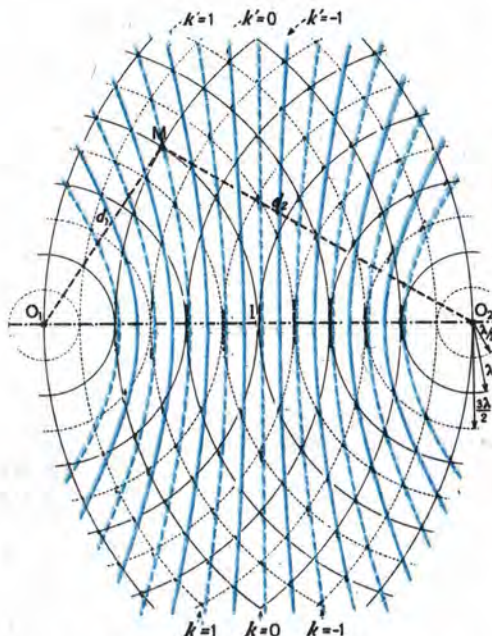


Fig. 8. — La construction des « franges » d'interférences.

Les hyperboles en tiretés sont les lieux des points de mouvement *maximal*; les hyperboles en traits pleins sont les lieux des points de mouvement *nul*. Pour les construire on trace des cercles de rayons $k\lambda$ (cercles pleins) et $(2k+1)\lambda/2$ (pointillés) : les courbes : $d_2 - d_1 = k\lambda$ passent par les intersections des cercles de même nature; les courbes $d_2 - d_1 = (2k'+1)\lambda/2$ passent par les intersections des cercles de natures différentes.

b. — Points immobiles.

L'amplitude A de la vibration résultante est nulle — et, par suite, le point M considéré *ne vibre pas* — si :

$$\cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = 0,$$

$$\text{ou} \quad \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = (2k' + 1) \frac{\pi}{2}$$

donc pour :

$$d_2 - d_1 = (2k' + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Le mouvement est nul aux points de la surface libre pour lesquels la différence de marche est égale à un multiple impair de la demi-longueur d'onde.

En effet, si $d_2 - d_1$ vaut un nombre impair de demi-longueurs d'onde, le mouvement dû à O_2 arrive en M un nombre *impair* de *demi-périodes* après le mouvement dû à O_1 ; ces deux mouvements composants sont donc *en opposition de phase* : les élongations y_1 et y_2 qui leur correspondent sont à chaque instant *opposées* et l'élongation résultante est constamment nulle.

Le lieu des points immobiles est *une autre famille d'hyperboles fixes*, définies par la relation $d_2 - d_1 = (2k' + 1)\lambda/2$ et admettant les *mêmes foyers* O_1 et O_2 que les hyperboles de mouvement maximal entre lesquelles elles s'intercalent (fig. 8).

Remarque.

Nous avons vu qu'en tout point M de la surface libre où s'observent des interférences, la vibration résultante a pour expression :

$$y = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right); \text{ avec } \varphi = -\pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda}$$

Tous les points pour lesquels la valeur de φ est la même ou diffère le $2k\pi$ vibrent *en phase* (à condition, toutefois, qu'ils aient des amplitudes A de même signe).

Le lieu de ces points de même phase est donc déterminé par la condition :

$$\pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda} = \text{Constante} + 2k\pi$$

$$\text{ou :} \quad d_1 + d_2 = \text{Constante} + 2k\lambda$$

Cette relation définit une *famille d'ellipses* dont les foyers sont les deux sources O_1 et O_2 (fig. 9).

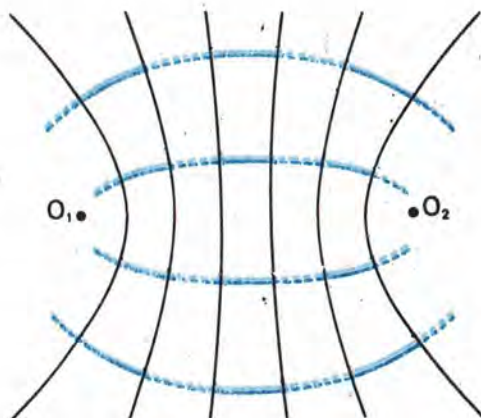


Fig. 9. — Les ellipses d'égale phase.

Les points situés sur les parties pleines des ellipses vibrent en phase. Ceux qui sont sur les pointillés vibrent également en phase, mais leur mouvement est en opposition de phase avec celui des précédents à cause du changement de signe de l'amplitude à la traversée d'une ligne de repos.

5. L'importance et la généralité des phénomènes d'interférences.

On observe des interférences toutes les fois que se superposent deux ondes progressives de même nature, de même période et de même direction (ou de directions voisines). En interférant, les deux ondes *annulent* mutuellement leurs effets en certains points et, au contraire, les *renforcent* en d'autres points.

Le phénomène est très général; il s'observe dans le domaine des ondes *mécaniques* (ondes transversales à la surface d'un liquide ou le long d'une corde, ondes sonores dans l'air, ...) comme dans les domaines des ondes *lumineuses* et des ondes *électriques*. Son importance vient du fait que la mise en évidence de franges d'interférences *prouve* l'existence d'ondes progressives et peut conduire à la *mesure de leurs longueurs d'onde*.

C. LES BATTEMENTS

6. La composition de deux vibrations sinusoïdales de même direction et de périodes légèrement différentes.

Supposons que, dans un milieu élastique, se propagent deux mouvements vibratoires tels qu'une particule quelconque du milieu soit, au même instant t , sollicitée par deux vibrations composantes de *même direction*, ayant pour équations :

$$y_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{T_1}$$

$$y_2 = a \sin 2\pi \frac{t}{T_2}$$

Les amplitudes a de ces vibrations composantes sont supposées égales pour simplifier; leurs périodes T_1 et T_2 sont inégales mais *voisines*.

D'après le principe de la superposition des petits mouvements, l'élongation résultante de la particule considérée est à chaque instant égale à la somme algébrique :

$$y = y_1 + y_2.$$

Contrairement à ce qui a été vu dans le cas des interférences, les vibrations composantes n'ayant pas ici la même période, la *vibration résultante n'est pas sinusoïdale*. Nous obtiendrons point par point la *courbe représentant les variations de l'élongation résultante en fonction du temps* en superposant les sinusoïdes représentant les variations de y_1 et y_2 et en faisant, pour chaque abscisse commune t , la somme algébrique des deux ordonnées (fig. 10).

La courbe obtenue coupe périodiquement l'axe des temps, avec une période comprise entre T_1 et T_2 . D'une période à la suivante, l'amplitude de la vibration résultante varie progressivement et présente une suite périodique de minimums et de maximums. On appelle **battements** cette alternance d'« étouffements » et de renforcements de la vibration résultante.

La *période des battements* est l'intervalle de temps constant θ qui sépare deux renforcements consécutifs. La représentation graphique (fig. 10) montre que pendant le temps θ l'une des vibrations composantes effectue un cycle de plus que l'autre; par suite :

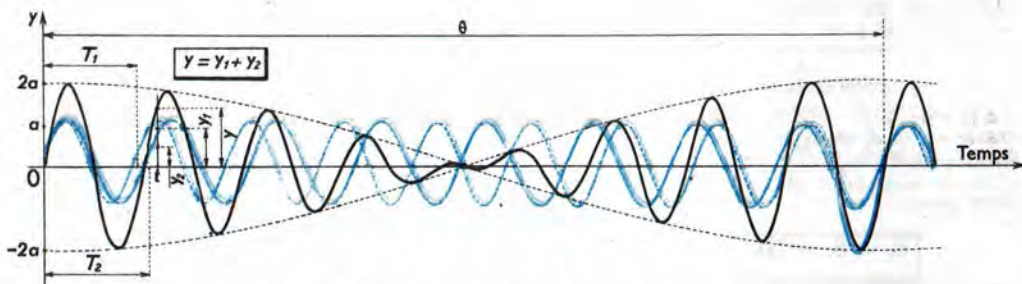
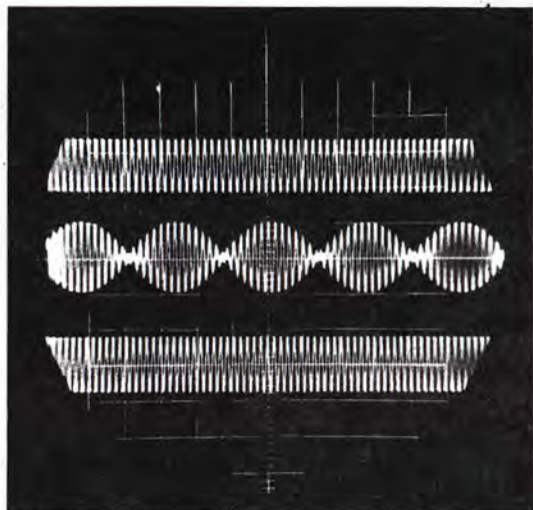


Fig. 10. — Le graphe caractéristique des battements.

Les deux sinusoïdes de couleur ont même amplitude a mais leurs périodes T_1 et T_2 sont un peu différentes ($8 T_2 = 9 T_1$). On obtient la courbe résultante (en trait noir) en faisant, pour chaque point de l'axe des temps, la somme algébrique des ordonnées des sinusoïdes composantes.



▲ L'enregistrement, à l'oscilloscope électronique, des graphes des deux vibrations composantes (en haut et en bas) et de la vibration résultante (au milieu).

$$0 = nT_2 = (n + 1) T_1$$

Nous retrouvons une relation déjà rencontrée dans l'étude des coïncidences de deux pendules de périodes voisines (p. 104) et dans celle du ralenti stroboscopique (p. 161). On en tire immédiatement :

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

En introduisant les fréquences $f_1 = \frac{1}{T_1}$ et $f_2 = \frac{1}{T_2}$ des deux vibrations composantes et la fréquence $\nu = \frac{1}{0}$ des battements, il vient :

$$\nu = f_1 - f_2$$

La fréquence des battements est égale à la différence des fréquences des vibrations composantes.

Remarque.

Dans le cas simple étudié, les minimums de l'amplitude résultante sont *nuls* parce que nous avons supposé que les amplitudes des vibrations composantes étaient *égales*.

Quand elles sont différentes, le phénomène de battements est encore observé, mais les minimums correspondent à la *différence* $a_1 - a_2$ de ces amplitudes; il n'y a plus d'étouffements mais seulement alternance de renforcements et d'affaiblissements périodiques.

7. La généralité du phénomène de battements.

Comme les interférences, les battements interviennent dans tous les domaines de la Physique vibratoire. En particulier, on obtient des *battements acoustiques* en faisant vibrer deux sources sonores (diapasons, cordes, tuyaux) de fréquences voisines. Le résultat est un son unique, qui se renforce et s'affaiblit périodiquement et l'on peut vérifier que la fréquence des battements est égale à la différence des fréquences des deux sources.

Si l'on procède, en outre, à l'analyse du phénomène au moyen de l'*oscilloscope électronique* on peut obtenir sur l'écran le graphe caractéristique des battements, pourvu toutefois que les vibrations composantes soient sensiblement sinusoïdales (fig. 11 et photo ci-contre).



Fig. 11. — L'aspect d'une *courbe de battements* sur l'écran d'un oscilloscope électronique.

EXERCICES

1. Trouver, au moyen de la construction de Fresnel, la fonction y , somme algébrique des fonctions sinusoïdales de même période :

$$y_1 = a \sin \omega t; \quad y_2 = a \sin (\omega t + \pi/2); \quad (a = 5 \text{ cm})$$

2. Même question en ce qui concerne la somme algébrique des fonctions :

$$y_1 = a_1 \sin (\omega t + \pi/4); \quad y_2 = a_2 \sin (\omega t - \pi/4);$$

$$(a_1 = 4 \text{ cm}; \quad a_2 = 3 \text{ cm}).$$

Rép. : $y = A \sin (\omega t + \varphi)$, avec $A = 5 \text{ cm}$ et $\varphi \approx 0,14 \text{ radian}$ (ou 8°).

3. A la surface d'un liquide, deux sources O_1, O_2 sont animées de mouvements sinusoïdaux transversaux synchrones de fréquence $f \approx 116 \text{ Hz}$. On considère un point M sur une ligne de repos, tel que $d_2 - d_1 = 1,07 \text{ cm}$, puis un point M' , sur la douzième ligne de repos comptée à partir de celle qui passe par M et du même côté de la médiatrice de O_1O_2 .

Sachant que pour M' on a : $d_2 - d_1 = 2,03 \text{ cm}$, calculer la longueur d'onde et la célérité des ondes à la surface du liquide.

4. Dans l'expérience de la figure 6, le mouvement des sources est représenté par :

$$y \text{ (mm)} = 0,5 \sin 128 \pi t.$$

Sachant que la célérité des ondes à la surface de l'eau est, dans ce cas, $V = 32 \text{ cm/s}$, représenter la coupe de la surface libre le long de O_1O_2 , dans la région voisine du milieu de O_1O_2 et à un instant où les elongations sont maximales. (Échelle 10, horizontalement et verticalement).

Rép. : Sinusoïde de période dans l'espace égale à 5 cm (représentant $\lambda = 5 \text{ mm}$) et d'amplitude 1 cm (représentant $2a = 1 \text{ mm}$); les premiers points de repos sont à $1,25 \text{ cm}$ du milieu de O_1O_2 .

5. Dans une expérience d'interférences à la surface d'un liquide (analogue à celle que représente la fig. 6), les vibrations du diapason sont sinusoïdales, de fréquence $f = 60 \text{ Hz}$ et d'amplitude $a = 2 \text{ mm}$.

1° Exprimer l'elongation résultante en fonction du temps, en un point M dont les distances à O_1 et O_2 sont $d_1 = 2,45 \text{ cm}$ et $d_2 = 3,7 \text{ cm}$; préciser l'amplitude et la phase. (On prendra pour célérité des rides transversales à la surface du liquide : $V = 36 \text{ cm/s}$.)

2° Déterminer et représenter sur un schéma les lieux des points M où l'amplitude est, soit maximale, soit nulle.

3° Lieux des points M dont les vibrations sont en phase avec les sources O_1 et O_2 ?

(D'après un probl. de bacc.).

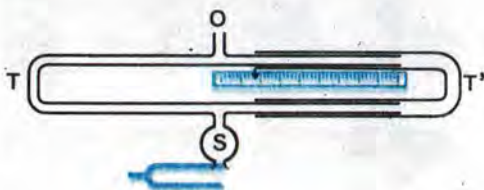


Fig. 12. — Le schéma d'un trombone de Kœnig.

6. Le trombone de Kœnig. — Une oreille placée près de l'ouverture O d'un trombone de Kœnig (fig. 12) n'entend plus le son produit en S si la différence de marche, suivant le trajet STO (de longueur fixe) et suivant le trajet $ST'O$ (dont on peut faire varier la longueur à l'aide de la coulisse T') est égale à un multiple impair de la demi-longueur d'onde.

1° L'appareil contenant de l'air sec à 0° C et étant réglé pour que l'oreille n'entende rien, on tire sur la coulisse. Le son est à nouveau nul lorsque la coulisse a été déplacée de 33 cm . Sachant que la vitesse du son dans l'air sec à 0° C est de 330 m/s , quelle est la fréquence du diapason ?

2° On remplace l'air par de l'hydrogène à 0° . Pour obtenir deux silences consécutifs en O , il faut tirer la coulisse de $125,6 \text{ cm}$. Quelle est la densité de l'hydrogène par rapport à l'air ?

3° Le trombone étant à nouveau plein d'air sec, on l'entoure d'une enceinte portée à la température θ . Pour obtenir deux intensités nulles consécutives en O , il faut, cette fois, tirer la coulisse de $36,3 \text{ cm}$. Déterminer la température θ .

Rép. : 1° $f = 500 \text{ Hz}$; 2° $d \approx 0,069$; 3° $\theta \approx 57^\circ \text{ C}$.

7. Construire point par point la courbe représentant les variations (en fonction du temps) de l'elongation d'un point matériel sollicité simultanément par deux mouvements vibratoires de même direction et d'équations :

$$y_1 = a \sin 80\pi t; \quad y_2 = a \sin 72\pi t; \quad (a = 1 \text{ cm}).$$

(Sur l'axe des temps, une longueur de 36 cm correspond à 1 s).

Trouver : 1° la fréquence de la vibration résultante; 2° la fréquence des battements.

LES ONDES STATIONNAIRES

Le phénomène d'ondes stationnaires résulte de l'interférence d'ondes progressives de **même période** se propageant en sens contraires suivant la **même direction**.

Dans les expériences que nous allons décrire, les ondes stationnaires sont obtenues par la superposition d'une onde *incidente* provenant d'une source vibratoire et des ondes *réfléchies* qui lui correspondent. En effet, le milieu de propagation étant *limité*, lorsque l'onde émise par la source atteint la limite du milieu, elle rebrousse chemin; on dit qu'elle *se réfléchit*.

1. L'observation d'ondes stationnaires transversales le long d'une corde. L'expérience de Melde.

a. — Le dispositif expérimental.

Un diapason (ou un vibreur), dont la vibration est entretenue électriquement, attaque l'extrémité O d'un fil fin et souple qui traverse en B une plaque métallique percée d'un petit trou (fig. 1). La *longueur utile*, OB, de la corde peut être réglée par déplacement du curseur C le long d'une règle graduée. On peut faire varier la *tension du fil*, égale au poids du plateau P et de sa charge, en ajoutant ou retranchant des masses marquées dans le plateau.

b. — Les faits observés.

1° La tension du fil ayant une certaine valeur P_1 , un réglage convenable de la longueur OB permet d'obtenir la vibration de la corde en un seul fuseau, très renflé en son milieu. Avec des valeurs plus faibles, $P_2, P_3, P_4, \dots$ de la tension, déterminées par tâtonnements, on voit se former 2, puis 3, puis 4, ... fuseaux.

2° Les points *immobiles* qui constituent les extrémités des fuseaux sont appelés **nœuds**; les

points qui vibrent avec l'*amplitude maximale* sont appelés **ventres**. Nœuds et ventres alternent régulièrement; ils ont des **positions fixes** et sont **équidistants**. Lorsque, par un réglage correct,

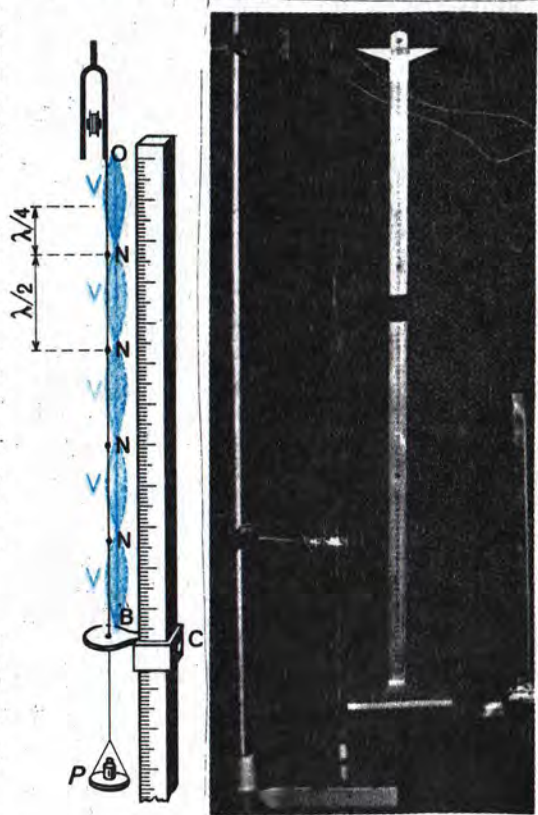
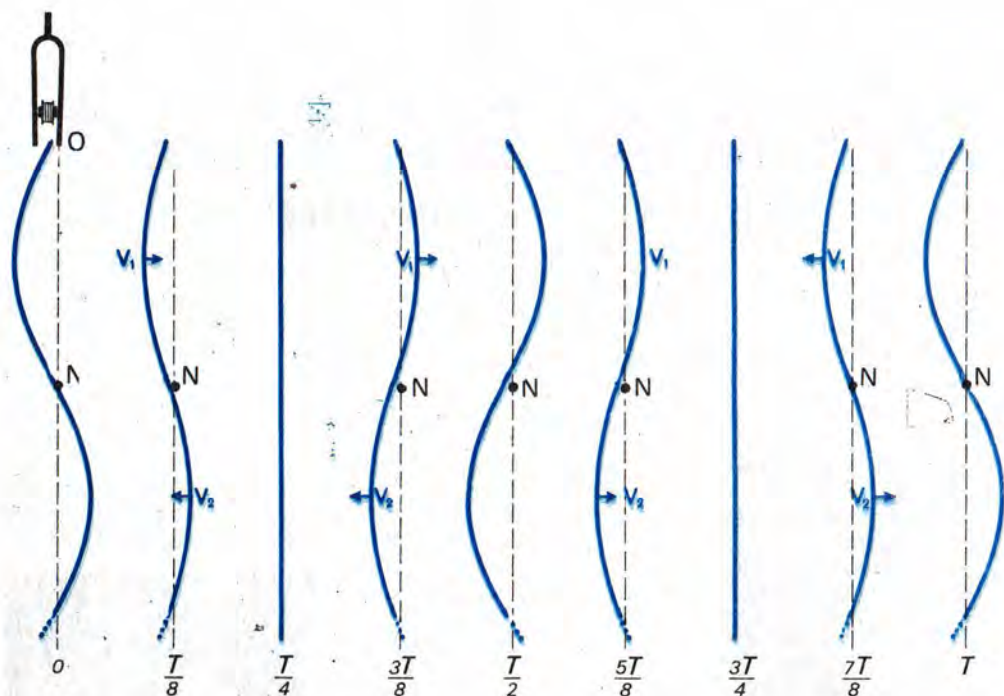


Fig. 1. — L'expérience de Melde.



Fi. 2. — Les formes successives de la corde à des instants espacés d'un huitième de période. L'instant $t = 0$ correspond à la déformation maximale. La corde dessine une sinusoïde qui change continuellement de forme en demeurant stationnaire comme si, aux nœuds N, elle était nouée à un axe imaginaire ON. Elle reprend la même forme à des instants espacés d'une période T de la vibration.

on a obtenu le maximum de renflement aux ventres, la source O de la vibration se confond pratiquement avec un nœud; d'autre part, l'extrémité fixe B est nécessairement un nœud.

3° Le ralenti stroboscopique montre que la corde en vibration se déforme continuellement, dessinant une succession de sinusoïdes plus ou moins renflées qui se reproduisent périodiquement avec la période T de la source vibratoire (fig. 2). On peut voir que, corrélativement :

A l'exception des nœuds, **tous les points de la corde vibrent avec la même fréquence**, égale à la fréquence de la source.

Entre deux nœuds consécutifs, les points ont constamment des mouvements parallèles de même sens; **ils vibrent en phase**.

Deux points situés de part et d'autre d'un nœud ont constamment des mouvements de sens contraires; **ils vibrent en opposition de phase**.

Il en résulte qu'une petite portion de corde dont le centre est un ventre (V_1 ou V_2 , fig. 2)

ne se déforme pratiquement pas au cours de la vibration alors que la déformation est maximale pour l'élément de corde dont le centre est un nœud N; on dit que **les nœuds d'élongation sont des ventres de déformation et vice versa**.

4° Pour une valeur donnée de la tension du fil, le maximum de l'amplitude aux ventres est obtenu pour une valeur déterminée l de la longueur utile OB. Si l'on fait varier un peu cette longueur OB à partir de la valeur l , on observe une importante diminution de l'amplitude; on retrouve là le caractère fondamental d'une **résonance aiguë**.

En étudiant l'application aux cordes vibrantes du phénomène de résonance (chap. suivant), nous verrons en effet qu'un fil tendu, de longueur et de tension données, constitue en fait un **résonateur** dont la vibration n'est stable que si la fréquence de celle-ci prend certaines valeurs, dites **fréquences propres** du résonateur (f , $2f$, $3f$, ... selon qu'il vibre en 1, 2, 3, ... fuseaux).



Fig. 3.

Lorsqu'on règle la longueur OB (ou la tension P) du fil pour obtenir le maximum d'amplitude aux ventres, on fait varier l'une des fréquences propres du résonateur jusqu'à la rendre égale à la fréquence de l'excitateur, constitué ici par le diapason. On dit alors qu'il y a *résonance*.

Remarque.

On peut aussi réaliser des ondes stationnaires le long d'une corde dont l'extrémité B est libre (fig. 3); il est commode d'utiliser, dans ce cas, un fil de plomb très fin.

Le réglage s'effectue en ajustant la longueur du fil. Quand on a obtenu des ondes stationnaires stables, on peut constater qu'il y a un ventre à l'extrémité libre.

2. L'observation d'ondes stationnaires longitudinales.

a. — Le long d'un ressort.

La figure 4 représente le dispositif expérimental. Le vibreur entretenu impose à l'une des spires extrêmes un mouvement sinusoïdal, longitudinal, dont la fréquence est celle du vibreur. En réglant

la tension du ressort, on modifie sa fréquence propre jusqu'à la rendre égale à celle de l'excitation et l'on obtient ainsi, par résonance, un système stable d'ondes stationnaires longitudinales.

Comme précédemment, le phénomène est caractérisé par l'existence :

- de **nœuds** N, où les spires sont *immobiles*;
- de **ventres** V, où les spires sont animées d'un mouvement vibratoire d'*amplitude maximale*.

Nœuds et ventres alternent régulièrement et sont *équidistants*. Il y a un nœud à l'extrémité fixe, B, du ressort; l'autre extrémité peut aussi être considérée comme un nœud, le mouvement que lui impose le vibreur étant faible par rapport à celui des spires ventrales.

Comme dans le cas de l'expérience de Melde, le *ralenti stroboscopique* permet de constater que :

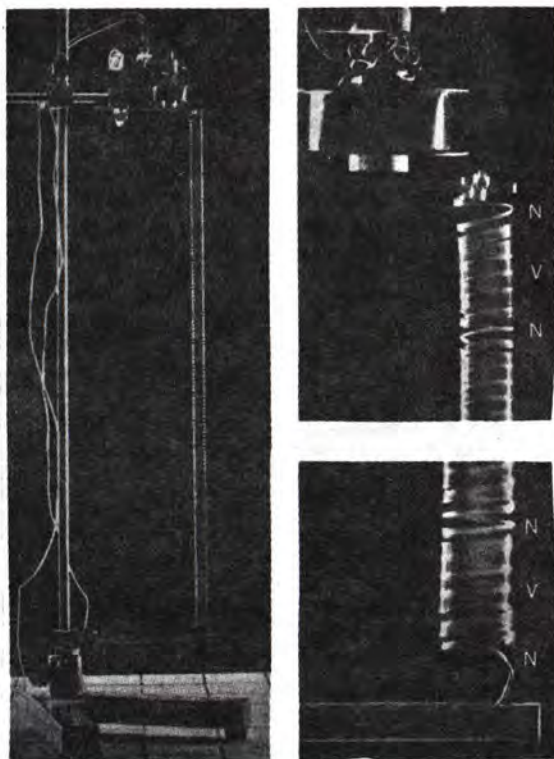


Fig. 4. — L'observation d'ondes stationnaires longitudinales le long d'un ressort.

Seules, les spires nodales N sont nettes; les autres paraissent floues parce qu'elles vibrent, les plus floues étant les spires ventrales V, équidistantes des spires nodales.

— A l'exception des spires nodales, toutes les spires vibrent longitudinalement avec la fréquence du vibreur ;

— Entre deux nœuds consécutifs, les spires se déplacent constamment dans le même sens : elles vibrent *en phase* ;

— Deux spires situées de part et d'autre d'un nœud se déplacent constamment en sens contraires : elles vibrent *en opposition de phase*.

Il en résulte qu'au voisinage d'un ventre, l'écartement des spires restant sensiblement le même, la tension du ressort ne varie pratiquement pas, alors qu'au voisinage d'un nœud le rapprochement ou l'éloignement des spires produit une *alternance de compressions et de dilations* (fig. 5) ; on dit que **les nœuds de déplacement sont des ventres de tension et vice versa**.

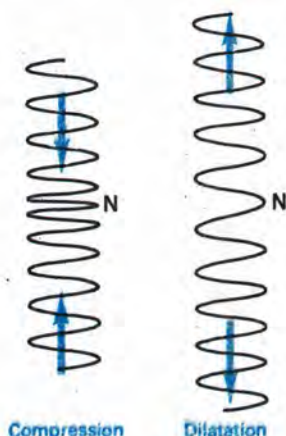


Fig. 5.



Fig. 6. — Si le ressort a une extrémité *libre*, les ondes stationnaires y présentent un ventre de déplacement.

On peut aussi obtenir des ondes stationnaires longitudinales le long d'un ressort dont l'extrémité inférieure est *libre* (fig. 6). On obtient la résonance en agissant soit sur la fréquence propre du ressort par variation de sa longueur, soit sur la fréquence de l'excitation en déplaçant une surcharge sur les branches du diapason exciteur.

b. — Dans la colonne gazeuse d'un tuyau.

On peut mettre en évidence expérimentalement la formation d'ondes stationnaires dans une colonne de gaz au moyen du **tube de Kundt** (fig. 7).

Dans une colonne gazeuse, **les nœuds de déplacement sont des ventres de pression** et réciproquement.

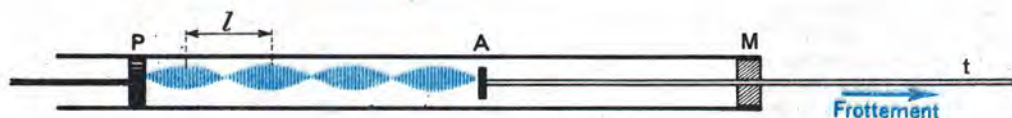


Fig. 7. — Le tube de Kundt.

Dans un long tube de verre saupoudré intérieurement de poudre très fine (lycopode ou liège râpé), une colonne gazeuse AP est mise en vibration par un disque A, soudé à une tige *t* serrée en son milieu M et que l'on fait vibrer *longitudinalement* en la frottant parallèlement à son axe avec du drap enduit de colophane. L'onde progressive longitudinale émise par A se réfléchit sur un piston P dont on règle la position de façon que dans la colonne gazeuse AP s'établisse par résonance un système d'*ondes stationnaires*. La poudre sautille fortement puis, quand la vibration cesse, retombe en dessinant une *figure périodique dont la période spatiale est l'équidistance l des nœuds (ou des ventres)*. L'aspect de cette figure varie d'ailleurs avec l'abondance, la densité, la grosseur des grains de poudre et aussi l'amplitude de la vibration ; s'il y a peu de poudre, on remarque surtout des stries fines et rapprochées dont la longueur est maximale aux ventres de déplacement.

3. L'interprétation du phénomène d'ondes stationnaires.

Pour simplifier, nous admettons que les ondes stationnaires observées dans les expériences décrites ci-dessus résultent de la superposition de deux ondes progressives seulement, l'onde incidente issue de la source O et l'onde réfléchie due à une seule réflexion de l'onde incidente en B (fig. 8). L'interprétation est alors analogue à celle que nous avons donnée du phénomène d'interférences (p. 181), avec cette particularité que les deux ondes qui interfèrent se propagent ici suivant la même droite mais en sens contraires.

a. — La recherche de la vibration résultante en un point quelconque M, à la distance x de l'extrémité B où se produit la réflexion.

Supposons fixe l'extrémité B (cas de l'expérience de Melde, du ressort fixé à son extrémité inférieure et du tube de Kundt).

Si le point B pouvait vibrer, l'onde incidente, intervenant seule, lui imposerait un mouvement vibratoire de même période T que la vibration excitatrice et dont l'équation peut s'écrire, avec un choix convenable de l'instant initial :

$$y_{B(1)} = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Pour tenir compte du fait que le point B reste immobile, on doit admettre que ce mouvement se compose avec un autre mouvement vibratoire, imposé en B par l'onde réfléchie, et dont l'équation :

$$y_{B(2)} = -a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

est telle que la somme algébrique $y_{B(1)} + y_{B(2)}$ des deux élongations simultanées soit nulle à chaque instant.

Considérons maintenant un point quelconque M, à la distance x de B (fig. 8).

L'onde incidente anime le point M avant d'animer le point B, de sorte que la vibration de M présente, dans le temps, une avance de

$\theta = \frac{x}{V}$ sur celle de B. A l'instant t, l'élongation imposée au point M par l'onde incidente seule est l'élongation qu'imposera cette onde au point B à l'instant postérieur $t + \frac{x}{V}$; elle a donc pour expression :

$$y_1 = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V} \right)$$

Au contraire, la vibration du point M due à la seule onde réfléchie présente un retard de

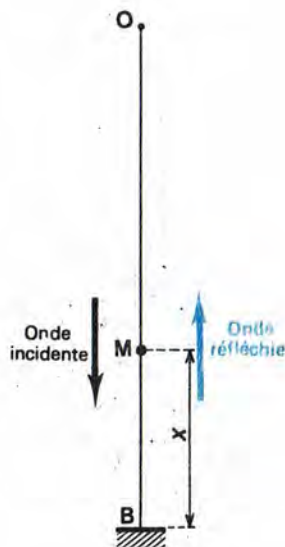


Fig. 8.

$\theta = \frac{x}{V}$ sur celle de B; par suite, l'élongation imposée au point M par l'onde réfléchie est l'élongation qu'a imposée cette onde au point B à l'instant antérieur $t - \frac{x}{V}$; elle a pour expression :

$$y_2 = -a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right)$$

En faisant apparaître la longueur d'onde $\lambda = VT$, les élongations composantes, y_1 et y_2 , peuvent s'écrire :

$$(1) \quad y_1 = a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1 \right); \text{ avec } \varphi_1 = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$y_2 = -a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) =$$

$$a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi \right) \quad (1)$$

$$\text{ou : } (2) \quad y_2 = a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_2 \right); \text{ avec :}$$

$$\varphi_2 = -\frac{2\pi x}{\lambda} + \pi$$

D'après le principe de la superposition des petits mouvements, l'élongation résultante du

(1) Puisque : $-\sin \alpha = \sin (\alpha + \pi)$.

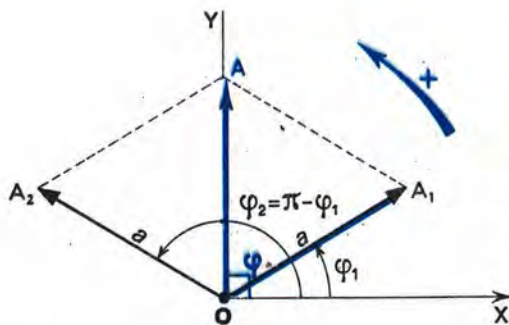


Fig. 9.

point M, à l'instant t , est égale à la somme algébrique :

$$y = y_1 + y_2.$$

Utilisons la **construction de Fresnel** (fig. 9) : les vecteurs $\vec{OA}_1$ et $\vec{OA}_2$ qui représentent respectivement les vibrations composantes (1) et (2) font avec l'axe OX les angles

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{x}{\lambda} \text{ et } \varphi_2 = \pi - 2\pi \frac{x}{\lambda};$$

ils sont donc **symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe OY**.

Par suite, le vecteur $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2$, qui représente la vibration résultante y , est porté par l'axe OY et l'on a :

$$\vec{OA} = 2a \sin \varphi_1 = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}; \quad \varphi = +\frac{\pi}{2}.$$

La vibration résultante du point M a donc pour expression :

$$(3) \quad y = \underbrace{2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}}_{\text{amplitude}} \cdot \underbrace{\sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{2} \right)}_{\text{phase}}$$

Ainsi, tout point M de OB est animé d'un mouvement vibratoire sinusoïdal dont la période T est celle de la source excitatrice.

b. — L'amplitude de la vibration résultante; la position des nœuds et des ventres d'élongation.

L'amplitude $A = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$ n'est fonction que de la distance x du point considéré à l'extrémité B.

1° L'amplitude est nulle pour :

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = k\pi, \text{ c'est-à-dire pour : } x = k \frac{\lambda}{2}$$

k prenant les valeurs successives : 0, 1, 2, 3,...

Il y a donc un nœud d'élongation sur l'extrémité fixe B ($k = 0$ entraîne $x = 0$) **et la distance de deux nœuds consécutifs est égale à une demi-longueur d'onde** (fig. 1 et 4).

2° L'amplitude est maximale pour :

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}; \text{ c'est-à-dire pour :}$$

$$x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

k prenant les valeurs successives : 0, 1, 2, 3,...

Les ventres d'élongation sont donc, comme les nœuds, équidistants d'une demi-longueur d'onde et sont situés au milieu des intervalles séparant les nœuds (fig. 1, 4 et 7).

Application.

La mesure de la distance l séparant deux nœuds ou deux ventres consécutifs permet de déterminer la longueur d'onde ($\lambda = 2l$) et d'en déduire la **célérité** V des ondes incidente et réfléchies connaissant la fréquence f de la source excitatrice, puisque :

$$V = f\lambda.$$

C'est ainsi par exemple que l'on peut mesurer la célérité du son dans un gaz enfermé dans le tube de Kundt (exercice n° 5) ou dans un corps solide (exercice n° 6).

c. — La phase de la vibration résultante.

La **phase** de la vibration résultante (équation (3)), est indépendante de x ; par suite, **tous les points qui ont des amplitudes de même signe vibrent en phase**.

L'amplitude A de la vibration résultante — étant ici une fonction sinusoïdale de l'abscisse x dont la période est λ — change de signe chaque fois que x passe par une valeur $k\lambda/2$ qui correspond à un nœud. Comme ce changement de signe de l'amplitude équivaut, pour l'élongation résultante y , à une brusque variation de phase de valeur π radian (*), il en résulte que, **de part et d'autre d'un nœud, les points vibrent en opposition de phase** (fig. 2 et 5).

Remarque :

Dans le cas d'une extrémité B **libre**, le calcul se conduit de la même manière, mais en tenant compte de ce que l'élongation y_B imposée à B

(*) Puisque : $-A \sin \alpha = A \sin (\alpha + \pi)$.

par l'onde réfléchiée a alors le même signe que l'élongation $y_{B(1)}$ imposée par l'onde incidente.

On trouve que l'expression de l'amplitude de la vibration résultante est alors :

$$A = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

On en déduit que les ondes stationnaires présentent un ventre de déplacement à l'extrémité libre, conformément à ce que montrent les expériences représentées par les figures 3 et 6.

4. Les insuffisances de la théorie simplifiée des ondes stationnaires.

a. — L'interprétation précédente ne tient pas compte de l'existence de réflexions multiples; en effet, l'onde qui s'est réfléchiée une première fois en B se réfléchit ensuite sur la source O, puis de nouveau en B et ainsi de suite jusqu'à ce que l'amortissement l'ait pratiquement annulée.

Du fait de cette multiplicité des ondes qui interfèrent, la vibration résultante observée a, aux ventres, une amplitude très supérieure à deux fois l'amplitude a de la source excitatrice.

D'autre part, la théorie élémentaire n'explique pas pourquoi la corde de Melde, le ressort, la colonne gazeuse du tube de Kundt se comportent comme des résonateurs multiples le long desquels on n'observe des ondes stationnaires stables que si l'une de leurs fréquences propres est égale à la fréquence de la source excitatrice.

b. — Néanmoins, l'équation (3) qui résume cette théorie simplifiée

— 1° rend compte de la différence de nature entre une onde progressive et un système d'ondes stationnaires.

En effet, l'équation de l'onde progressive :

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

(où la variable temporelle t et la variable spatiale x figurent toutes les deux dans l'expression de la phase), est l'équation d'une sinusoïde mouvante qui progresse sans se déformer avec la célérité V caractéristique du milieu de propagation, alors que l'équation des ondes stationnaires :

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right)$$

(où les deux variables figurent, l'une dans l'expression de la phase, l'autre dans celle de l'amplitude), est à chaque instant t l'équation d'une sinusoïde stationnaire, qui change continuellement de forme au cours du temps en demeurant sur place.

— 2° elle permet en outre de prévoir correctement la position des nœuds et des ventres, de relier cette position à la longueur d'onde et d'expliquer le brusque changement de phase à la traversée d'un nœud.

5. La généralité du phénomène d'ondes stationnaires.

Le phénomène des ondes stationnaires, comme celui des interférences, peut être observé avec des ondes de toute nature (ondes mécaniques, lumineuses, électriques, hertziennes,...) lorsqu'elles se réfléchissent dans leur propre direction de propagation.

L'observation de nœuds et de ventres prouve que des ondes progressives interfèrent; d'autre part, la mesure de la distance séparant les nœuds ou les ventres donne la valeur de la longueur d'onde $\lambda = \frac{V}{f}$ et, par suite, permet de déterminer la célérité V des ondes progressives connaissant leur fréquence f ou réciproquement.

EXERCICES

1. L'expérience de Melde. — Le vibreur excitateur est entretenu et sa fréquence est $f = 100$ Hz; on met un certain poids tenseur P et on cherche la longueur l qui correspond à des ondes stationnaires stables.

1° Sachant que pour $P = 100$ gf la célérité V , caractéristique de la corde, est 40 m/s, calculer les valeurs de l correspondant à ce poids tenseur et à la formation de 2, puis 4 fuseaux stables. (On rappelle que V est proportionnelle à $\sqrt{P}$.)

2° La seconde valeur de l étant maintenue, on fait varier P : trouver la relation entre P et le nombre k de fuseaux stables obtenus; déterminer P pour $k = 3$ et $k = 2$.

Rép. : 1° 40 cm et 80 cm; 2° $P = \frac{1600}{k^2}$; 178 gf et 400 gf.

2. Un fil de fer est tendu horizontalement, sur une longueur $AB = 1$ m, entre une poulie A et l'une des branches B d'un diapason entretenu disposé de

telle sorte que le déplacement de B soit transversal par rapport au fil. Au-delà de la poulie, le fil supporte un plateau chargé d'un poids P . La masse de 10 m du fil considéré est égale à 2 g. La fréquence f des oscillations du diapason est égale à 100 Hz. On rappelle que la célérité de propagation d'une vibration le long

du fil (en m/s) est égale à $\sqrt{\frac{P}{\mu}}$, désignant par P le poids tenseur (en N) et par μ la masse de l'unité de longueur de ce fil (en kg/m). Lorsqu'on fait varier progressivement le poids P , on constate que, pour certaines valeurs de ce poids, le fil vibre fortement en formant un ou plusieurs fuseaux. Écrire la relation entre le nombre k des fuseaux et le poids tenseur P . Quelle valeur doit-on donner à celui-ci pour faire apparaître 3 fuseaux ?

3. Une corde verticale OO' , de longueur 1 m est attachée, à sa partie supérieure O , à l'une des branches d'un diapason, entretenu électriquement, de fréquence 50 Hz. Son extrémité inférieure O' est pratiquement immobilisée par une plaque métallique mince, percée d'un petit trou au travers duquel passe la corde. Un poids P , accroché à l'extrémité inférieure O' , tend la corde.

1° Sachant que la corde vibre fortement en un seul fuseau pour $P = 20$ N, calculer la masse de la corde.

(On rappelle que la célérité des ondes transversales le long de la corde a pour expression :

$$V = \sqrt{\frac{P}{\mu}}; \text{ avec } V \text{ en m/s, } P \text{ en N et } \mu \text{ en kg/m.})$$

2° Pour quelles valeurs du poids P la corde se partage-t-elle, en vibrant, en 2, 3, 4 fuseaux ?

On indiquera, à l'aide d'une figure, comment vibre la corde quand elle se partage en 3 fuseaux et l'on en déduira la position des nœuds et des ventres.

3° On éclaire la corde à l'aide d'un faisceau lumineux traversant une petite ouverture pratiquée dans un disque opaque qui peut tourner d'un mouvement uniforme autour de son axe.

a) Représenter le dispositif expérimental.

b) Calculer, en tours par seconde, les vitesses de rotation du disque pour lesquelles la corde paraît immobile.

c) Quelles sont les vitesses pour lesquelles la corde semble effectuer un mouvement de fréquence 4 oscillations par seconde ?

(Bacc.).

Rép. : 1° 2 g ; 2° 5 N ; 2,22 N ; 1,25 N ;

3° b) $\frac{50}{k}$ tr/s (k entier) ; c) $\frac{50 \pm 4}{k}$ tr/s.

4. Deux sources vibratoires identiques S_1 et S_2 , de fréquence 264 Hz, sont placées à l'intérieur de la

colonne gazeuse d'un tuyau, de longueur indéfinie, à 6,15 m l'une de l'autre.

1° La source S_1 est en retard de $1/8$ de période sur S_2 ; déterminer les abscisses $S_1M = x$ des points M de mouvement résultant nul entre S_1 et S_2 .

(Célérité des ébranlements dans le gaz : 330 m/s.)

2° La fréquence de S_2 devient légèrement supérieure à celle de S_1 (1 vibration de plus en 30 s) ; comment se déplacent les points de mouvement nul ?

(D'après un probl. de bacc.).

5. Les extrémités A et B d'une corde tendue, de longueur $l = 5$ m, sont animées de deux mouvements sinusoïdaux transversaux de même amplitude $a = 1$ mm, de même fréquence $f = 50$ Hz, en quadrature (déphasage $\pi/2$) ; la célérité des ondes transversales le long de la corde est $V = 20$ m/s.

1° Trouver l'équation du mouvement résultant en un point M de la corde situé à $x = 1,30$ m de l'extrémité A. (On supposera qu'il n'y a pas réflexion des ondes).

2° Quelles sont les positions, par rapport à A, des points de mouvement nul et de mouvement maximal (on néglige l'amortissement) ?

Rép. : 1° $y \approx 0,141 \sin(314 t - 3\pi/4)$ cm ;

2° Mouvement nul : $x = (2,45 \pm 0,2 k)$ m ;

Mouvement maximal :

$x = (2,55 \pm 0,2 k)$ m ; (k entier).

6. La tige d'un tube de Kundt (fig 7) rend un son de fréquence $f = 2\,000$ Hz ; 1° calculer l'équidistance des tas quand le tube contient de l'air sec à 0° ; 2° à quelle température cette équidistance vaut-elle 8,7 cm ? ; 3° sachant que l'équidistance vaut 6,4 cm quand le tube contient du gaz carbonique à 0°, calculer le rapport $\frac{C_p}{C_o}$ des chaleurs massiques principales

de ce gaz ($C = 12$, $O = 16$; célérité du son dans l'air à 0° C : 331 m/s.)

Rép. : 1° 8,3 cm ; 2° 27° ; 3° 1,3.

7. On admet que le frottement de la tige d'un tube de Kundt, dans le sens de la longueur, fait naître le long de la tige des ondes stationnaires longitudinales présentant un nœud de déplacement au milieu M et des ventres aux 2 extrémités (fig. 7).

Sachant que la tige est longue de 95 cm, que le tube contient de l'air sec à 20 °C et que la distance des milieux du 1^{er} et du 8^e tas de poudre est 48,7 cm, calculer la fréquence du son rendu par la tige et la célérité du son dans la substance de cette tige à la température de l'expérience. (Célérité du son dans l'air à 0° C : 331 m/s.)

NOTIONS SOMMAIRES SUR LES VIBRATIONS FORCÉES ET LA RÉSONANCE

1. L'expérience des deux pendules couplés.

Deux pendules pesants, E et R, sont suspendus à un même support élastique constitué par un fil d'acier AB tendu horizontalement (fig. 1).

Le pendule E, que nous appellerons l'**excitateur**, a une masse importante (de l'ordre du kilogramme) et la longueur de son fil de suspension est initialement grande, supérieure à un mètre.

Le pendule R, que nous appellerons le **résonateur**, a une masse d'une dizaine de grammes, donc faible devant celle de E; son fil de suspension a une longueur fixe, également plus faible, de l'ordre de quelques décimètres.

Le fil élastique AB réalise l'interdépendance — on dit le *couplage* — des deux pendules.

a. — La fréquence de l'excitateur est petite devant celle du résonateur. Le phénomène d'oscillations forcées.

1° L'amortissement du résonateur est faible.

L'excitateur E étant au repos, laissons le résonateur R osciller *librement* avec une amplitude faible. Les oscillations sont *peu amorties* — c'est-à-dire que, d'une oscillation à l'autre, l'amplitude ne diminue que très faiblement — et elles sont approximativement sinusoïdales. La période T_0 de ces oscillations et leur fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$ sont appelées **période et fréquence propres** du résonateur.

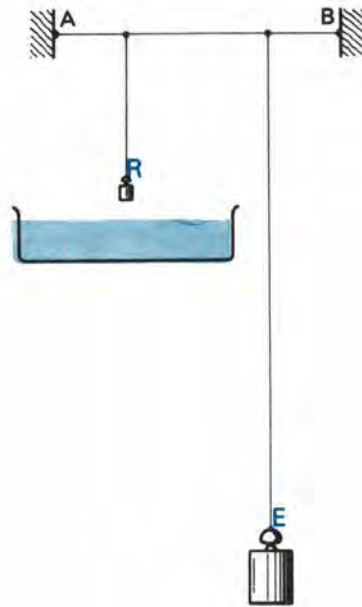


Fig. 1.

Immobiliisons R et faisons osciller l'excitateur E avec une amplitude faible. Ses oscillations sont, elles aussi, peu amorties mais leur période T est plus grande, leur fréquence $f = \frac{1}{T}$ plus petite que celles du pendule R, à cause de la plus grande longueur du fil de suspension.

Observons le résonateur R pendant que l'excitateur E oscille : il amorce quelques faibles oscillations, s'arrête, recommence et ainsi de suite, sans prendre à proprement parler un mouvement oscillatoire. La raison en est que l'excitateur le soumet, par l'intermédiaire du support élastique AB, à une suite d'impulsions qui ne s'accordent pas avec ses propres oscillations ; si une impulsion due à l'excitateur déclenche le mouvement du résonateur, une autre impulsion vient le contrarier et les oscillations du résonateur ne peuvent s'établir.

2° L'amortissement du résonateur est important. — Immobilisons les deux pendules et immergeons partiellement dans l'eau le résonateur R. Si nous l'écartons de sa position d'équilibre, ses oscillations propres sont maintenant *très amorties* : la courbe qui représente les variations de l'élongation angulaire en fonction du temps a la forme qu'indique la figure 2.

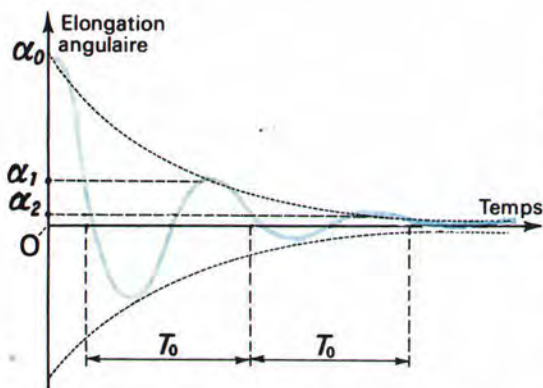


Fig. 2. — Le graphe d'un mouvement oscillatoire amorti.

Les amplitudes successives décroissent en progression géométrique :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \dots$$

Faisons de nouveau osciller l'excitateur E : nous observons que le résonateur R se met aussi à osciller avec une amplitude faible et une fréquence **égale** à la fréquence f de l'excitateur. On dit alors qu'il effectue des **oscillations forcées**. Ce phénomène s'explique en remarquant que le mouvement déclenché par une impulsion de l'excitateur se trouve pratiquement annulé, du fait de la résistance d'amortissement, lorsque l'im-

pulsion suivante se produit ; à chaque impulsion, le résonateur ne fait donc que s'écarter légèrement de sa position d'équilibre, alternativement dans un sens et dans l'autre, de sorte qu'il exécute des oscillations de faible amplitude dont la fréquence est nécessairement celle qu'impose l'excitateur.

b. — La fréquence de l'excitateur devient voisine de celle du résonateur. Le phénomène de résonance.

1° L'amortissement du résonateur est faible. — Sortons le résonateur de l'eau et faisons osciller l'excitateur avec une fréquence f de plus en plus grande, obtenue en diminuant progressivement la longueur de son fil de suspension. Lorsque la fréquence f de l'excitateur devient voisine de la fréquence propre f_0 du résonateur, on constate que le résonateur se met à osciller avec une amplitude qui augmente à mesure que f se rapproche de f_0 et passe par un maximum très accusé pour $f = f_0$:

C'est le phénomène de la **résonance**.

Dans le cas présent où le résonateur est *peu amorti*, la courbe représentant les variations de l'amplitude des oscillations du résonateur en fonction de la fréquence de l'excitateur a l'allure indiquée par la figure 3 ; on dit que **la résonance est aiguë**. L'amplitude est très grande pour $f = f_0$ mais décroît très vite dès que f augmente ou diminue à partir de cette valeur f_0 .

Le phénomène de la résonance s'explique par le fait que si f égale f_0 les impulsions dues à l'excitateur concordent avec les oscillations propres du résonateur ; à chaque impulsion cor-

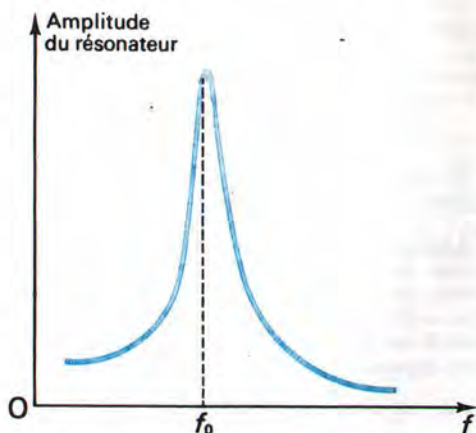


Fig. 3. — Une courbe de résonance aiguë.

respond un petit travail *moteur*, reçu par le résonateur et qui s'emmagine dans celui-ci sous forme d'énergie mécanique. D'impulsion en impulsion, l'énergie mécanique et, corrélativement, l'amplitude des oscillations augmentent. Cette augmentation a évidemment une limite du fait que les résistances d'amortissement transforment une partie de l'énergie mécanique en chaleur; l'amplitude limite est d'autant plus grande que l'amortissement est plus faible.

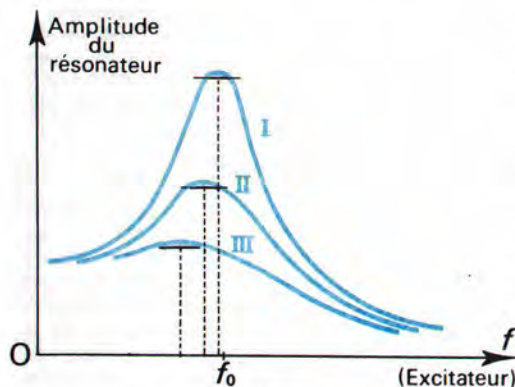


Fig. 4. — L'influence de l'amortissement sur l'acuité de la résonance.

Les courbes I, II et III correspondent à des amortissements de plus en plus importants.

On remarque que le maximum d'amplitude correspond à une fréquence f de l'excitateur un peu inférieure à la fréquence propre f_0 du résonateur, le décalage augmentant avec l'amortissement.

2° On fait croître l'amortissement du résonateur. — Re commençons la même suite d'expériences, le pendule résonateur étant d'abord très partiellement, puis de plus en plus complètement immergé dans l'eau. Nous constatons que l'augmentation d'amplitude observée quand la fréquence f de l'excitateur s'approche de la fréquence propre f_0 du résonateur est d'autant moins accusée que l'amortissement est plus important.

Les courbes représentatives s'aplatissent de plus en plus (fig. 4); on dit que **la résonance devient de plus en plus floue**.

Remarque.

Les expériences réalisées avec nos deux pendules correspondent au cas le plus simple de la mise en mouvement d'un oscillateur R par des impulsions reçues d'un autre oscillateur E : le cas d'un résonateur ne réagissant pas sensiblement

sur l'excitateur. En effet, les oscillations du pendule E, dont la masse est beaucoup plus grande que celle de R, ne sont pratiquement pas influencées par le mouvement de ce dernier pendule.

Avec des pendules *quelconques*, les phénomènes observés sont plus complexes et dépendent à la fois des fréquences propres des deux pendules, de leurs amortissements respectifs et de leur couplage.

2. Des exemples de vibrations forcées.

Conformément au résultat de notre première série d'expériences réalisée avec les deux pendules E et R, on peut obtenir la vibration *forcée* d'un oscillateur quelconque aux deux conditions suivantes :

- l'oscillateur est *très amorti*;
- la fréquence f imposée par l'excitateur est *petite*, comparée à la fréquence propre f_0 de cet oscillateur.

Ces conditions sont réalisées par exemple dans le cas du *tympan* de l'oreille, de la plaque vibrante d'un *écouteur téléphonique*, de la *membrane* d'un haut-parleur ou d'un microphone, qui reproduisent fidèlement des vibrations de fréquences très diverses. De tels vibrateurs sont souvent serrés sur leur pourtour, ce qui augmente notablement leur amortissement, et leurs fréquences propres sont toujours grandes, comparées aux plus grandes des fréquences excitatrices imposées.

3. Des exemples de résonance aiguë.

a. — La mise en vibration de solides.

Dans le cas fréquent où la partie tournante d'une machine n'est pas parfaitement équilibrée, elle joue, par ses trépidations, le rôle d'excitateur pour les autres parties de la machine susceptibles de vibrer. Quand la fréquence d'excitation, liée à la vitesse de rotation, devient égale à la fréquence propre de l'un ou de l'autre de ces oscillateurs, l'amplitude de la vibration qu'il prend par *résonance* peut devenir si grande que de dangereuses *ruptures* se produisent.

Il convient donc de connaître ces *vitesse critiques* et de les éviter, ou bien de les dépasser assez vite pour que les vibrations de résonance n'aient pas le temps de prendre trop d'amplitude.

Cette mise en oscillation par résonance explique les vibrations inconfortables ou bruyantes qu'il n'est pas rare d'observer dans une automobile pour certains régimes de rotation du moteur; leur amplitude est d'autant plus grande que les pièces de la carrosserie mises en cause sont plus desserrées, car leur amortissement est alors plus faible.



Fig. 5. — Le bâti d'un *gyroscope* porte des lames vibrantes L de longueurs inégales. Le disque tournant D a été légèrement évidé en T pour que son centre de gravité soit déporté un peu en dehors de son axe de rotation : il en résulte, au cours de la rotation, de légères trépidations dont la fréquence varie comme la vitesse de rotation.

Le disque ayant été lancé rapidement au moyen de la ficelle f, on observe successivement l'entrée en vibration des lames élastiques dans l'ordre 1, 2, 3, 4, quand la fréquence des trépidations (qui diminue lentement à cause des frottements) devient voisine de la fréquence propre de chaque lame.

La figure 5 représente une expérience de cours illustrant ces résonances *aiguës* provoquées par les trépidations périodiques d'un rotor.



Fig. 6. — La coupe schématique d'un résonateur de Helmholtz.

L'excitateur est placé devant l'ajutage A. L'énergie vibratoire se conserve pratiquement à l'intérieur de la cavité de sorte que, pour déceler la mise en vibration par résonance de la masse d'air emprisonnée, il faut approcher la canule C de l'oreille ou de tout autre récepteur de son.

b. — La mise en vibration de masses gazeuses.

La masse d'air contenue dans un **résonateur de Helmholtz** (fig. 6) entre en vibration par résonance et rend un son dont la fréquence f est fonction du rayon de la cavité sensiblement sphérique ⁽¹⁾. Du fait qu'il n'y a pratiquement pas d'énergie sonore diffusée à l'extérieur de la cavité, l'amortissement de la vibration est très faible, et, par suite, la résonance est particulièrement *aiguë*.

Les **caisses de résonance** des instruments à cordes (violons, violoncelles, guitares, harpes, ...) constituent aussi des résonateurs, mais beaucoup moins *sélectifs* que les précédents, les masses d'air emprisonnées pouvant vibrer par parties

⁽¹⁾ f varie approximativement comme $1/\sqrt{R^3}$

Un violon

Photo Walter.

Une harpe (Harpes Erard).



avec des fréquences comprises entre quelques dizaines et quelques milliers de hertz.

4. L'établissement d'ondes stationnaires par résonance.

a. — Le long d'une corde sonore.

Reprenons une expérience déjà faite en classe de Première à propos de l'étude des propriétés du courant alternatif (fig. 7):

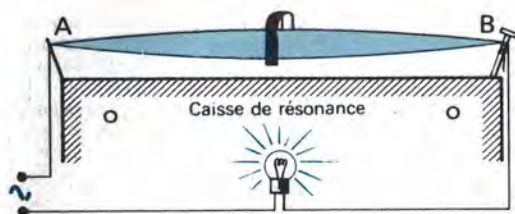


Fig. 7. — La mise en vibration d'une corde par résonance.

Une corde métallique, tendue sur une caisse de résonance, est parcourue par le courant alternatif du secteur; si nous en approchons un aimant, la force électromagnétique alternative résultant de l'action de l'induction magnétique de l'aimant sur le courant soumet la corde à une excitation périodique de fréquence 50 Hz et nous observons la mise en vibration de la corde *par résonance*, moyennant un réglage convenable de la tension.

Comme dans l'expérience de Melde (p. 187), la corde est le siège d'ondes stationnaires transversales; à la résonance, marquée par le maximum de renflement du fuseau, la fréquence f de sa vibration est égale à la fréquence imposée par le courant alternatif exciteur (50 Hz).

En changeant l'aimant de place et en diminuant progressivement la tension de la corde, on peut obtenir la vibration de celle-ci en deux ou plusieurs fuseaux stables, la fréquence, à la résonance, demeurant alors dans tous les cas celle du courant ⁽¹⁾.

La longueur et la tension de la corde restant fixes, on pourrait aussi observer la formation de deux, trois, quatre, ... fuseaux, mais avec des courants excitateurs de fréquences $2f$, $3f$, $4f$, ... Une corde vibrante de longueur donnée, soumise à une tension déterminée, constitue donc un **résonateur multiple**, dont les fréquences propres sont les multiples entiers de la plus petite d'entre elles.

⁽¹⁾ Voir l'exercice n° 3.

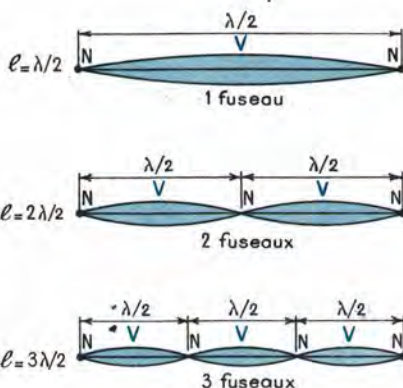


Fig. 8. — Les répartitions possibles des nœuds et des ventres le long d'une corde vibrante.

Les ondes stationnaires qui s'établissent sur une telle corde présentent obligatoirement un nœud d'élongation à chaque extrémité (fig. 8). Par suite,

la longueur de la corde est un multiple entier de la demi-longueur d'onde :

$$l = k \frac{\lambda}{2}$$

Or, la longueur d'onde λ est liée à la fréquence f de la vibration et à la célérité V de la propagation le long de la corde par la relation :

$$\lambda = \frac{V}{f}$$

D'autre part, nous avons vu que la célérité V a pour expression, en fonction du module F de la tension de la corde et de sa masse linéaire $\mu = \frac{m}{l}$:

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Il vient donc :

$$l = k \frac{\sqrt{F/\mu}}{2f}$$

D'où l'on tire :

$$f = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \left\{ \begin{array}{l} l \text{ en m;} \\ F \text{ en N;} \\ \mu \text{ en kg/m;} \\ f \text{ en Hz.} \end{array} \right.$$

Cette relation, connue sous le nom de **formule des cordes vibrantes**, donne les fréquences propres de la corde en fonction de sa longueur, de sa tension et de sa masse linéaire.

À la valeur $k = 1$ correspond le son le plus grave de tous les sons que la corde peut émettre; c'est le **son fondamental**, celui que rend la corde lorsqu'elle vibre en un seul fuseau.

Aux valeurs $k = 2, 3, 4, \dots$ correspondent des sons plus aigus, appelés **harmoniques**, que la corde peut

rendre séparément en vibrant en 2, 3, 4, ... fuseaux, sa longueur et sa tension demeurant dans tous les cas *inchangées*.

b. — Dans une colonne de gaz.

En approchant un diapason en vibration de l'ouverture d'une grande éprouvette (fig. 9) dont on fait varier progressivement la longueur l de la colonne d'air on obtient, pour certaines positions du niveau B du liquide, un renforcement considérable du son perçu. La cause du phénomène observé est encore l'établissement, par

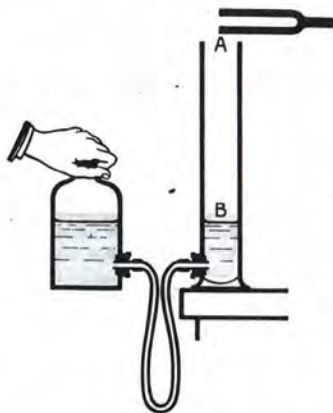


Fig. 9. — Pour certaines positions du niveau B, la colonne gazeuse AB entre en vibration *par résonance* et renforce le son produit par le diapason.

Fig. 10. — Pour certaines valeurs de la fréquence imposée par le générateur d'oscillations électriques, la colonne d'air du tuyau entre en vibration *par résonance* et renforce le son émis par le haut-parleur. Le dispositif microphone-oscilloscope électronique, sensible aux variations de pression, permet alors de repérer la position des *ventres de pression*, coïncidant avec les nœuds de déplacement.



résonance, d'un système d'ondes stationnaires (ici, longitudinales) dans la colonne gazeuse AB. A la résonance, marquée par le renforcement maximal du son, la fréquence de la vibration de l'air est égale à la fréquence f du diapason exciteur.

Pour être stable, le système d'ondes stationnaires doit présenter un *nœud* de déplacement à l'extrémité *fermée* B et un *ventre* de déplacement au voisinage immédiat de l'extrémité *libre* A; par suite, si λ désigne la longueur d'onde :

$$AB = l = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

D'autre part, V étant la célérité du son dans la colonne gazeuse et f la fréquence imposée par le diapason :

$$\lambda = \frac{V}{f}$$

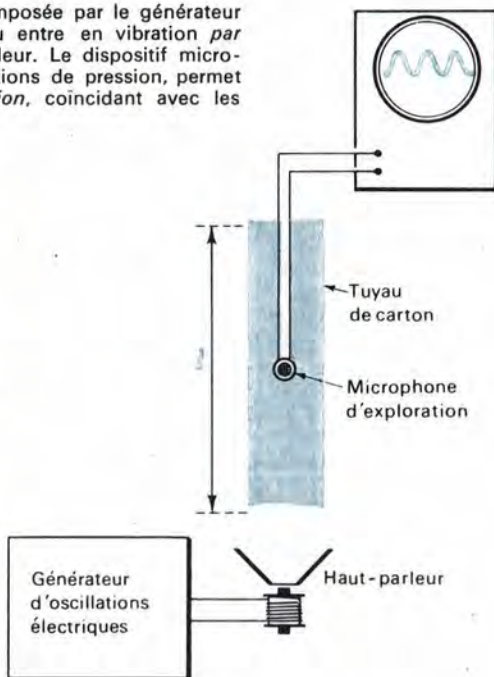
On en déduit les valeurs de l pour lesquelles la résonance se produit ⁽¹⁾ :

$$l = (2k + 1) \frac{V}{4f}$$

Par exemple, avec $V \approx 340$ m/s et $f = 440$ Hz (note la_2) on trouve : $l \approx (2k + 1) \times 0,2$ m, soit environ 20 cm pour $k = 0$, 60 cm pour $k = 1$, etc.

Au lieu de faire résonner une colonne gazeuse de longueur variable avec un exciteur de fréquence imposée, on peut utiliser la colonne d'air d'un *tuyau sonore* de longueur l donnée et l'exciter avec un haut-parleur émettant un son de fréquence variable (fig. 10). Le tuyau

(1) Voir l'exercice n° 6.



résonne pour toute valeur de la fréquence excitatrice égale à l'une des *fréquences propres* de sa colonne gazeuse.

Le tuyau étant *ouvert*, les systèmes d'ondes stationnaires pouvant s'y établir de façon stable présentent un *ventre* de déplacement au voisinage immédiat de chaque extrémité. Par suite :

$$l \approx k \frac{\lambda}{2}$$

et, avec $\lambda = V/f$:

$$l \approx k \frac{V}{2f}$$

On en déduit les *fréquences propres* du tuyau :

$$f \approx k \frac{V}{2l}$$

A $k = 1$ correspond le *son fondamental* du tuyau, à $k = 2, 3, 4, \dots$ correspondent les *harmoniques* de ce son fondamental.

Un tel tuyau sonore constitue donc aussi un **résonateur multiple** dont les *fréquences propres*, liées à sa longueur et la célérité du son dans sa colonne gazeuse, sont des multiples entiers de la plus faible d'entre elles. Les tuyaux d'orgue ouverts sont des résonateurs de ce type.



Grandes orgues.

Photo Stichting Orgelcentrum.

EXERCICES

1. 1° Une corde vibrante en acier (de masse volumique $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$) a une longueur $l = 40 \text{ cm}$ et une section $s = 0,4 \text{ mm}^2$; quelle est la tension F (en kgf) qui lui fait rendre comme son fondamental un son de fréquence $f = 218 \text{ Hz}$?

2° Pour amener le son fondamental de cette corde à l'unisson avec un son de fréquence X on doit rendre la tension 2,25 fois plus grande et réduire la longueur l de moitié; calculer X ($g \approx 9,8 \text{ u. SI}$).

Rép. : 1° 9,7 kgf; 2° $X = 652,5 \text{ Hz}$.

2. 1° On fixe à l'une des branches d'un diapason de fréquence 500 Hz, entretenu électriquement, une extrémité d'une corde dont la partie vibrante a pour longueur 1 m et qui est tendue par un poids P . La corde est dans le prolongement de la branche du diapason. Pour quelles valeurs de P peut-on avoir la résonance si 1 m de cette corde pèse 1 g? Quelle est en

pratique la plus grande valeur possible de P si la corde est en acier de densité 7,8 pouvant supporter sans dommage une tension de 20 kgf par mm^2 ? On négligera l'amplitude des vibrations du diapason par rapport à l'amplitude maximale des vibrations de la corde lorsque celle-ci entre en résonance.

2° D'autre part, l'une des branches du diapason est perpendiculaire à l'axe d'un tuyau sonore et près de l'ouverture, qui de ce fait ne se trouve nullement fermée. La colonne d'air qui peut entrer en vibration dans le tuyau est limitée par un piston qu'on peut déplacer. Pour quelles longueurs L du tuyau entendra-t-on un son d'intensité maximale? On donne : vitesse du son dans le gaz du tuyau : 340 m/s.

3° Quelle est l'influence sur les poids P et les longueurs L d'une variation de 1% de la fréquence imposée par le diapason?

(Bacc.).

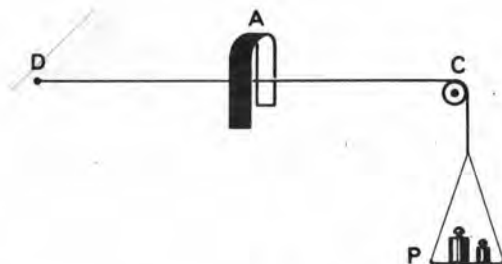


Fig. 11.

3. 1° Pour mesurer la fréquence d'un courant alternatif, on réalise l'expérience schématisée sur la figure 11.

Un fil de cuivre est tendu horizontalement entre une borne fixe D et une petite poulie métallique C, mobile sans frottement, à l'aide de poids placés dans un plateau P accroché à l'extrémité libre du fil. Un aimant en fer à cheval crée au voisinage de la partie moyenne du fil un champ magnétique dont l'induction

$\vec{B}$ est horizontale, normale au fil. On relie D et C, par l'intermédiaire de résistances convenables, aux bornes d'une prise de courant alimentée par un courant alternatif de fréquence f . On charge progressivement P avec des masses marquées. A un moment donné, le fil vibre fortement en présentant entre D et C l'aspect d'un seul fuseau.

Indiquer pourquoi le fil vibre avec une amplitude maximale pour une certaine charge du plateau. Trouver la fréquence f , avec les données suivantes de l'expérience décrite : longueur DC = 1 m, diamètre du fil : $2/10$ de millimètre; masse volumique du cuivre : $8,86 \text{ g/cm}^3$; masse du plateau P : 24 g; masses marquées ajoutées sur le plateau : 260 g; valeur locale de g : $9,8 \text{ u. SI}$.

2° L'aimant est maintenant placé au $1/4$ de la longueur DC à partir de D. Quelle valeur faut-il donner aux masses marquées placées sur le plateau pour obtenir la fibration du fil en deux fuseaux ?

Montrer que l'expérience réussira mieux si l'on dispose correctement un second aimant analogue à A aux $3/4$ de DC à partir de D. Représenter la forme du fil à l'élongation maximale. Indiquer sur une figure la disposition des pôles des deux aimants de part et d'autre du fil.

3° Le fil vibrant dans les conditions du 2° est rendu visible par une série d'éclairs, chacun d'eux d'une durée très courte, de l'ordre du dix millièmes de seconde, se succédant régulièrement à la fréquence de 50 éclairs par seconde. Quel sera l'aspect du fil dans ces conditions ?

Dessiner les aspects obtenus, si la fréquence des éclairs est successivement : 50, 100, 150, 200, en

admettant que l'un des éclairs se produise au moment où chaque point du fil atteint son élongation maximale.

(D'après un probl. de bacc.).

Rép. : 1° $f = 50 \text{ Hz}$; 2° 47 g; 3° Pour 50 éclairs par seconde, le fil paraît immobile.

4. Deux tuyaux étant initialement à l'unisson à 0°C avec la fréquence $f = 400 \text{ Hz}$, la température du gaz de l'un d'eux s'élève de $5,4^\circ\text{C}$; calculer la fréquence des battements observés.

5. On veut obtenir des ondes stationnaires stables dans un tuyau à air ouvert à une extrémité et fermé à l'autre; si la célérité dans l'air est 340 m/s , calculer la longueur l minimale du tuyau qui correspond à une fréquence $f = 100 \text{ Hz}$.

Pour quelles autres fréquences peut-on encore avoir des ondes stationnaires dans ce tuyau de longueur l ?

Rép. : $l = 0,85 \text{ m}$; $f = 100 (2k + 1) \text{ Hz}$.

6. 1° Une éprouvette cylindrique assez haute contient de l'eau dont le niveau libre est susceptible de varier. On dispose un diapason donnant le la normal (la_3) à l'extrémité de cette éprouvette (fig. 9). En élevant le niveau de l'eau dans l'éprouvette on constate que le son produit est nettement renforcé pour diverses positions de ce niveau. Sachant que ce renforcement est dû à la formation d'ondes stationnaires dans la colonne gazeuse qui surmonte le liquide (avec un nœud de déplacement sur la surface libre du liquide et un ventre au voisinage de l'extrémité supérieure de l'éprouvette), calculer la hauteur minimale qu'il faut donner à la colonne d'air pour obtenir la résonance.

On envisagera toujours ce dernier cas dans la suite du problème et l'on admettra que dans toutes les expériences envisagées le ventre à l'extrémité libre est situé à 1 cm au-delà de cette extrémité. L'expérience est faite à 15°C ; $la_3 = 440 \text{ Hz}$. Célérité du son dans l'air : 340 m/s à la température de 15°C .

2° En présentant un autre diapason à l'orifice de l'éprouvette, on trouve que la résonance se produit quand le niveau de l'eau est distant de l'extrémité libre de $31,5 \text{ cm}$. Calculer la fréquence du son rendu par le diapason.

3° Si la température de l'air intérieur de l'éprouvette passait de 15 à 20°C , les résultats précédents seraient-ils nettement modifiés ? On prendra comme exemple le cas de la première question.

4° On admet dans l'éprouvette un courant continu d'hydrogène à 15°C . Quelle serait la situation du niveau de l'eau pour obtenir la résonance en utilisant le diapason donnant le la normal ?

En réalité, l'hydrogène utilisé est mélangé avec une faible quantité d'air; déterminer la composition en volumes de ce mélange, sachant que le niveau de l'eau à la résonance pour le la_3 est à 65 cm de l'ouverture de l'éprouvette.

(D'après un probl. de bacc.).

LES INTERFÉRENCES LUMINEUSES ET LA NATURE VIBRATOIRE DE LA LUMIÈRE

A. UNE EXPÉRIENCE D'INTERFÉRENCES LUMINEUSES

1. L'expérience des miroirs de Fresnel.

a. — Le dispositif expérimental.

Deux miroirs plans rectangulaires, m_1 et m_2 , sont juxtaposés de façon qu'un de leurs bords, A, soit commun et que l'angle α de leurs plans

soit *très faible*, de l'ordre de quelques minutes (fig. 1). Une source de lumière **monochromatique** S, que nous supposons d'abord *ponctuelle*, éclaire la totalité de leurs faces réfléchissantes sous une *incidence presque rasante*.

Aux deux faisceaux incidents juxtaposés, les

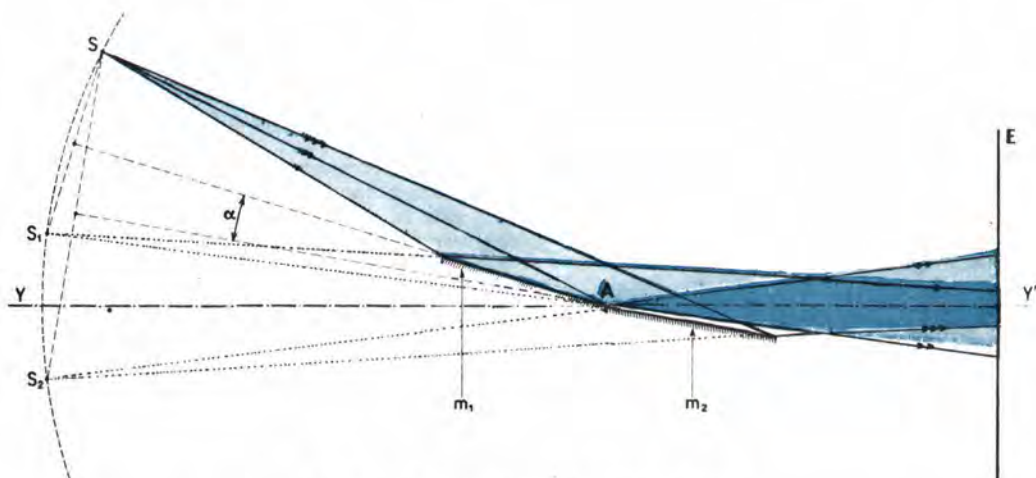


Fig. 1. — L'expérience des miroirs de Fresnel.

Les deux faisceaux réfléchis semblent provenir des sources S_1 et S_2 , images *virtuelles* de la source S, symétriques de celle-ci par rapport aux plans des deux miroirs.

miroirs font correspondre deux faisceaux réfléchis qui présentent une *partie commune* (de teinte plus foncée sur la figure).

b. — Les faits observés.

Si l'on place un écran E dans cette partie commune, on y voit apparaître, parallèlement à l'arête commune A des miroirs, des raies équidistantes, alternativement brillantes et obscures, que l'on appelle des **franges** (fig. 2). Comme

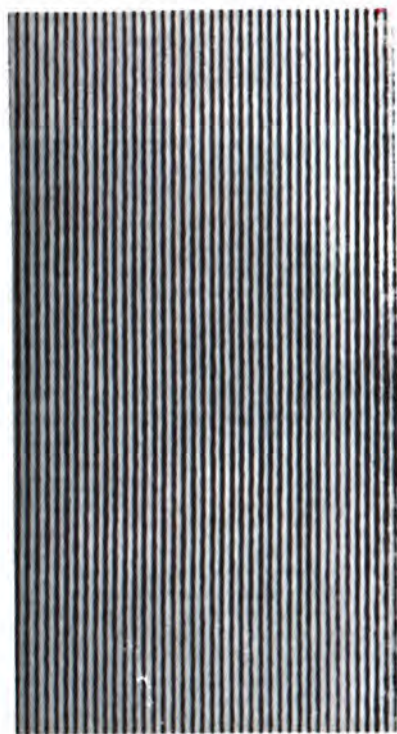


Fig. 2. — La photographie des franges obtenues en lumière monochromatique.

la position de l'écran peut être *quelconque* dans la région où les deux faisceaux réfléchis ont une partie commune, on dit que **les franges obtenues ne sont pas localisées**.

Si l'on supprime l'un des faisceaux réfléchis en masquant l'un ou l'autre des miroirs, les

raies disparaissent, l'écran est uniformément éclairé.

2. L'interprétation : la nature vibratoire de la lumière.

a. — L'apparition de franges obscures, lorsque les traces des deux faisceaux réfléchis se superposent sur l'écran d'observation, montre que *de la lumière s'ajoutant à de la lumière peut produire l'obscurité* en certains points. Ce fait expérimental est à rapprocher de ce que l'on observe à la surface d'un liquide lorsque la superposition de deux mouvements vibratoires y produit l'immobilité en certains points.

Par analogie, on est conduit à penser que les franges observées résultent d'un *phénomène d'interférences lumineuses* et, par suite, qu'une **lumière monochromatique doit être considérée comme une vibration sinusoïdale qui se propage à partir de la source lumineuse**.

A chaque lumière monochromatique — encore appelée *radiation lumineuse* — est donc liée une grandeur V , de la forme :

$$V = a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right)$$

dont la *période T* est caractéristique de cette radiation. Provisoirement, nous ne nous préoccupons pas de la nature de cette grandeur V , qui sera précisée plus tard, à propos des ondes électromagnétiques ⁽¹⁾.

b. Dans l'expérience des miroirs de Fresnel, tout se passe comme si les deux faisceaux réfléchis provenaient des deux sources virtuelles S_1 et S_2 . Comme celles-ci sont deux images de la seule et même source réelle, S , elles constituent deux sources de vibrations sinusoïdales de même période T qui, dans le cas présent, ont la même phase.

De ces sources *cohérentes* partent deux ondes lumineuses sinusoïdales qui se propagent dans l'air avec la *célérité c* ⁽²⁾ et, par suite, avec la *longueur d'onde* :

$$\lambda = c T$$

Le problème posé par la superposition de ces deux ondes progressives se traite comme au § 4 du chapitre 18 :

Soit M un point quelconque du *champ d'interférence*, c'est-à-dire de la partie commune aux deux faisceaux réfléchis. L'état vibratoire au

⁽¹⁾ Voir la lecture, page 225.

⁽²⁾ Rappelons que, dans l'air, la célérité de la lumière est sensiblement égale à la célérité dans le vide :

$c \approx 300\,000\text{ km/s} = 3 \times 10^8\text{ m/s}$.

point M ne dépend que des distances d_1 et d_2 du point M aux deux sources S_1 et S_2 .

En particulier, nous avons vu que :

1° Si la différence de marche $d_2 - d_1$ est égale à un multiple entier de la longueur d'onde, les deux vibrations composantes sont en phase au point M et l'amplitude de la vibration résultante y est maximale.

Comme la propagation s'effectue ici dans un espace à trois dimensions, les points du champ d'interférence où la vibration lumineuse résultante a une amplitude maximale appartiennent à une famille d'hyperboloïdes fixes, définis par la relation :

$$d_2 - d_1 = k\lambda$$

et admettant les sources S_1 et S_2 comme foyers communs.

2° Si la différence de marche $d_2 - d_1$ est égale à un multiple entier impair de la demi-longueur d'onde, les deux vibrations composantes sont en opposition de phase au point M et la vibration résultante y a une amplitude nulle. Les points d'amplitude nulle appartiennent à une autre famille d'hyperboloïdes fixes, définis par la relation :

$$d_2 - d_1 = (2k + 1) \lambda/2$$

et admettant les mêmes foyers S_1 et S_2 que les

hyperboloïdes d'amplitude maximale, entre lesquels ils s'intercalent.

L'intersection de ces deux familles de surfaces par le plan d'observation E, parallèle à S_1S_2 (fig. 3), donne, en toute rigueur, des arcs d'hyperboles. En fait, le champ d'interférence ayant une étendue très faible de part et d'autre du plan médiateur YY' du segment S_1S_2 , la courbure de ces arcs est très faible de sorte qu'ils se confondent pratiquement avec de petites portions de droites parallèles. Comme, d'autre part, on démontre que *l'éclairement d'un point de l'écran E est proportionnel au carré de l'amplitude de la vibration résultante en ce point*, les intersections des hyperboloïdes d'amplitude maximale constituent les milieux des franges brillantes et celles des hyperboloïdes d'amplitude nulle constituent les milieux des franges obscures.

3. Le calcul de l'interfrange.

Le plan contenant la source lumineuse S et ses deux images S_1 et S_2 (fig. 1) est, pour le dispositif interférentiel, un plan de symétrie que nous prenons comme plan de figure; il coupe l'écran d'observation E suivant une droite $X'OX$ perpendiculaire aux franges (fig. 3).

Proposons-nous de déterminer la position des franges sur l'écran E en calculant leurs abscisses

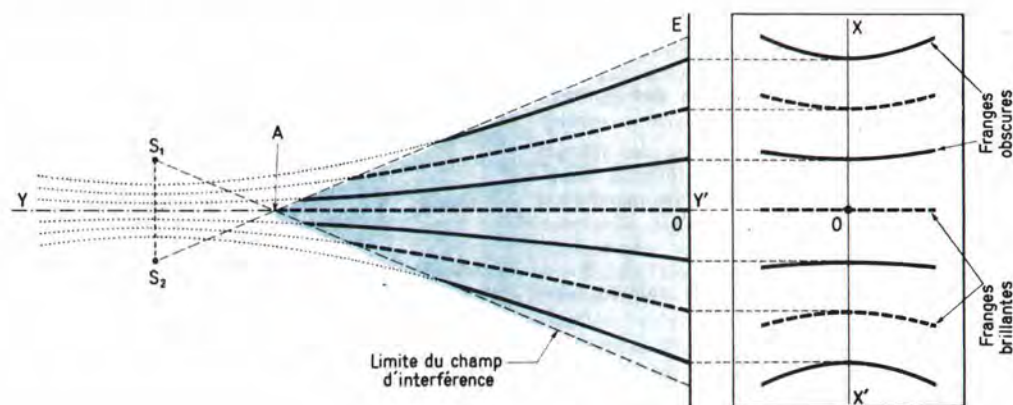


Fig. 3. — L'explication de la formation de franges alternativement brillantes et obscures sur un écran E coupant le champ d'interférence.

On a rabattu le plan E à droite de la figure pour montrer les intersections des hyperboloïdes des deux familles.

La figure est très dilatée en hauteur; en réalité, les hyperboloïdes et, par suite, les franges sont beaucoup plus serrés.

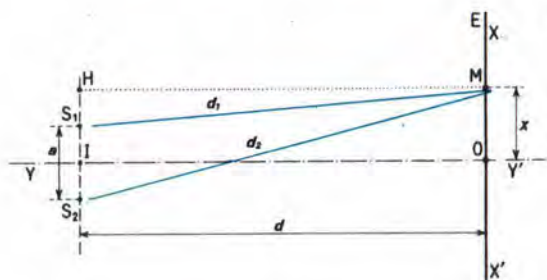


Fig. 4.

OM = x sur la droite X'OX (fig. 4). Posons :

— écartement des sources : $S_1S_2 = a$;

— distance des sources à l'écran : $IO = d$.

Appliquons le théorème de la médiane dans le triangle S_1MS_2 :

$$d_2^2 - d_1^2 = 2a \cdot IH, \text{ ou, puisque } IH = OM = x :$$

$$d_2^2 - d_1^2 = 2ax; \quad d_2 - d_1 = \frac{2ax}{d_2 + d_1}.$$

Les conditions de l'obtention des franges imposent que a et x soient de l'ordre du *millimètre* et d de l'ordre du *mètre*; on peut alors confondre $d_1 + d_2$ avec $2d$. Il vient donc, pour la *différence de marche* $\Delta = d_2 - d_1$ correspondant au point M :

$$\Delta = \frac{ax}{d}$$

a. — Les abscisses des milieux des franges brillantes.

Nous avons vu que les milieux des franges brillantes sont des points d'amplitude maximale, pour lesquels la différence de marche est de la forme :

$$\Delta = k\lambda$$

Leurs abscisses ont donc des valeurs telles que :

$$k\lambda = \frac{ax}{d}$$

$$x = k \frac{\lambda d}{a}$$

A $k=0$ correspond la *frange centrale* brillante. Les autres franges brillantes ont leurs milieux de part et d'autre de celle-ci, à des distances

$$\frac{\lambda d}{a}; \quad 2 \frac{\lambda d}{a}; \quad 3 \frac{\lambda d}{a}; \text{ etc.}$$

b. — Les abscisses des milieux des franges obscures.

Les milieux des franges obscures correspondent à des différences de marche de la forme :

$$\Delta = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

Par suite, leurs abscisses sont telles que :

$$(2k+1) \frac{\lambda}{2} = ax/d$$

$$x = \frac{(2k+1)}{2} \cdot \frac{\lambda d}{a}$$

Les milieux des franges obscures sont donc, de part et d'autre du milieu de la frange brillante centrale, à des distances :

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda d}{a}; \quad \frac{3}{2} \frac{\lambda d}{a}; \quad \frac{5}{2} \frac{\lambda d}{a}; \text{ etc.}$$

On voit que les franges de même nature sont *équidistantes*, l'*interfrange* ayant pour valeur :

$$i = \frac{\lambda d}{a}$$

Cette relation montre que, pour une lumière monochromatique donnée, les franges sont d'autant moins serrées que les sources S_1 et S_2 sont plus rapprochées l'une de l'autre et que le plan d'observation E est placé plus loin de ces sources. D'autre part, leur *écartement* est *proportionnel* à la *longueur d'onde* de la lumière utilisée.

4. Les longueurs d'onde des radiations visibles.

Si l'on éclaire le dispositif interférentiel avec la lumière jaune produite par une lampe à vapeur de *sodium*, et si les données du montage expérimental sont :

$$a = 1 \text{ mm}; \quad d = 1 \text{ m}$$

la mesure de l'*interfrange* i donne :

$$i \approx 0,59 \text{ mm.}$$

On en déduit la valeur approchée de la longueur d'onde λ de la lumière du sodium :

$$\lambda = \frac{ia}{d} = \frac{0,59 \times 10^{-3} \times 10^{-3}}{1} = 0,59 \times 10^{-6} \text{ m,}$$

soit : 0,59 *micron*.

Cet exemple montre la faible valeur d'une longueur d'onde lumineuse. **Les longueurs d'onde des radiations visibles vont sensiblement de 0,4 micron (violet extrême) à 0,75 micron (rouge extrême).** Voici, à titre d'exemple, avec les lettres qui les désignent, les longueurs d'onde de quelques radiations visibles, appartenant aux spectres atomiques du sodium et de l'hydrogène :

A (rouge sombre)	0,759 μ
C (rouge orangé)	0,656 μ
D (jaune)	0,589 μ
F (bleue)	0,486 μ
H (violette)	0,397 μ

La connaissance de la longueur d'onde λ et de la célérité c de la lumière dans l'air entraîne celle de la **période** T et de la **fréquence** ν de la vibration lumineuse.

Par exemple, pour une radiation moyenne (jaune orangé), cheminant dans l'air :

$$\lambda \approx 0,6 \mu = 6 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$c \approx 300\,000 \text{ km/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

On en déduit :

$$T = \frac{\lambda}{c}, \text{ soit : } T \approx \frac{6 \times 10^{-7}}{3 \times 10^8} = 2 \times 10^{-15} \text{ s}$$

$$\text{et } \nu = \frac{1}{T}, \text{ soit : } \nu \approx 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Ces nombres mettent en évidence la profonde différence de nature entre ondes lumineuses et ondes matérielles.

Les ondes lumineuses se propagent *incomparablement plus vite* : 300 000 km/s dans l'air, c'est-à-dire environ 900 000 fois plus vite que le son !

D'autre part, le phénomène vibratoire est *beaucoup plus rapide*. La grandeur vibrante V qui caractérise une radiation lumineuse effectuée en une seconde un nombre énorme d'oscillations, de l'ordre de 10^{14} , soit *cent mille milliards* ! Une source de lumière n'est en rien comparable à une source sonore, aucun oscillateur matériel ne pouvant prendre un mouvement vibratoire aussi extraordinairement rapide.

Remarque : L'utilisation des interférences lumineuses en métrologie de haute précision.

Considérons un point mobile, M, dans le plan d'observation E (fig. 4) : un déplacement d'un interfrange qui fait passer M d'une frange quelconque à la frange suivante de même nature correspond à une variation de la différence de marche $S_2M - S_1M$ égale à 1 longueur d'onde.

Si l'on tient compte du fait qu'une longueur d'onde lumineuse, bien qu'elle soit très petite, peut être connue avec une grande précision, on voit que les *interférences lumineuses fournissent le moyen de mettre en évidence de très faibles variations de longueur*. C'est pourquoi les dispo-

sitifs de mesure des longueurs les plus précis sont des dispositifs interférentiels ⁽¹⁾ ; ils permettent de réduire l'incertitude d'une mesure de longueur à une petite fraction de longueur d'onde, donc à une valeur très inférieure au micron.

5. Les conditions d'interférences.

a. — La nécessité de deux sources cohérentes.

Au lieu de dédoubler le faisceau lumineux issu de la source S au moyen des deux miroirs (fig. 1), on aurait pu superposer les faisceaux provenant de deux sources fournissant la même lumière *monochromatique* : l'expérience montre que l'on n'observe jamais d'interférences en pareil cas, du fait que les deux sources ne sont pas cohérentes.

La raison en est que l'émission d'une radiation par une source de lumière ordinaire résulte de phénomènes n'ayant rien de commun avec le mouvement vibratoire d'une source sonore. Nous y reviendrons succinctement en précisant les hypothèses actuelles concernant la constitution de la matière ; disons seulement que, dans le cadre de ces hypothèses, *on ne peut observer le phénomène d'interférence en un point M que si la lumière provenant d'une source unique peut atteindre ce point par deux chemins différents*.

Aussi, les dispositifs interférentiels sont-ils conçus dans le but de réaliser — par réflexion, réfraction ou diffraction — le *dédoublement* d'une onde incidente unique, puis la rencontre des deux ondes ainsi obtenues. Tout se passe alors comme si ces ondes provenaient de deux sources cohérentes.

b. — L'emploi d'une fente source.

Si la source S — que nous avons supposée ponctuelle (fig. 1) — a en réalité une étendue quelconque, chacun de ses points lumineux donne un système de franges dans le plan d'observation E et les chevauchements qui en résultent enlèvent en général toute netteté au phénomène observé. Par contre, avec une source constituée par une *fente lumineuse très fine disposée parallèlement à l'intersection des deux miroirs*, tous les systèmes de franges ont respectivement leurs franges brillantes et leurs franges obscures superposées, de sorte que l'on gagne beaucoup en luminosité sans perdre en netteté.

⁽¹⁾ En fait, beaucoup plus perfectionnés que le dispositif de Fresnel et fournissant des franges localisées. (Revoir la définition du mètre, p. 123).

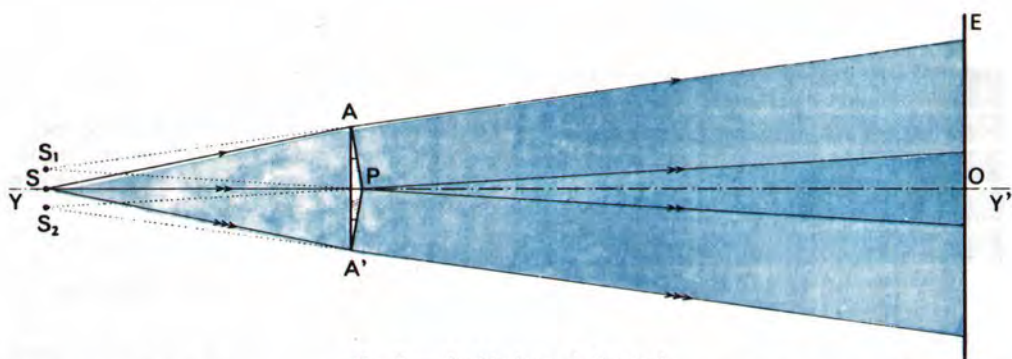


Fig. 5. — *Le biprisme de Fresnel.*

Deux prismes de verre identiques, d'angle A ($\approx A'$) très petit (10 à $20'$), d'indice n , sont accolés par leurs bases et ont une face commune ; ils donnent de S deux images virtuelles, S_1 et S_2 , qui se déduisent de S par une rotation autour de P d'un angle ($\angle SPS_1$ et $\angle SPS_2$) égal à la déviation :

$$D \approx (n - 1) A$$

que les prismes font subir aux rayons lumineux issus de S .

Le faisceau incident SAA' donne 2 faisceaux émergents, de sommets S_1 et S_2 , qui se superposent partiellement ; la partie commune (plus foncée sur la figure) est le *champ d'interférence*.

Si la source S n'est pas très intense, on peut supprimer l'écran E et placer directement l'œil, armé d'une petite loupe, dans le champ d'interférence.

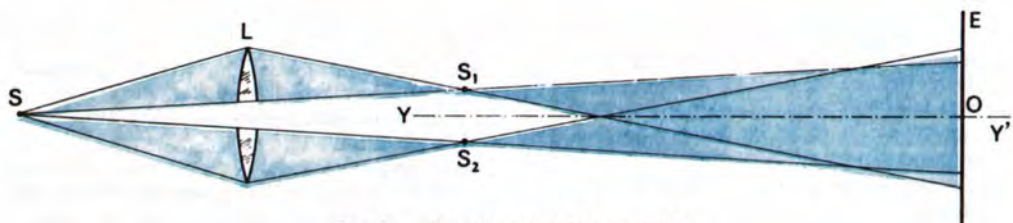


Fig. 6. — *Les demi-lentilles de Billet.*

Une lentille mince convergente L a été scindée suivant un diamètre et ses deux moitiés sont légèrement écartées l'une de l'autre. Une fente fine S , éclairée en lumière monochromatique, est placée parallèlement au plan de la lentille et au plan de section.

On obtient ainsi deux faisceaux de sommets S_1 et S_2 (images réelles de S) dont la partie commune est le champ d'interférence.

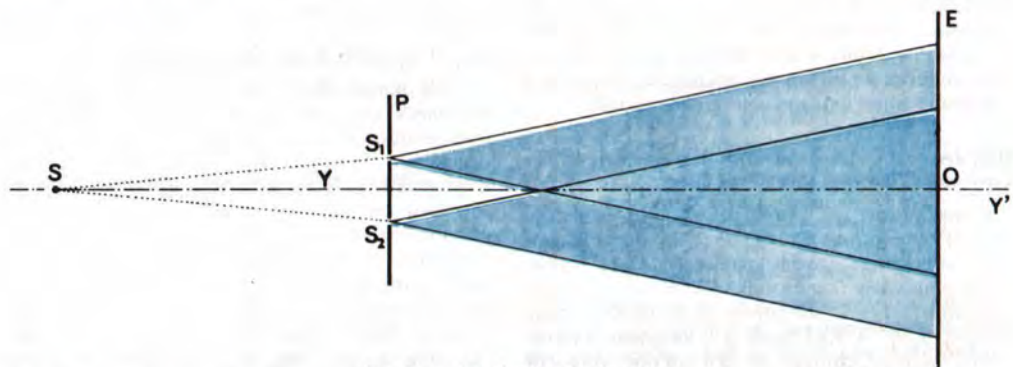


Fig. 7. — *Les fentes de Young.*

Entre la fente source S , éclairée en lumière monochromatique, et l'écran d'observation E on place un autre écran mince, P , percé de deux fentes fines S_1 et S_2 , parallèles à S et distantes l'une de l'autre d'environ 1 mm.

La lumière issue de S est *diffractée* par S_1 et S_2 en deux faisceaux qui semblent provenir de ces deux fentes et dont la partie commune constitue encore le champ d'interférence.

6. D'autres dispositifs interférentiels permettant d'obtenir des franges non localisées.

Les figures 5, 6 et 7 décrivent d'autres dispositifs interférentiels, satisfaisant aux conditions d'interférences précisées au paragraphe précédent. Ils fournissent tous des franges *non localisées* dont les positions, dans un plan d'observation E, se déterminent comme nous l'avons fait pour les franges des miroirs de Fresnel (§ 3 et fig. 4).

7. L'aspect des franges en lumière blanche.

Si la source S émet une lumière *complexe*, à chaque radiation correspond un système de franges, nécessairement décalé par rapport aux autres puisque *l'interfrange est proportionnel à la longueur d'onde*. Seules, les franges centrales, correspondant toutes à une différence de marche nulle, se superposent exactement.

Avec une source de lumière *blanche*, qui émet une infinité de radiations dont les longueurs d'onde sont infiniment voisines, il y a *une seule frange blanche* : la **frange centrale**. De part et d'autre de celle-ci, plusieurs couleurs se superposent, à la fois parce que les milieux des franges brillantes sont décalés (fig. 8) et que chaque frange a une certaine largeur.

En chaque point du plan d'observation des franges, la couleur résultante dépend des intensités relatives que les diverses radiations prennent en ce point. L'œil, étant particulièrement sensible au jaune, voit encore quelques franges brillantes, d'ailleurs très irisées, là où le jaune domine, mais les couleurs vives s'estompent rapidement à mesure qu'on s'éloigne de la frange centrale car le nombre des radiations qui superposent leurs maximums au même point sont de plus en plus nombreuses.

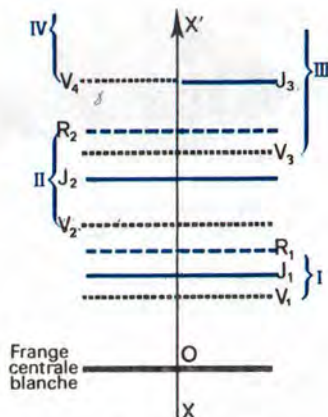


Fig. 8. — La répartition des franges colorées dans le phénomène d'interférence en lumière blanche. N'ont été indiqués sur ce schéma que les milieux des franges brillantes correspondant à 3 couleurs : une *violette* ($\lambda = 0,42 \mu$), une *jaune* ($\lambda = 0,56 \mu$) et une *rouge* ($\lambda = 0,70 \mu$).

Dès que l'on arrive dans la région où se superposent ainsi toutes les couleurs principales de l'arc-en-ciel, l'œil a une impression de blanc, que l'on appelle **blanc d'ordre supérieur**.

Si l'on retire l'écran d'observation E et place dans cette région, parallèlement à la frange centrale, la fente d'un spectroscopie⁽¹⁾ permettant d'analyser le blanc d'ordre supérieur, on observe un **spectre cannelé**, c'est-à-dire zébré d'étroites bandes obscures correspondant aux radiations pour lesquelles l'emplacement de la fente du spectroscopie est le milieu d'une frange obscure (voir l'exercice résolu n° 1).

(¹) Un spectroscopie comprend essentiellement un dispositif de dispersion de la lumière (fig. 9) associé à une petite lunette destinée à l'observation du spectre obtenu.

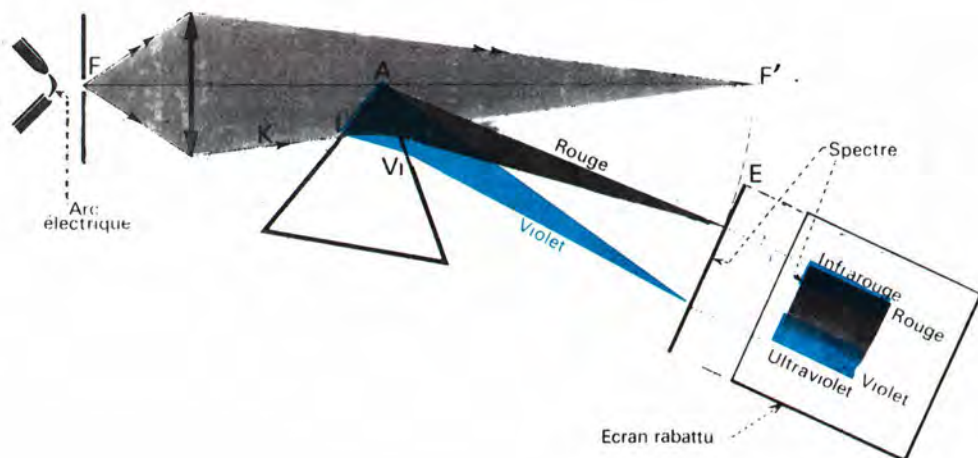


Fig. 9. — La *dispersion* de la lumière blanche par un prisme.

B. LES RADIATIONS INFRAROUGES ET ULTRAVIOLETES

8. L'existence de radiations lumineuses invisibles.

Réalisons l'expérience, déjà faite en classe de Première, de la *dispersion de la lumière blanche* émise par un arc électrique, en utilisant cette fois une lentille et un prisme en *quartz* (fig. 9).

Une pile thermoélectrique P (fig. 12), placée d'abord dans la partie rouge du spectre, donne une « réponse » dont l'intensité croît lorsqu'on la déplace *en deçà du rouge* (fig. 10), preuve que la lumière de l'arc comprend des radiations invisibles, dites **infrarouges**, moins déviées par le prisme que les radiations visibles, donc

de longueurs d'onde supérieures à celles du rouge extrême.

D'autre part, l'illumination d'un écran *fluorescent* E (au platino-cyanure de baryum) dans le violet et *au-delà* montre qu'il existe aussi d'autres radiations invisibles, dites **ultraviolettes**, de longueurs d'onde inférieures à celle du violet extrême.

La possibilité d'utiliser les mêmes récepteurs pour étudier les radiations rouges et infrarouges d'une part, violettes et ultraviolettes d'autre part, montre que les limites du spectre visible ($0,75 \mu$ et $0,4 \mu$) ne correspondent à aucune discontinuité dans les propriétés du rayonnement en dehors de l'excitation de la rétine. Les récepteurs de lumière autres que l'œil, tels que la pile thermoélectrique, l'écran fluorescent, la plaque photographique ou encore la cellule photoélectrique, ne distinguent aucunement les radiations visibles « extrêmes » de leurs voisins immédiates appartenant à l'infrarouge ou à l'ultraviolet.

L'étendue des spectres infrarouge et ultraviolet sera précisée ultérieurement (chap. 28). Disons seulement que les longueurs d'ondes de l'infrarouge « lointain » dépassent 500μ alors que celles des plus « courtes » radiations ultraviolettes sont de l'ordre de $0,01 \mu$.

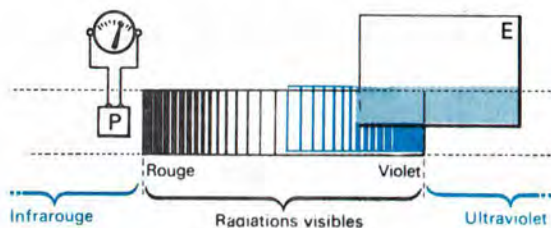


Fig. 10. — La mise en évidence de l'existence de radiations invisibles.

9. L'infrarouge.

a. — La production.

Nous avons appris qu'un corps dont la température est supérieure à la température ambiante cède de la chaleur par convection, conduction et rayonnement.

L'étude expérimentale du rayonnement émis par des corps chauds tels qu'un charbon de lampe à arc ou le filament de tungstène d'une ampoule électrique montre qu'il est constitué de radiations dont les longueurs d'onde forment un spectre continu, largement étalé dans l'infrarouge, et limité du côté des radiations visibles par une longueur d'onde d'autant plus courte que la température est plus élevée.

Par exemple, un bâtonnet de charbon chauffé progressivement jusqu'à l'incandescence n'émet d'abord que des radiations infrarouges, auxquelles s'ajoutent, à partir de 600 °C environ, des radiations rouges, puis orangées, jaunes, etc.

Nous verrons que les radiations transportent une forme d'énergie, dite **énergie rayonnante**, de nature électromagnétique (chap. 26).

La puissance totale rayonnée augmente très vite avec la température et la fraction de cette puissance transportée par le rayonnement infrarouge est toujours très importante. C'est ainsi que le filament d'une lampe à incandescence, porté à 2 500 °C, émet un spectre continu allant de l'infrarouge à l'ultraviolet, mais que 80 % environ de la puissance rayonnée est transportée par l'infrarouge. Le Soleil lui-même, dont la température superficielle est voisine de 6 000 °C, est un puissant radiateur d'infrarouge.

Ainsi, la production de lumière infrarouge est un phénomène tout à fait banal. En fait, nous vivons environnés d'infrarouge, produisant constamment nous-mêmes et recevant des objets qui nous entourent des radiations de quelques microns de longueur d'onde. Un radiateur ou un fer à repasser électriques constituent des sources commodes de radiations infrarouges.

b. — L'absorption.

Quand les radiations lumineuses frappent un corps, l'énergie qu'elles transportent est en partie renvoyée (réflexion, diffusion) ou transmise (réfraction), mais le corps en absorbe toujours une partie.

A égalité d'épaisseur traversée, l'absorption est extrêmement variable d'un corps à l'autre et, pour le même corps, d'une bande spectrale à une autre; certes, il existe des corps absorbant pratiquement toutes les radiations, tels que le noir de fumée ou le noir de platine, et aussi des corps qui n'en absorbent pratiquement aucune, comme un miroir d'argent, mais pour la plupart

des corps l'absorption est un phénomène sélectif, c'est-à-dire variable avec la longueur d'onde.

Par exemple, le verre ordinaire, transparent pour les radiations visibles, absorbe l'infrarouge de longueur d'onde supérieure à 3 μ .

C'est pourquoi, dans les spectrographes utilisés pour l'étude du rayonnement infrarouge, les lentilles sont remplacées par des miroirs concaves et les prismes sont en sel gemme (NaCl) ou en sylvine (KCl).

De même, il suffit d'une épaisseur d'eau de 1 cm pour absorber à peu près complètement l'infrarouge à partir de 1,3 μ , et même tout l'infrarouge si l'eau est additionnée de sulfate de cuivre (fig. 11-a). Par contre, une solution d'iode dans le sulfure de carbone arrête presque toutes les radiations visibles mais laisse passer l'infrarouge (fig. 11-b).

L'atmosphère est aussi douée d'absorption sélective : par exemple, l'air un peu brumeux est beaucoup plus transparent pour certaines bandes étroites d'infrarouge (2,2 à 2,4 μ ; 3,5 à 4,1 μ ; 9 à 11 μ) que pour les radiations visibles.

Quant à la destinée de l'énergie rayonnante

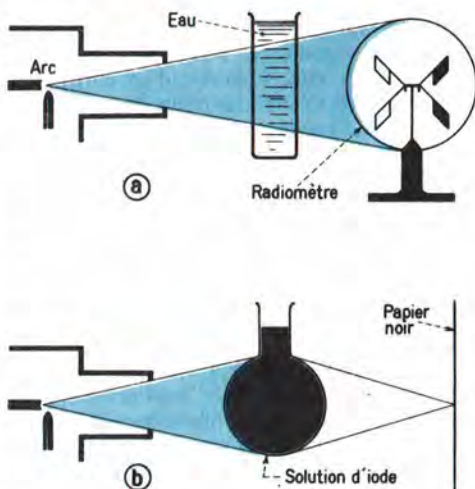


Fig. 11. — L'absorption sélective de l'infrarouge.

a) Le radiomètre, éclairé par le faisceau émanant de l'arc électrique, tourne rapidement. L'interposition d'une cuve d'eau ralentit le mouvement, surtout si l'eau contient du sulfate de cuivre.

b) Par contre, une solution d'iode dans le sulfure de carbone éteint pratiquement le faisceau lumineux mais laisse passer l'infrarouge; en absorbant celui-ci, un papier noir s'échauffe jusqu'à s'enflammer.

absorbée, elle dépend aussi du corps absorbant et des longueurs d'onde :

Le plus souvent, cette énergie se transforme en **énergie calorifique**, surtout dans le cas des radiations infrarouges. Si l'on a longtemps appelé « chaleur rayonnante » (ou radiations « calorifiques ») le rayonnement infrarouge, c'est à la fois parce que la plus grande partie de l'énergie rayonnée par une source ordinaire de lumière est transportée par les radiations infrarouges et que celles-ci chauffent les corps qui les absorbent.

On sait qu'il est possible de déclencher par exemple la combustion de la paille ou de l'amadou en les plaçant au foyer d'une loupe traversée par la lumière du Soleil ou de l'arc électrique.

Par contre, les radiations infrarouges n'excitent pas la fluorescence et ont peu d'effets photochimiques. Les émulsions photographiques ordinaires ne sont sensibles ni au rouge ni à l'infrarouge; on peut cependant, par des traitements spéciaux, étendre la sensibilité jusqu'à $1,5 \mu$ ce qui donne tout de même la possibilité de photographier en lumière infrarouge de courte longueur d'onde.

c. — Les récepteurs d'infrarouge.

Pour détecter et étudier un rayonnement infrarouge, on emploie surtout des **récepteurs thermiques**, fondés sur l'absorption du rayonnement par la **surface noircie** d'un corps, dont la température s'élève par suite de la transformation de l'énergie rayonnante en énergie calorifique.

Ces récepteurs sont, en principe, utilisables *quelles que soient les longueurs d'onde* et peuvent être rendus très sensibles; ils peuvent par exemple détecter un rayonnement transportant une puissance inférieure au milliardième de watt.

A ce type de récepteurs appartient la **pile thermoélectrique**, dont la figure 12 donne le principe.

Le **radiomètre** (fig. 11) est aussi un récepteur thermique. Le moulinet, léger et très mobile, comporte des palettes de mica, *noircies* sur une face; l'atmosphère de l'ampoule est très raréfiée (pression de quelques centièmes de mm de mercure). Les faces noircies, absorbant davantage le rayonnement incident, prennent une température un peu supérieure à celle des faces brillantes; il en résulte que les molécules gazeuses résiduelles s'agitent plus rapidement au voisinage de ces faces et, par suite, exercent sur elles une pression un peu plus forte qui explique le mouvement de rotation et son sens.

Signalons que certaines **cellules photoconductrices au germanium**, refroidies à très basse température, sont sensibles à des radiations

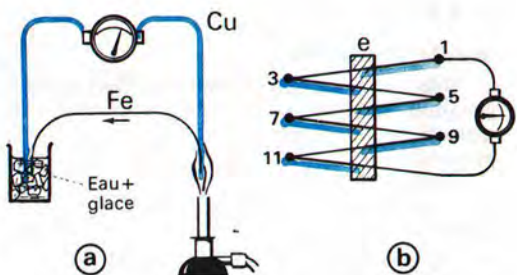


Fig. 12. — La pile thermoélectrique.

a) **Le principe.** — Deux fils de métaux différents (par exemple cuivre et fer) sont soudés l'un à l'autre à leurs deux extrémités. Si l'une des soudures s'échauffe pendant que l'autre reste froide, une **force électromotrice thermoélectrique E** prend naissance dans le circuit et y produit un courant décelable au galvanomètre; la f. é. m. E est fonction de la différence de température entre les soudures. b) **La pile thermoélectrique employée dans l'étude des radiations.** — Plusieurs couples thermoélectriques sont associés en série; toutes les soudures paires sont placées derrière un petit écran noirci e qui capte l'énergie rayonnante et s'échauffe, alors que les soudures impaires restent pratiquement à la température ambiante.

infrarouges dont la longueur d'onde atteint une dizaine de microns.

d. — Les applications de l'infrarouge.

Elles découlent surtout du caractère *sélectif* de l'absorption de la lumière par la matière.

Citons à titre d'exemples :

— **L'échauffement des serres vitrées :** Le verre, étant transparent pour les radiations visibles et le proche infrarouge, se laisse traverser par la majeure partie du rayonnement solaire, qui peut alors être utilisé à l'assimilation chlorophyllienne des plantes vertes et à l'échauffement de la terre. Comme celle-ci ne rayonne que de l'infrarouge de grande longueur d'onde pour lequel le verre est opaque, l'énergie rayonnante captée pendant le jour demeure pratiquement prisonnière et maintient dans la serre une température plus élevée qu'à l'extérieur.

— **L'emploi d'une petite cuve d'eau** pour arrêter la plus grande partie de l'infrarouge qui accompagne nécessairement les radiations visibles émises par l'arc ou la lampe d'un **appareil de projection**. De cette façon, un échauffement nuisible des clichés ou des films est évité.

— **La photographie dans l'obscurité**, grâce aux plaques spéciales sensibilisées pour l'infrarouge. Du fait que la brume se laisse beaucoup mieux traverser par le très proche infrarouge que par la lumière visible, ces mêmes plaques photographiques « infrarouges » permettent aussi d'obtenir des **photographies d'objets très éloignés** (100 km).

— **Les fours à infrarouge**, qui utilisent le fait qu'un faisceau infrarouge n'apporte de chaleur que là où il est

absorbé et, par suite, permet d'échauffer les corps *localement*, et même *en profondeur*, dans le cas de substances peu absorbantes. C'est ainsi, par exemple, qu'on sèche maintenant, très rapidement et économiquement, des peintures et vernis de carrosseries d'automobiles, des matières explosives, des denrées alimentaires (pâtes, biscuits...), des produits chimiques et pharmaceutiques, des textiles, du bois, etc.

— Pour terminer, signalons les *applications médicales* utilisant l'échauffement des régions irradiées.

10. L'ultraviolet.

a. — La production.

Les radiations ultraviolettes qui accompagnent les radiations visibles et infrarouges émises par des corps *incandescents* tels que le filament d'une ampoule électrique ou les charbons d'un arc électrique ne transportent qu'une très faible fraction de l'énergie rayonnée. Aussi produit-on généralement de l'ultraviolet au moyen d'une *lampe lumineuse à vapeur de mercure et ampoule de quartz*, qui émet près de 10 % de la puissance totale rayonnée sous forme de radiations ultraviolettes dont les longueurs d'onde sont comprises entre 0,4 et 0,2 μ .

b. — L'absorption, la réception et les applications de l'ultraviolet.

Le *verre*, absorbant les radiations de longueurs d'onde inférieures à 0,36 μ , est *pratiquement opaque à tout l'ultraviolet*; c'est pourquoi l'ampoule des lampes à vapeur de mercure ainsi que les lentilles et les prismes destinés à l'étude de l'ultraviolet sont généralement en *quartz*, transparent jusqu'aux environs de 0,2 μ .

Notons que le *verre de Wood*, verre noir à base d'oxyde de nickel, absorbe au contraire toutes les radiations visibles et infrarouges, ne laissant pratiquement passer que du proche ultraviolet (*lumière noire de Wood*).

L'*atmosphère* filtre le rayonnement solaire en absorbant l'ultraviolet de courtes longueurs d'onde ($\lambda < 0,29 \mu$); cette absorption est due à la présence d'*ozone* (O_3) dans la haute atmosphère.

L'énergie rayonnante captée par la matière qui absorbe l'ultraviolet peut, beaucoup plus fréquemment que dans le cas de l'infrarouge, apparaître sous une forme autre que l'énergie calorifique; en particulier, elle se transforme :

— En *énergie électrique* dans les **cellules photoélectriques**; nous verrons en effet que, de toutes les « lumières », l'ultraviolette est celle qui produit le plus aisément l'effet photoélectrique (chap. 27; § 6).

— En *énergie chimique* dans beaucoup de **réactions photochimiques** : citons la synthèse

du *chlorure d'hydrogène* ($H_2 + Cl_2 \longrightarrow 2 HCl$), de l'*ozone* ($3O_2 \longrightarrow 2O_3$), les *photosynthèses réalisées par les plantes vertes* et l'*impression des émulsions photographiques ordinaires*, qui sont très sensibles aux radiations violettes et ultraviolettes. Aussi, **la plaque photographique est-elle le récepteur le plus utilisé dans l'étude de l'ultraviolet.**

— En *énergie rayonnante de radiations visibles*, par le phénomène de **fluorescence**. Irradiées avec de l'ultraviolet, beaucoup de substances deviennent fluorescentes : citons le platino-cyanure de baryum (fig. 10), la fluorescéine (fig. 13), le sulfate de quinine, les sels d'uranium, etc.

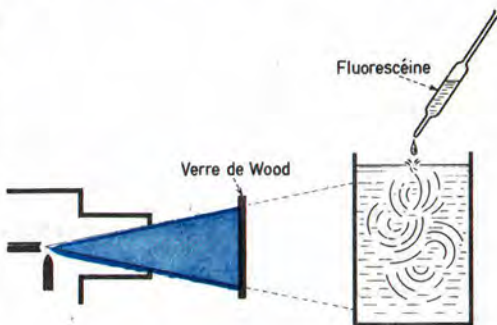


Fig. 13. — L'excitation de la fluorescence par l'ultraviolet.

Le verre de Wood intercepte pratiquement toute la lumière de l'arc à l'exception du proche ultraviolet (lumière « noire »).

Dans une salle obscure la cuve d'eau est à peine visible, mais une addition de fluorescéine y fait apparaître des volutes verdâtres.

De même, des corps fluorescents, placés derrière le verre de Wood, s'illuminent de teintes diverses.

De là, des effets de couleurs vives obtenus en « lumière noire », au cours de certains spectacles, et aussi une technique de *contrôle de produits commerciaux* fondée sur le fait que des substances ayant même aspect à la lumière ordinaire (par exemple, le talc et l'oxyde de zinc, l'huile d'olive et l'huile d'arachide) prennent, par fluorescence en lumière noire, des colorations très différentes.

c. — L'effet biologique de l'ultraviolet.

Les cellules vivantes, en particulier les cellules microbiennes, sont très sensibles au rayonnement ultraviolet; les radiations de longueurs

d'onde inférieures à $0,29 \mu$ en provoquant la destruction, d'où l'emploi de lampes à vapeur de mercure et ampoules de silice pour stériliser l'eau.

Ce qui reste de l'ultraviolet solaire, après absorption par l'ozone atmosphérique, est encore très actif : il provoque la pigmentation de la peau, des brûlures graves (consécutives à certains coups de Soleil) et des ophtalmies pouvant amener la cécité. Signalons que c'est à

l'opacité du verre pour l'ultraviolet que les tubes luminescents à vapeur de mercure, utilisés de plus en plus pour l'éclairage, doivent d'être sans danger pour nos yeux et notre peau.

L'ultraviolet n'a cependant pas que des inconvénients : il provoque en effet, dans nos tissus superficiels, la synthèse d'une substance (analogue à la vitamine D) nécessaire à l'édification du squelette. Sans l'ultraviolet solaire, nous serions tous rachitiques.

EXERCICES

I. — EXERCICES RÉSOLUS

1. Le spectre cannelé.

Dans un dispositif interférentiel à franges non localisées, éclairé en lumière blanche, l'écartement des sources S_1 et S_2 est $a = 1 \text{ mm}$ et le plan d'observation E est à une distance $d = 1 \text{ m}$ de ces sources (fig. 4). On demande de calculer les longueurs d'onde qui correspondent aux cannelures du spectre fourni par un spectroscopie dont la fente est à 6 mm de la frange centrale.

Les longueurs d'ondes cherchées sont celles des radiations qui forment une frange noire sur la fente du spectroscopie, c'est-à-dire pour lesquelles l'abscisse $x = 6 \text{ mm}$ correspond à une différence de marche $\left(\Delta = \frac{ax}{d}\right)$ égale à un multiple impair de $\lambda/2$:

$$\frac{ax}{d} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}; \quad \text{d'où :}$$

$$\lambda = \frac{1}{2k + 1} \cdot \frac{2ax}{d}$$

Dans le cas présent :

$$x = 6000 \mu; \quad \frac{d}{a} = 1000; \quad \frac{2ax}{d} = 12 \mu.$$

Or, toute longueur d'onde du spectre visible est telle que :

$$0,4 < \lambda < 0,8 \mu.$$

Le nombre entier k doit donc satisfaire à la double inégalité :

$$0,4 < \frac{12}{2k + 1} < 0,8$$

$$15 > k > 7.$$

Ce qui donne, pour les longueurs d'onde des radiations éteintes dans le spectre cannelé :

k	$\lambda = \frac{12}{2k + 1} \mu$
14	0,414 μ
13	0,444 μ
12	0,480 μ
11	0,522 μ
10	0,571 μ
9	0,632 μ
8	0,706 μ

2. Le déplacement des franges.

Si l'on dispose sur le trajet de l'un des faisceaux (fig. 14) une lame transparente très mince, à faces parallèles, on constate que tout le système de franges d'interférences se déplace parallèlement à lui-même, du côté de la lame.

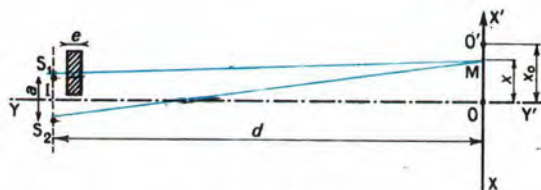


Fig. 14.

Étudions ce phénomène en supposant que la lumière de la source est *monochromatique*. Soit e l'épaisseur de la lame, n son indice de réfraction pour la longueur d'onde de la radiation utilisée. Proposons-nous de calculer le déplacement des franges :

Si V est la célérité de la lumière dans la substance de la lame, la durée du trajet de la lumière dans la lame est :

$$t = \frac{e}{V}$$

Dans le même temps, la distance que parcourrait la lumière dans l'air serait, si V_a désigne la vitesse de la lumière dans l'air :

$$e' = V_a t = \frac{V_a}{V} e$$

Comme le rapport $\frac{V_a}{V}$ des célérités de la lumière dans l'air et dans la lame mesure l'indice de réfraction n de la lame par rapport à l'air, il vient :

$$e' = ne$$

La lame a le même effet qu'un *allongement du trajet* S_1M , d'une valeur :

$$e' - e = ne - e = (n - 1)e$$

Pour le point M, d'abscisse x (fig. 14), tout se passe donc comme si la différence de marche $\Delta = \frac{ax}{d}$ avait diminué de $(n - 1)e$ et était devenue :

$$\Delta = \frac{ax}{d} - (n - 1)e$$

Comme la variation de Δ est $(n - 1)e$ pour tous les points du plan d'observation E, toutes les franges subissent la même translation. Pour préciser celle-ci, il suffit donc de calculer le déplacement $x_0 = 00'$ de la frange centrale, pour laquelle la différence de marche est toujours nulle :

$$\Delta = 0 = \frac{ax_0}{d} - (n - 1)e$$

d'où :

$$x_0 = \frac{(n - 1)ed}{a}$$

Par exemple, si $\frac{d}{a} = 1\,000$, $n = 1,5$ et $e = 0,01$ mm, la translation des franges vaut :

$$x_0 = 0,5 \times 0,01 \times 1\,000 = 5 \text{ mm}$$

La mesure de ce déplacement, de l'ordre d'une dizaine d'interfranges, peut conduire à la détermination de l'indice n de la lame.

Cette méthode a été utilisée pour mesurer l'indice absolu N des gaz ; comme N est alors très voisin de 1 (1,000293 pour l'air dans les conditions normales de température et de pression), on n'obtient une translation mesurable que si l'épaisseur de gaz traversée est grande, de l'ordre des décimètres (exercice n° 7, fig. 15).

II. — EXERCICES PROPOSÉS

1. Une radiation a pour longueur d'onde dans le vide : $\lambda_0 = 5\,000 \text{ Å}$; calculer sa période, sa fréquence, sa célérité dans un verre d'indice $n = 1,5$ pour cette radiation et sa longueur d'onde dans ce verre ($c \approx 300\,000 \text{ km/s}$).

Rép. : $T = 1,67 \times 10^{-15} \text{ s}$; $\nu = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$; $V \approx 200\,000 \text{ km/s}$; $\lambda \approx 0,333 \mu$.

2. Quel serait le retard infligé à un signal lumineux par la traversée, de bout en bout, d'une baguette de verre d'indice $n = 1,5$ et de 3 m de longueur ?

Rép. : $5 \times 10^{-9} \text{ s}$.

3. On place une fente lumineuse S très fine, parallèlement à l'arête A du dièdre formé par deux miroirs de Fresnel (fig. 1), à 80 cm de cette arête :

1° Quel doit être l'angle α des miroirs pour que la distance a des sources virtuelles S_1 et S_2 soit 1 mm ?

2° Si la fente émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu$, que vaut l'interfrange dans un plan E à 20 cm de l'arête A ? (1 minute $\approx 3 \times 10^{-4}$ radian).

4. Les angles A et A' d'un biprisme (fig. 5) valent 20 minutes et son indice, pour la radiation employée ($\lambda = 0,5 \mu$), est $n = 1,5$. La source S est à 30 cm du biprisme et le plan d'observation E à 1,50 m de celui-ci. Calculer :

1° La distance a des sources virtuelles S_1 et S_2 ;

2° La largeur, sur E, du champ d'interférence ;

3° L'interfrange i (1 minute $\approx 3 \times 10^{-4}$ radian).

Rép. : 1° $a = 1,8 \text{ mm}$; 2° $l = 9 \text{ mm}$; 3° $i = 0,5 \text{ mm}$.

5. Une source monochromatique S éclaire deux fentes fines S_1 , S_2 parallèles, distantes l'une de l'autre de 3 mm et distantes de S de 50 cm (fig. 7). La source est sur la perpendiculaire au plan de S_1S_2 et est équidistante de S_1 et S_2 . On observe des interférences sur un écran E placé à $d = 3 \text{ m}$ du plan de S_1S_2 ; on compte 6 franges brillantes de part et d'autre de la frange centrale O, occupant dans leur ensemble une longueur $l = 7,2 \text{ mm}$.

1° Calculer la longueur d'onde λ de la radiation émise par S.

2° Avec quelle approximation connaît-on λ , sachant qu'on a mesuré l et S_1S_2 à 1/10 mm près, et d à 1 cm près ?

3° On déplace S de 2,5 mm vers le haut de la figure ; de combien et dans quel sens se déplace la frange centrale ?

4° On ramène celle-ci à sa position primitive O en plaçant devant l'une des deux fentes une lame à faces planes et parallèles, d'indice $3/2$: où doit-on la mettre ? Quelle épaisseur convient-il de lui donner ?

5° On supprime les fentes S_1, S_2 ; dans leur plan on place un biprisme de Fresnel d'indice $3/2$. Quel angle A faut-il lui donner pour conserver l'interfrange précédent?

(Bacc.).

6. Une lentille mince convergente, de distance focale 50 cm, est coupée en deux parties égales par un plan passant par l'axe principal. Une fente lumineuse S très fine est située dans ce plan et disposée parallèlement à la ligne de séparation des deux moitiés de la lentille. Son milieu est sur l'axe principal, à 1 m de la lentille (fig. 6). Elle émet une radiation monochromatique :

1° De quelle longueur doit-on écarter les deux moitiés de la lentille, symétriquement de part et d'autre de l'axe, pour obtenir deux images, S_1 et S_2 , éloignées de 4 mm l'une de l'autre?

Cette opération étant effectuée, on considère un plan E , normal à l'axe, à 3 m des sources S_1, S_2 . Quelle est la largeur de la région de ce plan où l'on peut observer des franges d'interférences? On mesure la distance du milieu d'une frange brillante au milieu de la vingtième frange brillante à droite (ou à gauche) de celle dont on est parti; on trouve 8,19 mm. Quelle est la longueur d'onde de la radiation utilisée?

2° On place devant l'une des sources (S_1 ou S_2), une lame de verre d'épaisseur 0,008 mm et d'indice 1,5 pour la radiation monochromatique considérée :

Quels sont le sens et la valeur de la translation subie par le système de franges?

3° On enlève la lame de verre et on éclaire maintenant la fente lumineuse S avec une source émettant toutes les radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre 0,650 μ et 0,410 μ :

Quelles sont les longueurs d'onde de celles de ces radiations qui donnent une frange obscure dans le plan d'observation précédent en un point A écarté de 3 mm de l'axe?

On dispose la fente d'un spectroscopie sur la frange centrale, puis on la déplace parallèlement à elle-même jusqu'en A . Quels changements observe-t-on dans l'aspect du spectre?

(Bacc.).

Rép. : 1° 2 mm; 10 mm; $\lambda = 0,546 \mu$; 2° 3 mm; 3° 0,421 μ ; 0,471 μ ; 0,533 μ ; 0,615 μ .

7. On réalise le dispositif classique d'Young : une fente fine S , éclairée par la lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0,5893 \mu$, est placée à égale distance de deux fentes fines S_1 et S_2 , parallèles entre elles et à S , percées dans un écran e et dont l'écartement est 1 mm (fig. 15).

1° On observe des franges d'interférence sur un écran E , parallèle à e et situé à 2 m de celui-ci. Quelle est la valeur de l'interfrange?



Fig. 15.

2° On introduit sur le trajet du faisceau issu de S_1 un tube fermé par deux glaces plan-parallèles A et B , de dimensions telles qu'elles soient aussi traversées par les rayons provenant de S_2 .

a) Le tube T étant en communication avec l'extérieur, qu'observe-t-on sur l'écran E ?

b) On fait le vide dans le tube T . Que devient le système de franges précédent?

c) La longueur du tube T étant de 20 cm, à 1 mm près, déterminer la valeur de l'indice absolu de l'air dans les conditions de l'expérience, sachant que, pendant le pompage, on a vu défiler 99 franges brillantes au centre O de la figure d'interférences initiale et que, l'opération terminée, on observe en ce point une frange sombre.

Avec quelle précision cet indice est-il déterminé, sachant qu'on apprécie la position des franges à $1/4$ d'interfrange près?

3° On substitue au monochromateur une source de lumière blanche et à l'écran E la fente d'un spectroscopie, placée en O parallèlement aux fentes S_1 et S_2 . Le vide ayant été fait dans le tube T , qu'observe-t-on dans le spectroscopie?

On admettra que l'indice de réfraction de l'air a la même valeur pour toutes les radiations. Limites du spectre visible : 0,4 et 0,8 μ .

(Bacc.).

8. Un biprisme de Fresnel (fig. 5) est constitué par deux prismes identiques d'angle $A = 0,01$ radian, l'indice de réfraction $n = 1,5$. Ils donnent deux images nettes, F_1 et F_2 , d'une fente, F , très fine disposée à 20 cm des prismes parallèlement à leurs deux arêtes, dans le plan de la base commune.

1° La base commune, B , des prismes ayant une épaisseur négligeable, faire un schéma dans un plan de section principale, montrant les régions où pourront apparaître des interférences. Sur quelle largeur $2x_0$ les interférences se manifesteront-elles sur un écran E , perpendiculaire à FB et placé à 180 cm des prismes?

2° La fente F étant éclairée par une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,6$ micron, décrire les franges qui apparaissent sur l'écran précédent; calculer l'interfrange et le nombre total, N , des franges noires qu'il contient.

3° La fente F est éclairée en lumière blanche.

a) Décrire l'aspect des franges.

b) Calculer en fonction de x le rapport des intensités lumineuses des radiations orangée ($\lambda = 0,6$ micron) et violette ($\lambda' = 0,4$ micron) au point M , de l'écran, situé à une distance x mm de la frange centrale. (On rappelle que l'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration résultante en M .)

Déterminer ce rapport pour $x = 7,2$ mm et $x = 0,24$ mm.

c) Établir une formule simple permettant de déterminer à quelles distances de la frange centrale la radiation orangée est manquante.

d) Soit L le point de l'écran situé à 3,3 mm de la frange centrale. Calculer les longueurs d'ondes pour lesquelles l'intensité lumineuse est nulle en ce point dans le spectre visible (on admettra pour ces limites 0,4 et 0,75 micron).

4° On recouvre la face de l'un des prismes consti-

tuant le biprisme (cette face étant supposée perpendiculaire à la base commune) par un film transparent à faces parallèles dont l'indice est $n' = 1,6$. La frange centrale se déplace d'une distance $d = 6,72$ mm. Pourquoi ? Dans quel sens se fait ce déplacement ? Quelle est l'épaisseur e du film ? Avec quelle approximation connaît-on e , sachant qu'on a mesuré F_1F_2 et le déplacement d à 0,01 mm près et la distance de F à l'écran à 1 cm près ?

Rép. : 1° 1,8 cm ; 2° 0,6 mm ; $N = 30$;
 3° b) $I/I' = \frac{\cos \pi \frac{ax}{\lambda d}}{\cos \pi \frac{ax}{\lambda' d}}$;

$I/I' = 1$ dans les deux cas ; c) $x = (2k + 1) 0,3$ mm ;
 d) 0,44 μ ; 0,6 μ ; 0,508 μ ; 0,733 μ ; 4° 11,2 μ ; 1,2 %

9. Une lentille mince, convergente et achromatique de 0,6 m de distance focale et de diamètre 60 mm est sciée diamétralement selon un plan P contenant l'axe principal Δ . Une fente lumineuse très fine, S , située dans P , est disposée parallèlement au diamètre de séparation des deux moitiés de la lentille. Le milieu de la fente est sur Δ , à 1,2 m de la lentille. On imprime alors aux deux moitiés de la lentille une translation perpendiculaire à P de telle sorte que leurs centres optiques, O_1 et O_2 , se séparent, soient symétriques par rapport à P et distants de 2 mm.

1° Dessiner soigneusement, le plan P étant perpendiculaire au plan de la figure, la marche des rayons

lumineux issus du milieu de S et qui passent par les centres optiques et les bords de la bilentille. Calculer la distance, au plan de la bilentille, des images S_1 et S_2 de S données par le système ; calculer $S_1S_2 = a$.

2° a) La lumière émergente est reçue sur un écran perpendiculaire à Δ coupant Δ en E . Soit E_1 la position de E au-delà de laquelle on pourra observer des franges d'interférences sur l'écran et en deçà de laquelle on ne pourra pas.

Représenter E_1 sur le schéma.

b) Soit E_2 la position de E telle que, de E_1 à E_2 , la largeur totale $2l$, couverte sur l'écran par les franges, varie proportionnellement à la distance E_1E et telle qu'au-delà de E_2 cette largeur varie proportionnellement à une autre distance.

Calculer $D_2 = S'E_2$, S' étant le milieu de S_1S_2 .

3° E est situé maintenant au-delà de E_2 . S émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde λ , calculer le nombre N de franges brillantes observables sur l'écran, en fonction de $D = S'E$, de $SS' = D'$ de a et de λ .

Application numérique : $D = 2,4$ m ; $\lambda = 0,6 \mu$.

4° S émet maintenant de la lumière blanche ; on laisse l'écran à $D = 2,4$ m. Devant S_1 est placée une lame transparente mince d'épaisseur uniforme e et d'indice n ; devant S_2 , une lame de même indice et d'épaisseur $e + \Delta e$. La frange centrale blanche est déplacée de x parallèlement à elle-même.

Expliquer brièvement le phénomène et montrer que ce dispositif permet de déterminer Δe .

Application numérique : $x = 0,15$ mm. $n = 1,50$.

(Bacc.)

LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE

A. LA POLARISATION PAR RÉFLEXION

1. La lumière naturelle présente la symétrie de révolution autour de sa direction de propagation.

Un pinceau SI' de lumière naturelle, émis par un arc électrique, tombe sur la face antérieure d'une lame de verre M' (fig. 1). Le pinceau réfléchi rencontre l'écran diffusant E , perpendiculaire à la direction SI' , et en éclaire la petite portion de surface σ .

Faisons tourner le miroir M' autour de la droite SI' qui définit la direction de propagation de la lumière naturelle incidente. L'angle d'incidence et, par suite, l'angle de réflexion restant constants, le centre de σ décrit sur l'écran E une circonférence dont le centre est l'intersection J de SI' et du plan E .

Nous constatons que l'éclairement de la tache σ ne varie pas au cours de la rotation; c'est la preuve que la lumière naturelle

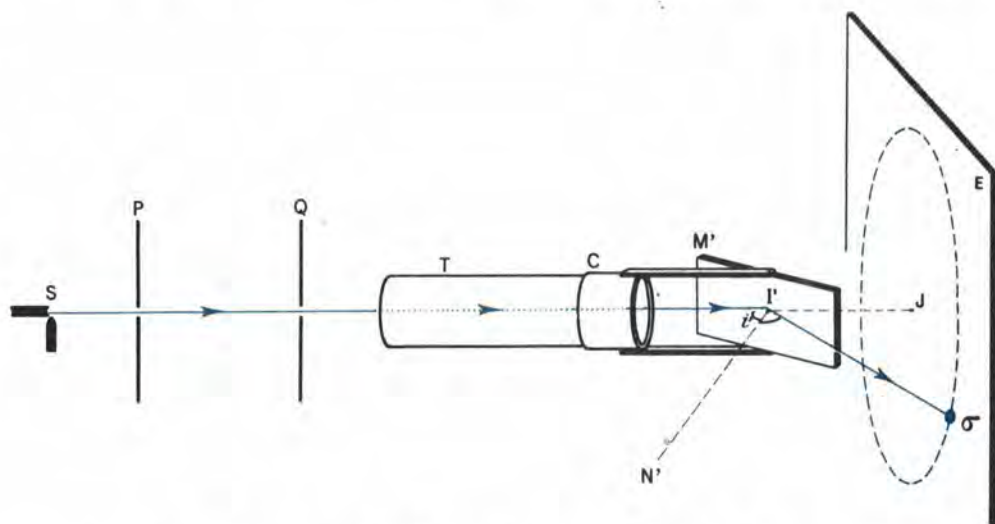


Fig. 1. — La symétrie de révolution d'un pinceau de lumière naturelle.

Les deux diaphragmes P et Q isolent un pinceau cylindrique de lumière naturelle (c'est-à-dire telle que l'émet la source, constituée ici par un arc électrique).

Le miroir de verre M' est noirci dans sa masse pour absorber la lumière réfractée.

Le collier C, sur lequel est fixé le miroir, peut tourner autour du tube T.

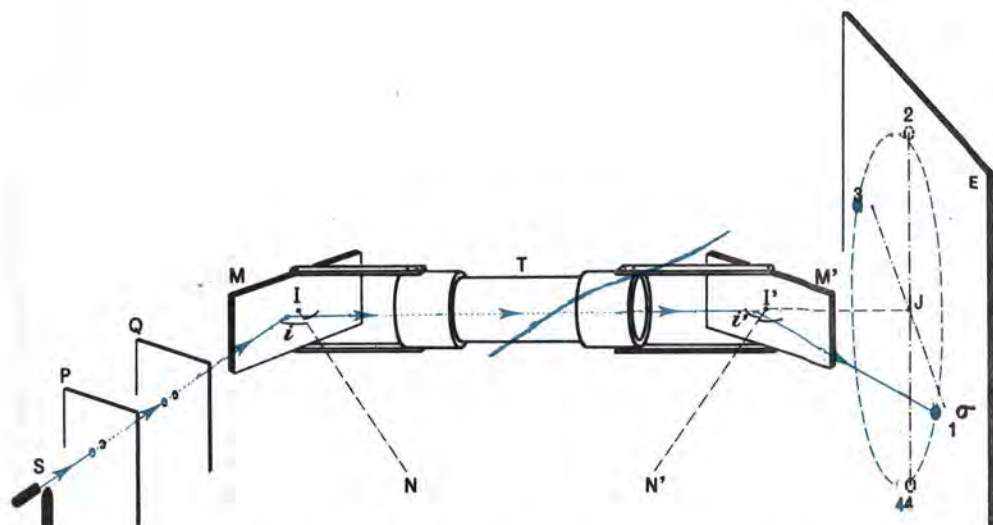


Fig. 2. — L'analyse de la lumière polarisée par réflexion vitreuse.

présente la symétrie de révolution autour de sa direction de propagation. Cette propriété est générale : la lumière émise par une source quelconque, dans un milieu transparent, homogène et isotrope, a la symétrie de révolution autour de sa direction de propagation.

Nous allons voir qu'une réflexion de la lumière naturelle sur la surface de séparation de deux milieux transparents homogènes et isotropes (réflexion dite **vitreuse**) lui fait perdre cette symétrie.

2. La lumière qui a subi une réflexion vitreuse est polarisée.

a. — Re commençons l'expérience en faisant arriver cette fois, sur le miroir M', un pinceau lumineux II' ayant subi une première réflexion vitreuse en I, sur un miroir M identique à M' (fig. 2). En laissant M fixe et en faisant tourner M' autour de l'axe II' nous observons que l'éclairement de la tache σ varie de façon continue et présente

— un **maximum** dans les positions 1 et 3 pour lesquelles les deux plans d'incidence SIN et II'N' sont **parallèles** ;

— un **minimum** dans les positions 2 et 4 pour lesquelles ces plans d'incidence sont **rectangulaires**.

b. — Si nous donnons aux angles d'incidence i et i' des **valeurs égales, voisines de 57°** , l'éclai-

rement devient **nul** pour les positions 2 et 4, preuve que, dans ces conditions, la **seconde réflexion en I' éteint complètement le pinceau lumineux**. Cette valeur remarquable des angles d'incidence — que l'on trouve par tâtonnement — est dite **incidence brewstérienne**, du nom du physicien anglais Brewster qui en a découvert le premier la propriété.

c. — Les faits observés montrent qu'une **réflexion vitreuse fait perdre à la lumière la symétrie de révolution** autour de sa direction de propagation ; la lumière réfléchie n'est plus de la lumière naturelle : elle est dite **polarisée**.

Le miroir M, qui polarise la lumière naturelle, est un **polariseur**. Le miroir M', qui permet de mettre en évidence la polarisation de la lumière qu'il reçoit, est un **analyseur**.

Dans le cas de l'incidence brewstérienne, la polarisation est **complète** ; par contre, on dit que la polarisation n'est que **partielle** lorsque les deux minimums d'éclairement observés au cours d'une rotation complète de l'analyseur ne sont pas **nuls**.

Remarques sur l'incidence de Brewster.

1° L'angle d'incidence i , pour lequel la réflexion sur un corps isotrope tel que le verre polarise **complètement** la lumière naturelle, satisfait à la relation :

$$\tan i = n$$

n désignant l'indice de réfraction du corps par rapport à l'air.

Pour le verre ordinaire, l'indice étant $n \approx 1,54$, la relation ci-dessus donne $i \approx 57^\circ$, valeur indiquée plus haut comme étant celle que fournit l'expérience.

On sait que l'indice n de réfraction varie un peu d'une radiation à l'autre — il augmente progressivement du rouge au violet — mais la variation de l'incidence brewstérienne qui en résulte est trop faible pour être gênante de sorte que l'on peut employer la lumière blanche dans les expériences de polarisation.

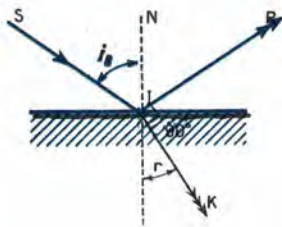


Fig. 3.

2° A tout rayon incident SI (fig. 3) correspond un rayon réfléchi IR et un rayon réfracté IK. Si r désigne l'angle de réfraction, il satisfait à la relation de Descartes :

$$\sin i = n \sin r$$

Dans le cas de l'incidence de Brewster, on a de plus :

$$\operatorname{tg} i = n; \text{ ou : } \sin i = n \cos i$$

D'où : $\sin r = \cos i$ et, par suite :

$$r = 90^\circ - i$$

On en déduit que, pour l'incidence brewstérienne, le rayon réfléchi est perpendiculaire au rayon réfracté.

3° Si la réflexion de la lumière naturelle a lieu sur une surface argentée ou aluminée (réflexion dite *métallique*), la polarisation n'est jamais que *partielle*; d'ailleurs, dans ce cas, il n'y a plus réfraction.

3. La loi de Malus (¹).

L'éclairement de la tache σ que forme sur l'écran E le pinceau réfléchi par l'analyseur M' (fig. 2) varie comme l'intensité I de la lumière de ce pinceau. Dans le cas de l'incidence brewstérienne l'expérience précédemment décrite montre que, au cours de la rotation de l'analyseur, cette intensité varie de façon continue.

Désignons par I_0 l'intensité maximale, lorsque les deux plans d'incidence SIN et II'N' sont parallèles :

Le rapport $\frac{I}{I_0}$ de l'intensité I , qui correspond à une valeur quelconque α de l'angle des deux

plans d'incidence, à l'intensité maximale I_0 , peut être mesuré avec une cellule photoélectrique. On trouve, conformément à la loi de Malus, qu'il est proportionnel au carré du cosinus de l'angle α :

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2 \alpha$$

Remarque :

Dans une réflexion vitreuse, la plus grande partie de la lumière du pinceau incident passe dans le pinceau réfracté, de sorte que l'intensité du pinceau réfléchi ne représente en général qu'une très faible fraction de l'intensité du pinceau incident (¹). Par suite, s'il est vrai qu'un miroir de verre fournit très facilement de la lumière complètement polarisée, il est trop peu « lumineux » pour servir de polariseur dans les travaux de laboratoire qui exigent l'emploi de lumière polarisée.

4. L'interprétation de la polarisation de la lumière.

a. — L'interprétation des interférences lumineuses nous a conduits à considérer une radiation lumineuse comme une vibration sinusoïdale représentée par une fonction de la forme :

$$V = a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right)$$

Pour expliquer le phénomène de la polarisation de la lumière il faut admettre, de plus, que les vibrations lumineuses sont transversales, c'est-à-dire qu'en tout point d'un rayon lumineux, la grandeur sinusoïdale V est la

valeur algébrique d'un vecteur $\vec{V}$ perpendiculaire au rayon lumineux (²).

Considérons en effet le cas simple d'une lumière monochromatique subissant en I une réflexion vitreuse sous l'incidence brewstérienne

i (fig. 4). Si le « vecteur lumineux » $\vec{V}$ qui représente la vibration lumineuse en tout point du rayon réfléchi II' n'était pas transversal, il aurait, suivant ce rayon, une composante sur laquelle la rotation de l'analyseur autour de la direction II' n'aurait aucune influence, de sorte qu'on n'observerait jamais l'extinction du rayon

(¹) Cette fraction dépend de l'angle d'incidence et de la substance réfléchissante; elle est de l'ordre de 8 % pour le verre ordinaire et l'incidence brewstérienne.

(²) Quant à la nature de ce vecteur $\vec{V}$, il n'est pas nécessaire de la connaître pour interpréter la polarisation. (Voir la lecture en fin de chapitre).

(¹) Malus, physicien français (1775-1812), a découvert la polarisation de la lumière en observant la réflexion sur une vitre du palais du Luxembourg.

I'R, quelle que soit la valeur de l'incidence sur l'analyseur.

b. — Il reste maintenant à préciser la direction du vecteur lumineux dans tout plan perpendiculaire au rayon.

1° En ce qui concerne la lumière naturelle, la symétrie de révolution autour de la direction de propagation montre que toutes les directions sont équivalentes. Cette constatation embarrassante a suggéré diverses hypothèses : disons seulement qu'aucune explication simple, basée par exemple sur une analogie avec les vibrations transversales des solides, n'est compatible avec ce que l'on sait aujourd'hui des phénomènes complexes qui sont à l'origine de l'émission de la lumière par les atomes et les molécules des sources lumineuses.

2° Quant à la lumière complètement polarisée, toutes ses propriétés s'interprètent aisément si l'on admet que la direction du vecteur lumineux est au contraire parfaitement déterminée. Des expériences d'interférences réalisées en lumière polarisée ont d'ailleurs montré que cette direction du vecteur lumineux est perpendiculaire au plan d'incidence (SI, IN) du miroir polariseur (fig. 4). Ainsi, en tout point d'un rayon de lumière complètement polarisée, le vecteur lumineux est parallèle à

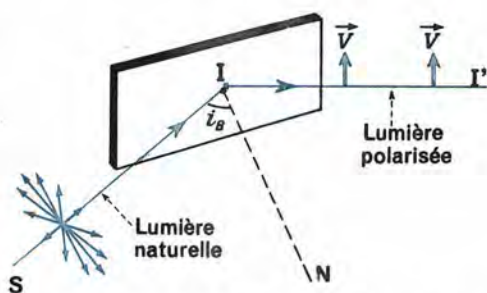


Fig. 4. — La direction du vecteur lumineux le long d'un rayon de lumière naturelle et d'un rayon de lumière polarisée.

une direction fixe perpendiculaire à ce rayon. Pour cette raison, la polarisation totale est encore appelée **polarisation rectiligne**.

Lorsque l'incidence sur le polariseur est différente de l'incidence brewstérienne, la direction du vecteur lumineux, en tout point du rayon réfléchi, n'est pas unique, mais la direction perpendiculaire au plan d'incidence est privilégiée : l'amplitude de la vibration lumineuse est plus grande pour cette direction que pour les autres. Ainsi s'explique le phénomène de polarisation partielle observé dans ce cas.

B. LA POLARISATION PAR DOUBLE RÉFRACTION

5. L'action d'une lame biréfringente sur la lumière naturelle.

Tandis qu'une lame isotrope à faces parallèles, (lame de verre, de plexiglas, d'eau, d'alcool, de benzène,...) donne d'un objet quelconque une image unique, une lame de *spath d'Islande* ⁽¹⁾ fournit deux images du même objet (fig. 5); on dit qu'elle est **biréfringente**.

La biréfringence est une conséquence de l'anisotropie des milieux cristallisés; la plupart des cristaux (sauf les cristaux cubiques) sont biréfringents et l'on peut aussi montrer le phénomène de la double réfraction avec, par exemple, un grand cristal de quartz ou de nitrate de sodium.

Le dédoublement de l'image a son origine dans le fait qu'à tout rayon incident le dioptré air-cristal fait généralement correspondre deux rayons réfractés :

Considérons une lame de spath d'Islande obtenue par clivage d'un grand cristal en forme de parallélépipède oblique (fig. 6); elle possède



Fig. 5. — La double réfraction du spath d'Islande.

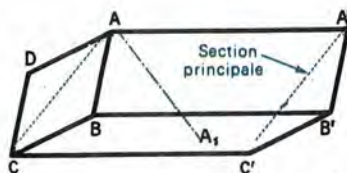


Fig. 6.

⁽¹⁾ Carbonate de calcium (CaCO_3) cristallisé.

un axe de symétrie ternaire AA_1 — appelé **axe optique** — tel qu'une rotation de la lame, autour de cet axe, d'un angle de $\frac{2\pi}{3}$ radians, laisse inchangée l'orientation des faces de la lame. Tout plan perpendiculaire à la face ABCD et parallèle à l'axe optique constitue une **section principale** de la lame.

Si l'on fait arriver sur la face ABCD un pinceau de lumière naturelle formé de rayons normaux à cette face et contenus dans un plan de section principale (fig. 7), on observe deux pinceaux émergents :

1° Un **pinceau ordinaire**, satisfaisant aux lois de la réfraction; l'incidence étant ici normale, on constate en effet qu'il prolonge le pinceau incident;

2° Un **pinceau extraordinaire** qui, au contraire, ne satisfait pas à la seconde loi de Descartes puisqu'il subit un déplacement latéral tout en restant dans le plan de section principal.

En faisant tourner la lame biréfringente autour de la direction d'incidence, sa face d'entrée ABCD demeurant perpendiculaire à cette direction, on voit en effet le pinceau extraordinaire tourner autour du pinceau ordinaire, celui-ci demeurant inchangé.

Ces deux pinceaux émergents ont la même intensité, pratiquement égale à la moitié de l'intensité du pinceau lumineux incident, et l'analyse montre qu'ils sont tous deux **polarisés**

rectilignement suivant des directions rectangulaires. En effet, si l'on place un miroir analyseur M' de façon qu'il réfléchisse les deux pinceaux émergents sous l'incidence brewstérienne, on constate, en le faisant tourner autour de la direction d'incidence, que le pinceau extraordinaire s'éteint quand le plan d'incidence de l'analyseur coïncide avec le plan de section principale (fig. 7-a), et que l'extinction du pinceau ordinaire a lieu au contraire quand ces deux plans sont rectangulaires.

On en déduit que la direction du vecteur lumineux est :

— perpendiculaire au plan de section principale pour un rayon ordinaire;

— dans le plan de section principale pour un rayon extraordinaire (fig. 7-b).

6. Polariseur et analyseur de Nicol.

a. — Polariseur.

L'expérience précédente montre que, pour obtenir de la lumière polarisée rectilignement, on peut avantageusement remplacer le miroir de verre, très peu « lumineux », par une lame biréfringente qui donne des pinceaux polarisés beaucoup plus intenses et de même direction que le pinceau incident.

Cependant, comme la juxtaposition de deux faisceaux émergents polarisés différemment est gênante, on supprime le pinceau ordinaire grâce à l'artifice inventé par le physicien anglais Nicol.

Pour obtenir un **prisme de Nicol** (appelé communément *nicol*), on taille un cristal de spath en forme de parallélépipède oblique assez allongé, on le scie suivant un plan diagonal AC' perpendiculaire à la section principale, puis on recolle les deux parties à l'aide d'une mince couche de baume du Canada (fig. 8).

Un rayon incident SI contenu dans un plan de section principale est dédoublé par le dioptre d'entrée AC en un rayon ordinaire et un rayon extraordinaire. Le baume de Canada étant, pour le rayon ordinaire, un milieu moins réfringent que le spath et l'incidence en K étant supérieure à l'angle de réfraction limite, le rayon ordinaire subit en K une **réflexion totale** qui l'envoie sur la base noircie CC' .

Au contraire, le rayon extraordinaire traverse le baume de Canada et émerge seul du nicol, de sorte que, à tout faisceau lumineux incident, le nicol fait correspondre un faisceau unique de lumière polarisée dont le vecteur lumineux est parallèle à la section principale du nicol.

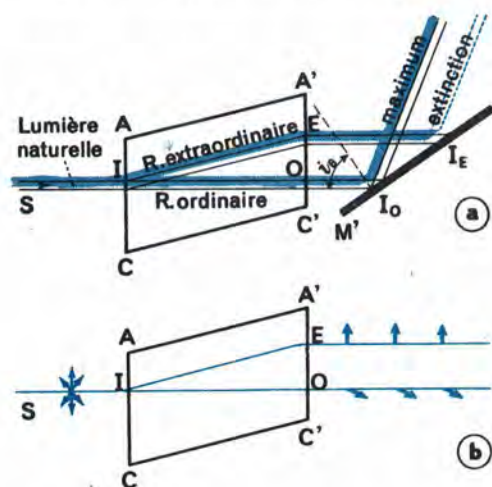


Fig. 7. — Rayon ordinaire et rayon extraordinaire.
a) L'analyse de la lumière transmise par la lame biréfringente.
b) La direction des vecteurs lumineux le long du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire.

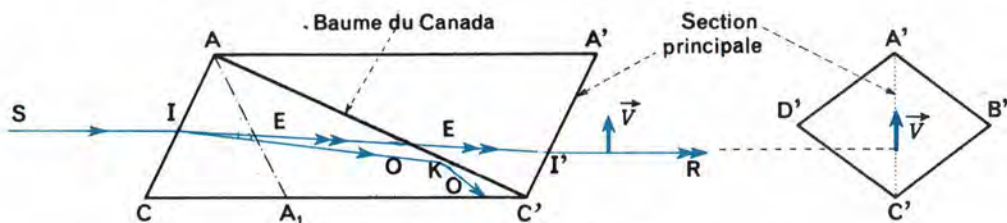


Fig. 8. — Le prisme de Nicol.

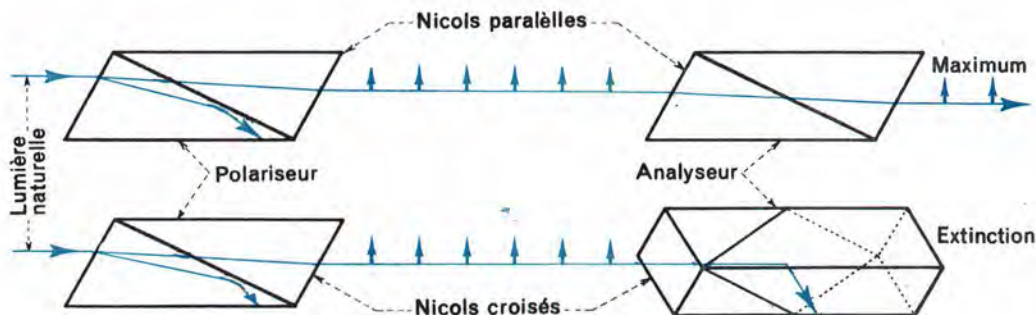


Fig. 9. — L'expérience des deux nicols

b. — Analyseur. Nicols parallèles et nicols croisés.

D'après ce qui précède, un nicol ne transmet que des vibrations lumineuses orientées parallèlement au plan de section principale (encore appelé, *plan de vibration*).

Supposons qu'un faisceau de lumière traverse successivement deux nicols, le premier jouant le rôle de *polariseur*, le second d'*analyseur* (fig. 9) :

— Si les sections principales des deux nicols sont **parallèles**, l'analyseur transmet pratiquement toute la lumière polarisée qu'il reçoit.

— Si les sections principales sont **rectangulaires** (nicols « *croisés* »), il y a au contraire extinction totale de la lumière reçue.

— Enfin, si les sections principales des deux nicols font un angle quelconque α , l'analyseur ne transmet qu'une partie de la lumière qu'il reçoit du polariseur : la partie qui correspond à la composante

$$\vec{V}' = \vec{V} \cos \alpha$$

contenue dans la section principale (fig. 10).

Désignons par I_0 l'intensité de la lumière que reçoit l'analyseur et par I l'intensité de la lumière qu'il transmet lorsque sa section prin-

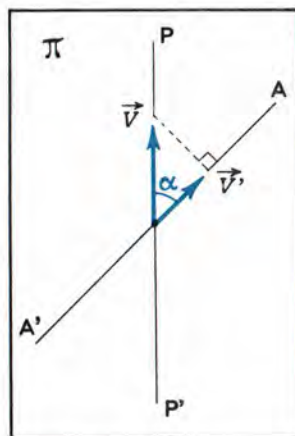


Fig. 10. — L'interprétation des variations de l'intensité de la lumière transmise.

Le plan π est perpendiculaire à la direction des rayons lumineux. Les droites P'P et A'A sont les traces, dans le plan π , des sections principales du polariseur et de l'analyseur.

$\vec{V}$ est le vecteur lumineux qui caractérise la lumière transmise par le polariseur et reçue par l'analyseur ;

$\vec{V}'$ est le vecteur lumineux qui caractérise la lumière transmise par l'analyseur.

cipale fait l'angle α avec celle du polariseur; comme l'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration lumineuse, l'expression ci-dessus de la vibration transmise entraîne :

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

C'est l'expression de la **loi de Malus**.

7. La polarisation par dichroïsme.

Certains cristaux biréfringents colorés ont la propriété d'absorber inégalement les rayons ordinaire et extraordinaire; on dit qu'ils sont **dichroïques**.

C'est ainsi que dans une lame de **tourmaline** (borosilicate d'aluminium, de couleur verdâtre) convenablement taillée, le rayon ordinaire est beaucoup plus affaibli que le rayon extraordinaire. Si l'épaisseur de la lame est de l'ordre du millimètre, le *rayon extraordinaire est seul transmis*, de sorte que la lame peut remplacer un nicol polariseur ou analyseur; elle présente cependant sur celui-ci l'inconvénient d'affaiblir aussi le rayon extraordinaire, et de le colorer.

On emploie beaucoup plus couramment aujourd'hui des lames minces vendues sous le nom de **polaroïds** (fig. 11); elles sont formées de très petits cristaux d'une substance fortement dichroïque ⁽¹⁾, enrobés dans une matière

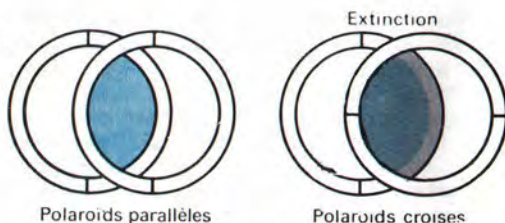


Fig. 11

plastique transparente, et dont tous les axes optiques sont orientés parallèlement.

Les polaroïds ont, sur les nicols, l'avantage d'être moins chers et de pouvoir polariser des faisceaux lumineux beaucoup plus larges (certaines lames ont des faces de plusieurs dm²); cependant, toutes les radiations de la lumière blanche ne sont pas complètement polarisées et deux polaroïds « croisés » laissent tout de même filtrer une faible lumière pourpre.

On préfère donc encore les prismes polariseurs dans les travaux de laboratoire où l'on a besoin de lumières aussi parfaitement polarisées que possible, mais on emploie de plus en plus les polaroïds dans toutes les applications courantes de la polarisation (filtres photographiques, lunettes et pare-brise « anti-reflet » destinés à affaiblir la lumière qu'une réflexion sur le sol, l'eau, la neige... a partiellement polarisée).

⁽¹⁾ Par exemple, l'héraphthite (iodosulfate de quinine).

Polaroïds employés comme polariseur et analyseur

a) Polaroïds parallèles

b) Polaroïds croisés



EXERCICES

1. Quel angle avec le plan horizontal doit faire un pinceau de lumière solaire pour que sa réflexion sur la surface d'une eau tranquille ($n \approx 4/3$) donne de la lumière polarisée rectilignement ? Préciser la direction de vibration de cette lumière polarisée.

Rép. : 37° ; horizontale (perpendiculaire au plan d'incidence).

2. Un pinceau parallèle de lumière naturelle tombe sur une lame de verre sous l'incidence $i = 58^\circ$

et donne de la lumière réfléchie complètement polarisée ; en déduire l'angle de réfraction du pinceau transmis et l'indice du verre.

3. On oriente un polariseur et un analyseur de façon que le système donne le maximum de lumière ; dans quels rapports sera réduite l'intensité de la lumière transmise si l'on fait tourner l'analyseur : 1° de 30° ; 2° de 45° ; 3° de 60° ?

Rép. : $1^\circ 0,75$; $2^\circ 0,5$; $3^\circ 0,25$.

LECTURE

La nature du « vecteur lumineux ».

Jusqu'à la fin du XVIII^e siècle, la théorie de l'Optique universellement admise est la *théorie de l'émission*, soutenue par *Newton* ; elle postule que les corps lumineux émettent des corpuscules immatériels dont le choc sur la rétine détermine les sensations visuelles.

L'Anglais *Thomas Young* (1773-1829), reprenant les idées du Hollandais *Huyghens*, considère le premier la lumière comme un phénomène vibratoire qui se propage par ondes, explique les interférences par la superposition de deux ondes et ébauche l'interprétation des phénomènes de polarisation à partir de la transversalité des vibrations lumineuses.

Mais c'est au savant français *Augustin Fresnel* que revient le mérite de développer, sur ces hypothèses encore controversées, une théorie magistrale de l'Optique ondulatoire dont les conclusions mathématiques, parfaitement vérifiées expérimentalement, demeurent entièrement valables.

Pour Fresnel, « le vecteur lumineux » $\vec{V}$ en un point d'un rayon lumineux est l'élongation d'une particule d'éther, milieu immatériel existant partout, dans le vide comme dans la matière.

Pour l'esprit, cette hypothèse de l'éther n'était guère satisfaisante car ce milieu sans masse devait être doué à la fois d'une rigidité parfaite, pour ne transmettre que des vibrations transversales, et d'une fluidité parfaite, pour que les corps puissent s'y mouvoir sans frottement.

Cinquante ans plus tard (1865), l'Anglais *Maxwell*, dans une remarquable étude théorique basée sur la généralisation des lois de l'électromagnétisme (établies par *Ampère* et *Faraday*), prévoit l'existence d'ondes électromagnétiques ayant la même célérité que la lumière. Il est ainsi amené à penser que les ondes lumineuses sont de nature électromagnétique.

Nous verrons comment *Hertz*, une vingtaine d'années après ces prévisions, amorça une éclatante confirmation de la théorie de *Maxwell* en mettant expérimentalement en évidence les ondes électromagnétiques qui portent son nom ; nous verrons également que la découverte d'une lisière commune aux deux domaines hertzien et infrarouge a aussi pleinement confirmé l'hypothèse de *Maxwell* quant à la nature électromagnétique des ondes lumineuses. Dans le cadre de cette théorie électromagnétique de la lumière, le « vecteur lumineux » s'identifie à un vecteur champ électrique.

ÉLECTRICITÉ ET PHÉNOMÈNES CORPUSCULAIRES

23

LE RAPPEL DE NOTIONS FONDAMENTALES CONCERNANT LE COURANT ALTERNATIF

1. La définition d'un courant alternatif.

a. — On appelle **courant alternatif** un courant électrique **périodique**, qui change de sens deux fois par période et transporte alternativement, dans un sens et dans l'autre, des quantités d'électricité égales.

Un tel courant reprend le même sens et la même intensité à des instants successifs t , $t + T$, $t + 2T$, ..., $t + kT$, séparés par une **période** T .

La **fréquence** du courant (en hertz) est égale au nombre de périodes par seconde :

$$f = 1/T$$

Une **alternance** est l'intervalle de temps séparant deux changements de sens consécutifs du courant; une période comprend donc deux alternances.

b. — Le plus simple des courants alternatifs est le courant **sinusoidal**. Moyennant un choix convenable de l'instant initial $t = 0$, l'intensité d'un courant sinusoidal, à tout instant t , a pour expression :

$$i = I_m \sin \omega t \quad (1)$$

I_m est la valeur absolue de l'intensité **maximale**. ω est la **pulsation** du courant (en rd/s); elle est liée à sa **période** et à sa **fréquence** par les relations habituelles :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

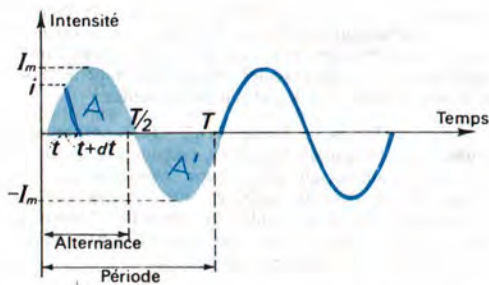


Fig. 1. — Le graphe de l'intensité d'un courant sinusoidal en fonction du temps :

$$i = I_m \sin \omega t = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Une période se divise en deux alternances égales. Entre les instants infiniment voisins t et $t + dt$, la très petite quantité d'électricité transportée ($dq = idt$) est représentée par le trapèze infinitésimal de teinte foncée; il en résulte que la quantité d'électricité qui traverse une section du circuit au cours d'une alternance est représentée par l'aire A ou A' . Comme ces aires sont égales du fait de la symétrie de la sinusoïde, la section considérée est traversée, durant les alternances successives, par la même quantité d'électricité, alternativement dans un sens et dans l'autre.

La relation (1) donne l'intensité instantanée i en grandeur et en signe (fig. 1). Il importe de bien comprendre la signification du signe de i :

On choisit arbitrairement un sens positif de circulation le long du circuit où le courant alter-

natif s'établit; à une valeur *positive* de i correspond un courant circulant dans le sens positif choisi, à une valeur *néga*tive correspond un courant de sens contraire.

Du point de vue électronique, lorsqu'un conducteur métallique est parcouru par un courant sinusoïdal de fréquence f , les *électrons libres* du métal qui traversent chaque section droite du conducteur sont *animés d'un mouvement sinusoïdal de fréquence f* , de direction perpendiculaire à la section et d'amplitude très petite (¹).

c. — En France, les courants alternatifs du réseau de distribution de l'énergie électrique et ceux des installations domestiques et industrielles branchées sur ce réseau sont *pratiquement sinusoïdaux* et ils ont tous la même fréquence, $f = 50$ Hz, imposée par l'E.D.F.; c'est aussi la fréquence du courant alternatif utilisé pour la traction des trains sur certaines lignes de la S.N.C.F.

La période de ces courants est donc $T = 1/50$ s et elle comprend deux alternances *égales*, d'une durée de $1/100$ s.

Le réseau téléphonique emploie des fréquences échelonnées entre 250 et 2 700 Hz. En *radioélectricité*, les fréquences utilisées s'étalent, en nombres ronds, entre 10^5 et 10^{11} Hz (domaine des « hautes fréquences »; chap. 26).

2. L'application au courant alternatif des lois du courant continu.

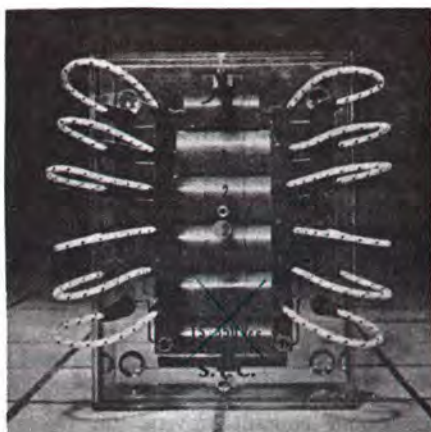
Dans l'étude expérimentale qui va suivre, nous utiliserons le courant alternatif de fréquence 50 Hz fourni par une prise de courant branchée sur le « secteur ». Dans le vaste domaine des courants périodiques, c'est un courant *basse fréquence*; pour un tel courant, on peut admettre que :

1° *L'intensité i est à chaque instant la même dans toutes les sections du circuit;*

2° *Les lois du courant continu s'appliquent à chaque instant au courant alternatif.* Cela revient à admettre qu'un courant variable, d'intensité i à l'instant t , conserve cette intensité entre les instants infiniment voisins t et $t + dt$; il peut donc être considéré comme *constant* durant l'intervalle de temps infinitésimal dt .

Ces hypothèses trouvent leur justification dans le fait que les propriétés qui s'en déduisent sont confirmées par l'expérience. Nous avons vu en effet, en classe de Première, que le passage

(¹) Inférieure à 1 micron pour une intensité maximale I_m de l'ordre d'un ampère.



Une batterie de condensateurs.

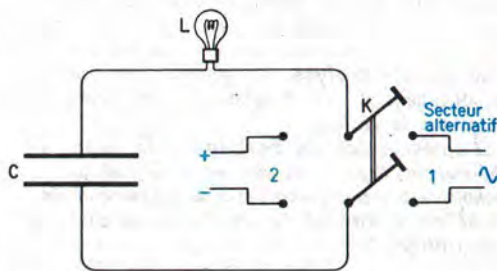


Fig. 2. — Si l'on ferme l'interrupteur K sur les plots 1, le circuit est branché sur le secteur *alternatif*; la lampe L s'allume, preuve que le courant alternatif passe dans le circuit, bien que celui-ci comporte un condensateur C.

Par contre, lorsque le circuit est alimenté en *continu* (K fermé sur les plots 2), la lampe ne s'allume pas parce que le diélectrique du condensateur ne laisse pas passer le courant.

d'un courant alternatif dans un circuit se manifeste par des effets chimiques, magnétiques et calorifiques analogues à ceux du courant continu.

Mais nous avons vu également que la périodicité des changements de sens et des variations d'intensité donne un aspect nouveau à ces effets et confère au courant alternatif des propriétés que ne possède pas le courant continu. En particulier, *un courant alternatif passe dans un circuit comportant un condensateur* (¹) (fig. 2);

(¹) Rappelons qu'on appelle *condensateur* l'ensemble formé par deux conducteurs (les *armatures*) dont les surfaces en regard sont parallèles, généralement très proches l'une de l'autre et séparées par un isolant (le *diélectrique*).

La caractéristique principale d'un condensateur est sa *capacité*, $C = Q/U$, quotient constant de la charge électrique Q qu'il prend par la *différence de potentiel* (ou tension) U établie entre ses armatures. Pour Q mesurée en coulomb (C) et U en volt (V), la capacité s'exprime en farad (F).

nous verrons aussi que, contrairement à un courant continu, il peut produire des *forces électromotrices d'induction*, dans son propre circuit comme dans des circuits voisins.

Avant de compléter l'étude du courant alternatif basse fréquence amorcée en Première, il est utile de rappeler quelques résultats fondamentaux du cours d'Électricité.

3. L'effet chimique d'un courant; la loi de Faraday.

Lorsqu'un courant traverse un *électrolyte*, c'est-à-dire un liquide contenant des *ions* (solution aqueuse d'acide, de base ou de sel, ou encore base ou sel rendus liquides par fusion), des réactions chimiques se produisent aux électrodes de l'électrolyseur dont le bilan constitue une *électrolyse*. En général, on observe un dégagement d'hydrogène ou un dépôt de métal sur la *cathode*.

D'après la *loi de Faraday* : la masse de l'hydrogène dégagé ou du métal déposé sur la cathode est proportionnelle à la quantité d'électricité qui a traversé l'électrolyseur au cours de l'électrolyse.

A une quantité d'électricité $Q \approx 96\,500$ coulombs correspond la libération de 1 gramme d'hydrogène ou celle d'une *valence gramme* A/n d'un métal dont l'atome-gramme (*) vaut A grammes et dont la valence (à l'état d'ions dans l'électrolyte considéré) est n .

Si le courant est *alternatif*, l'électrode qui est *anode* au cours d'une alternance devient *cathode*

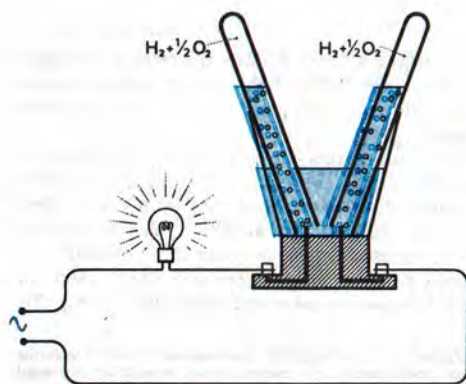


Fig. 3. — L'électrolyse de l'eau additionnée d'acide sulfurique en courant alternatif.

(*) Masse d'une *mole* ($N \approx 6 \times 10^{23}$) d'atomes du métal considéré.

pendant l'alternance suivante, et vice versa; il en résulte en particulier que :

— l'électrolyse de l'eau (rendue conductrice par dissolution d'un peu de soude ou d'acide sulfurique) donne le même mélange tonnant ($H_2 + 1/2 O_2$) aux deux électrodes (fig. 3);

— l'effet chimique est nul dans un électrolyseur à « anode soluble », puisque la masse de métal qui se dépose sur chaque électrode pendant qu'elle est cathode est égale à celle qui lui est enlevée pendant qu'elle est anode.

4. L'effet calorifique; la loi de Joule.

Tout conducteur parcouru par un courant est le siège d'un dégagement de chaleur; cet **effet Joule** résulte de la transformation en *énergie calorifique* de tout ou partie de l'*énergie électrique* consommée dans le conducteur.

D'après la *loi de Joule* relative à un courant continu, l'énergie calorifique produite dans un conducteur par effet Joule est proportionnelle au temps t de passage du courant et au carré de l'intensité I de ce courant; elle a pour expression :

$$W = RI^2t \quad (2)$$

Le facteur de proportionnalité R dépend du conducteur considéré; on l'appelle la **résistance électrique** de ce conducteur.

Avec I mesurée en ampère, t en seconde et W en joule, la résistance R doit être mesurée en *ohm* (Ω).

Puisque l'effet Joule ne dépend pas du sens du courant, il se produit en courant alternatif comme en courant continu. C'est ainsi que nos appareils de chauffage électrique et, plus généralement, tous les appareils domestiques utilisant un fil chauffant peuvent être alimentés avec un courant de l'un ou l'autre type. La résistance du fil a la même valeur R dans les deux cas, à condition toutefois que la fréquence du courant alternatif ne soit pas trop élevée.

Quant à la formule (2) qui résume la loi de Joule, elle est applicable au courant alternatif en considérant que le facteur I^2 représente le carré de l'*intensité efficace* de ce courant.

5. La définition et la mesure de l'intensité efficace d'un courant alternatif.

L'*intensité efficace* d'un courant alternatif est égale à l'intensité I d'un courant continu qui, passant dans le même conducteur, y produirait durant chaque période le même dégagement de chaleur par effet Joule.

Notons que ce qui est vrai pour une période l'est pour un nombre entier de périodes, et pratiquement aussi pour un temps t quelconque,

si t est assez grand comparé à la période T pour qu'on puisse le considérer comme sensiblement égal à un nombre entier de périodes.

Parce qu'il est fondé sur l'effet Joule, un *ampèremètre thermique* (fig. 4), préalablement étalonné en courant continu, donne par simple lecture l'intensité efficace du courant alternatif qui le traverse.

On lui préfère un ampèremètre *ferromagnétique* (à palette de fer doux) ou un ampèremètre *magnéto-électrique* avec redresseur incorporé (§ 6-c et fig. 5).

La relation entre l'intensité efficace et l'intensité maximale d'un courant sinusoïdal :

Soit un conducteur de résistance R parcouru par un courant *sinusoïdal* de période T :

Entre les instants infiniment voisins t et $t + dt$, l'énergie électrique transformée en énergie calorifique dans ce conducteur a pour expression, d'après la loi de Joule :

$$dW = Ri^2 dt \quad \begin{cases} W \text{ en joule;} \\ R \text{ en ohm;} \\ i \text{ en ampère;} \\ dt \text{ en seconde.} \end{cases}$$

De l'instant zéro à l'instant T , l'énergie calorifique qui apparaît ainsi dans le conducteur est la somme des énergies élémentaires $dW_1, dW_2, \dots$, correspondant à tous les intervalles de temps dt en lesquels on peut décomposer la période T :

$$W = \int_0^T dW = \int_0^T Ri^2 dt = R \int_0^T i^2 dt.$$

Or, par définition de l'intensité efficace I d'un courant alternatif, cette énergie W a aussi pour expression :

$$W = RI^2 T.$$

Par suite :

$$RI^2 T = R \int_0^T i^2 dt$$

$$I^2 T = \int_0^T i^2 dt$$

$$I^2 = \frac{\int_0^T i^2 dt}{T}$$

Cette relation signifie que le carré de l'intensité efficace est égal à la valeur moyenne, pour une période T , du carré de l'intensité instantanée. Évaluons le carré i^2 :

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$i^2 = I_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{I_m^2}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

$$i^2 = \frac{I_m^2}{2} - \frac{I_m^2}{2} \cos 2\omega t.$$

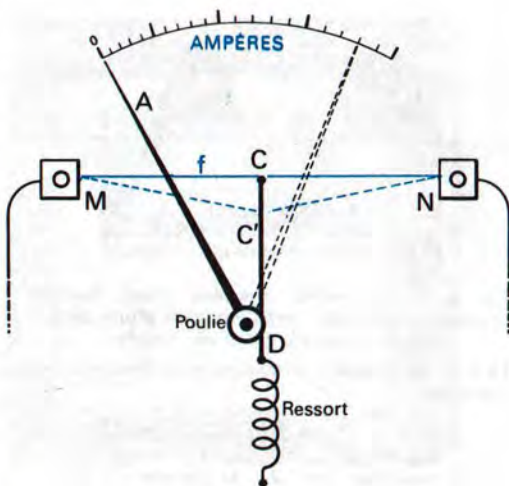


Fig. 4. — Le schéma d'un *ampèremètre thermique*. Le courant traverse le fil fin f ; plus l'effet Joule y est important, plus la température d'équilibre du fil est élevée et plus grande est sa dilatation linéaire. *En continu*, la position de l'aiguille, liée à l'allongement du fil, dépend donc de l'intensité du courant et l'appareil peut être gradué en intensités par comparaison avec un ampèremètre étalon. *En alternatif*, la lecture correspond à l'intensité efficace.



Fig. 5. — Un *ampèremètre magnéto-électrique* utilisable en courant continu (=) ou en courant alternatif (v).

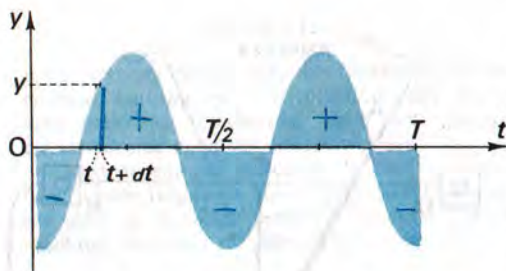


Fig. 6. — La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale est nulle dans l'intervalle d'une période ou d'un nombre entier de périodes.

La fonction sinusoïdale représentée ci-dessus a pour expression :

$$y = -\frac{I_m}{2} \cos 2\omega t = -\frac{I_m}{2} \cos \frac{2\pi}{T/2} t$$

(Sa pulsation étant 2ω , sa période est $T/2$.)

Si t et $t + dt$ sont deux instants infiniment voisins, le produit ydt est représenté par le trapèze infinitésimal de teinte plus sombre et la somme algébrique $\int_0^T ydt$, pour un intervalle de temps T , est représentée par la somme algébrique des aires teintées. Du fait de la symétrie de la sinusoïde, les aires positives et les aires négatives sont égales en valeur absolue et s'annulent algébriquement; il s'ensuit que la valeur moyenne de y est nulle.

Comme le second terme est une fonction sinusoïdale, sa valeur moyenne est nulle pour l'intervalle de temps de 0 à T (fig. 6); la valeur moyenne de i^2 est donc égale au terme constant $\frac{I_m^2}{2}$. Ainsi :

$$I^2 = \frac{I_m^2}{2}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

L'intensité efficace d'un courant sinusoïdal est égale au quotient de son intensité maximale par $\sqrt{2}$.

6. Les effets magnétique et électromagnétique.

a. — Le champ d'un courant et l'aimantation du fer dans ce champ.

Nous savons qu'un courant électrique crée un champ magnétique dans l'espace entourant le circuit qu'il parcourt. Dans le cas habituel d'un circuit de faibles dimensions placé dans l'air, et pour des points voisins du circuit, le champ magnétique est caractérisé en chacun de ces points par un vecteur induction magnétique $\vec{b}$ dont :

— le support dépend uniquement de la forme du circuit et de la position du point considéré par rapport au circuit; il est en particulier indépendant du sens et de l'intensité du courant.

Par suite, les lignes d'induction ⁽¹⁾ du champ magnétique sont les mêmes, que le courant soit continu ou alternatif;

— le sens (et par conséquent celui des lignes d'induction) change avec le sens du courant, la liaison entre ces deux sens étant définie par la règle de l'observateur d'Ampère;

— l'intensité b est proportionnelle à l'intensité i du courant :

$$b = k i$$

Cette relation est algébrique : elle lie le signe de b au signe de i (fig. 7).

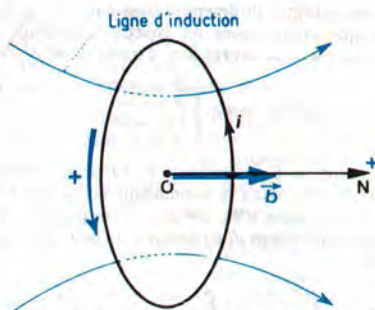


Fig. 7. — Lorsque le courant parcourt le circuit dans le sens positif choisi (indiqué par la flèche), l'intensité i et l'induction magnétique b sont comptées positivement; le vecteur induction $\vec{b}$ a alors le sens de la demi-normale positive ON (fig. 11).

Si le courant est sinusoïdal, de la forme $i = I_m \sin \omega t$, l'induction est également sinusoïdale, de même pulsation ω que le courant :

$$b = k I_m \sin \omega t$$

La valeur maximale $B_m = k I_m$ de l'induction magnétique se calcule à partir des formules établies en courant continu, en prenant pour I la valeur maximale I_m du courant alternatif.

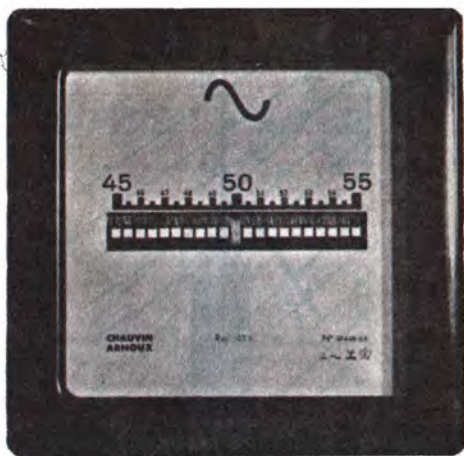
Par exemple, dans la région centrale d'un solénoïde très long comportant n spires par mètre :

$$B_m = 4\pi \times 10^{-7} n I_m \begin{cases} I_m \text{ en ampère;} \\ B_m \text{ en tesla.} \end{cases}$$

⁽¹⁾ Rappelons qu'une ligne d'induction est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur induction qui caractérise le champ magnétique en ce point. Son sens est celui du vecteur induction.



Photo Chauvin-Arnoux



Un *fréquencemètre* à 11 lames vibrantes en acier doux.

Les fréquences propres s'échelonnent au voisinage de 100 Hz. Les vibrations des lames étant peu amorties, la résonance est *aiguë*; seule vibre avec une amplitude notable la lame dont la fréquence propre est *le double* de celle du courant excitateur.

Un barreau de *fer doux*, placé à l'intérieur d'un solénoïde, s'*aimante* dans le sens du champ magnétique créé par le courant; il prend un pôle nord du côté de la face nord du solénoïde et un pôle sud du côté de la face sud.

Si le solénoïde est parcouru par un courant alternatif de fréquence 50 Hz, **le sens de l'aimantation du fer doux change en même temps que le sens du courant** : les extrémités du noyau de fer doux sont encore à chaque instant des pôles de noms différents mais chacun d'eux est alternativement pôle nord et pôle sud, 50 fois nord et 50 fois sud par seconde.

Une lame d'acier, placée à proximité de l'un de ces pôles, reçoit des impulsions périodiques qui la font vibrer *par résonance*, pour une valeur convenable de sa fréquence propre :

— Si la lame est en *acier doux* (comme c'est le cas dans la plupart des *vibreurs*, fig. 8), elle est attirée à *chaque alternance* et la fréquence de résonance est *le double* de celle du courant; on utilise cette propriété dans les *fréquencemètres* destinés au contrôle de la fréquence du courant alternatif industriel (photo ci-dessus).

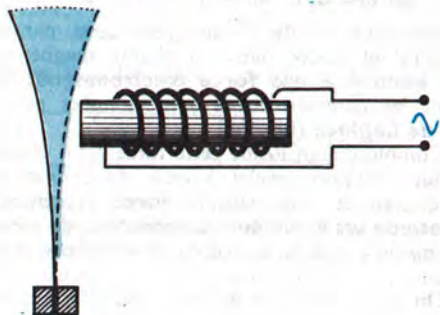


Fig. 8. — L'entretien de la vibration d'un *vibreur* par un électro-aimant alimenté en courant alternatif.

— Si elle est en *acier fortement aimanté* dans le sens de la longueur, elle est alternativement attirée ou repoussée au cours des alternances successives de sorte qu'elle vibre avec une fréquence *égale* à celle du courant.

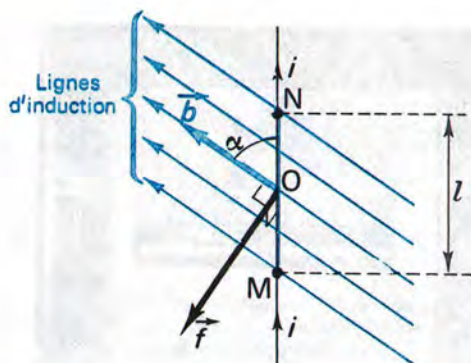


Fig. 9. — La loi de Laplace.

Un élément rectiligne de circuit MN de longueur l , parcouru par un courant d'intensité i et placé dans un champ magnétique uniforme d'induction b , est soumis à une **force électromagnétique** $\vec{f}$ dont

- le **point d'application** est le milieu O de MN ;
- la **direction** est perpendiculaire au plan MN, b ;
- le **sens** est donné par la règle d'Ampère ou la règle des trois doigts de la main droite ;
- l'**intensité** a pour expression :

$$f = ilb \sin \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} i \text{ en ampère;} \\ l \text{ en mètre;} \\ b \text{ en tesla;} \\ f \text{ en newton.} \end{array} \right.$$

b. — L'action d'un champ magnétique sur un courant; la loi de Laplace.

Une portion de circuit parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique est soumise à une **force électromagnétique** dont les caractéristiques sont données par la **loi de Laplace** (fig. 9).

Comme l'intensité de cette force est à chaque instant proportionnelle à celle du courant, si ce courant est alternatif, **la force électromagnétique est également alternative, de même fréquence que le courant, et en phase avec lui.**

On peut mettre en évidence cet effet électromagnétique du courant comme l'indiquent la fig. 10 et la fig. 7 de la page 199.

c. — Les appareils de mesure magnéto-électriques; leur emploi en alternatif.

L'action d'une induction magnétique constante sur un courant continu est utilisée dans le **galvanomètre à cadre mobile** et les **ampèremètres et voltmètres magnéto-électriques** qui en dérivent.

Les forces électromagnétiques agissant sur le cadre mobile forment un couple qui fait tour-

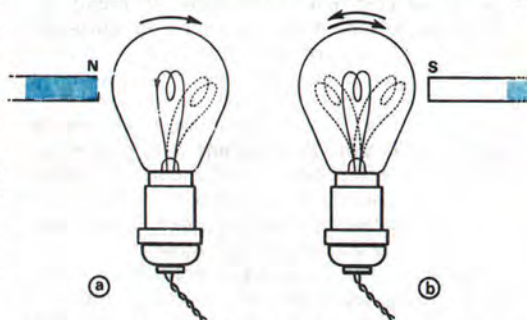
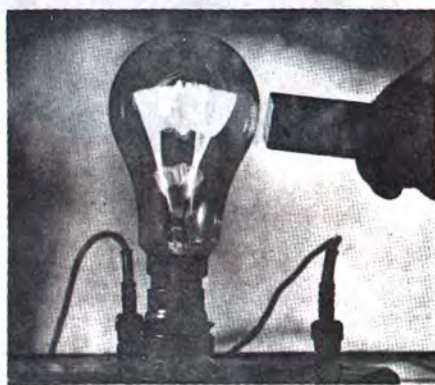


Fig. 10. — L'action d'un champ magnétique sur un filament flexible parcouru par un courant.

a) Si la lampe est alimentée en courant continu, les forces électromagnétiques qui s'exercent sur les divers éléments de son filament ont pour effet résultant d'incliner celui-ci de façon permanente.

b) En courant alternatif, l'inclinaison change de sens à chaque alternance, de sorte que le filament oscille avec la fréquence du courant.

ner ce cadre d'un angle d'autant plus grand que le courant est plus intense.

Si le courant qui circule dans le cadre est *alternatif*, le couple électromagnétique est lui-même alternatif, de même fréquence que le courant et en phase avec lui. Comme le cadre est un système oscillant dont la fréquence propre, de l'ordre de 1 hertz, est *très inférieure* à la fréquence du couple, il ne peut exécuter les oscillations forcées que le couple tend à lui imposer, de sorte qu'il reste pratiquement immobile.

Un appareil de mesure à cadre mobile ne peut donc être utilisé en courant alternatif que s'il est muni d'un **redresseur** ne laissant passer le courant que dans un seul sens. Dans le cas d'un ampèremètre, on étalonne l'appareil de façon qu'il donne, par simple lecture, l'intensité efficace du courant alternatif parcourant le circuit dans lequel on l'a branché (fig. 5).

7. Les effets d'induction et d'auto-induction.

a. — Le flux d'induction à travers un circuit.

Soit un circuit C le long duquel nous avons choisi arbitrairement un sens positif de circulation. Convenons d'orienter la *normale* à ce circuit comme l'indique la figure 11.

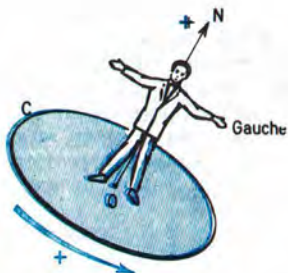


Fig. 11. — Pour un observateur placé sur la demi-normale positive ON, le sens positif sur le circuit va de sa droite vers sa gauche.

Considérons d'autre part un champ magnétique uniforme : les lignes d'induction d'un tel champ sont des droites parallèles; le vecteur induction $\vec{B}$ a mêmes direction, sens et intensité en tous les points du champ.

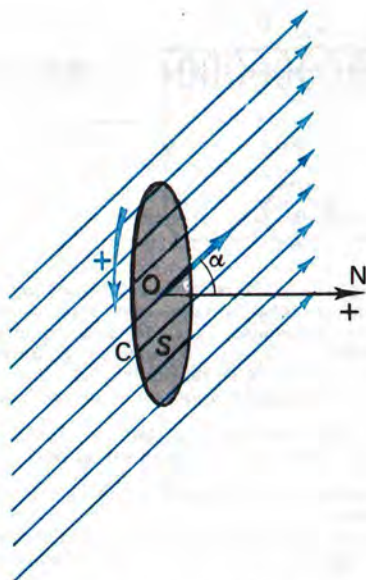


Fig. 12. — Le flux d'induction à travers un circuit :
 $\Phi = BS \cos \alpha$

Si le circuit C est placé dans ce champ (fig. 12), il est traversé par un **flux d'induction** Φ qui s'exprime, en fonction de la surface S du circuit, de l'induction B du champ et de l'angle des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{ON}$, par la relation algébrique :

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} B \text{ en tesla;} \\ S \text{ en mètre carré;} \\ \Phi \text{ en weber (Wb).} \end{array} \right.$$

Le flux est *positif* quand les lignes d'induction traversent le circuit de sa face négative à sa face positive (cas de la figure 12; α aigu); il est *néglatif* dans le cas contraire (α obtus).

b. — La production d'un courant induit; la force électromotrice d'induction.

Toute variation du flux d'induction à travers un circuit fermé s'accompagne de la production dans le circuit d'un courant électrique, dit **courant induit**.

Le courant induit apparaît dès que commence la variation du flux inducteur et disparaît dès que cesse cette variation : la cause et l'effet ont la même durée.

Le sens du courant induit est donné par la **loi de Lenz** :

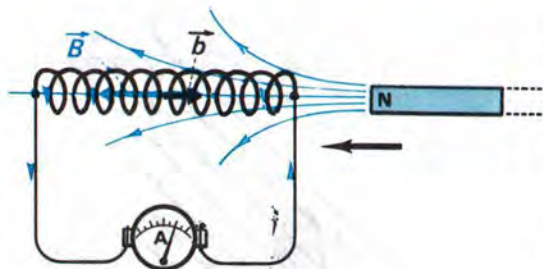


Fig. 13. — L'illustration de la loi de Lenz.

Si l'on *approche* le pôle nord d'un aimant de l'une des extrémités d'un solénoïde fermé sur un galvanomètre, le flux d'induction à travers les spires *augmente*; il en résulte la production dans le circuit d'un *courant induit* dont le sens (indiqué

par le galvanomètre) est tel que l'induction $\vec{b}$ créée au centre par ce courant est de sens contraire à l'induction magnétique $\vec{B}$ due à l'aimant et s'en *retranche*.

Par contre, si le pôle nord est *éloigné* du solénoïde, le flux inducteur diminue, le courant induit change de sens, créant une induction $\vec{b}$ de même sens que $\vec{B}$, donc *s'ajoutant* à celle-ci.

Le courant induit a un sens tel que le flux d'induction qu'il crée dans son propre circuit modère la variation du flux inducteur (fig. 13).

La circulation d'un courant induit dans un circuit fermé soumis à un flux inducteur variable φ doit être attribuée à l'existence d'une *force électromotrice d'induction*, liée à la variation du flux inducteur et dont la durée est égale à celle de cette variation de flux.

La force électromotrice d'induction est à chaque instant proportionnelle à la vitesse de la variation du flux d'induction à travers le circuit :

Si, entre un instant quelconque t et l'instant infiniment voisin $t + dt$, le flux varie de la quantité infinitésimale $d\varphi$, la f. e. m. d'induction à l'instant t a pour expression :

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} d\varphi \text{ en weber;} \\ dt \text{ en seconde;} \\ e \text{ en volt (V).} \end{array} \right.$$

(¹) Rappelons que l'on emploie des lettres minuscules :

$i, b, \varphi, e, \dots$ pour représenter les valeurs *instantanées* de grandeurs qui varient ou peuvent varier d'un instant à l'autre, et l'on réserve les lettres majuscules :

$I, B, \Phi, E, \dots$ pour représenter les valeurs constantes ou les valeurs efficaces.

Elle est égale en valeur absolue à la *dérivée du flux d'induction par rapport au temps*.

Le signe négatif exprime la loi de Lenz; montrons-le sur un exemple :

Supposons que le flux inducteur φ soit positif (fig. 12) et croissant :

$$\frac{d\varphi}{dt} > 0 \text{ entraîne } e < 0$$

Cela signifie que la f.e.m. d'induction fait circuler le courant induit *dans le sens négatif*; par suite, l'induction $\vec{b}$ créée par ce courant induit est de sens contraire

à $\vec{ON}$ et le flux de cette induction à travers le circuit est négatif; il se retranche donc du flux inducteur, *modérant ainsi l'accroissement de ce flux inducteur*.

c. — L'auto-induction; l'inductance d'un circuit (ou d'une portion de circuit).

Considérons le cas simple d'un circuit (ou d'une portion de circuit) *fixe, indéformable, placé dans l'air loin de toute masse de fer*.

Lorsqu'un courant quelconque, d'intensité i , parcourt ce circuit, il crée dans l'espace environnant une induction magnétique dont le module b est en tout point et à chaque instant proportionnel à i ; il en résulte, à travers le circuit, un flux d'induction φ — appelé *flux propre* — proportionnel à b , donc aussi proportionnel à i :

$$\varphi = Li$$

Le coefficient de proportionnalité L est, par définition, l'**inductance** du circuit (ou de la portion de circuit). Dans le cas considéré, L est une constante ne dépendant que des paramètres géométriques du circuit (fig. 14).

Si l'intensité i du courant varie, le circuit est le siège d'une **force électromotrice d'auto-induction** dont la valeur instantanée a pour expression :

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{d(Li)}{dt}$$

$$e = - L \frac{di}{dt}$$

La relation précédente définit l'unité SI d'inductance, appelée **henry (H)** :

En effet, si $L = 1 \text{ H}$ et $\left| \frac{di}{dt} \right| = 1 \text{ A/s}$, la relation donne : $|e| = 1 \text{ V}$.

Ainsi, le **henry** est l'inductance d'un circuit (ou d'une portion de circuit) dans lequel un courant variant uniformément à raison de 1 ampère par seconde produit une f. e. m. d'auto-induction de 1 volt.

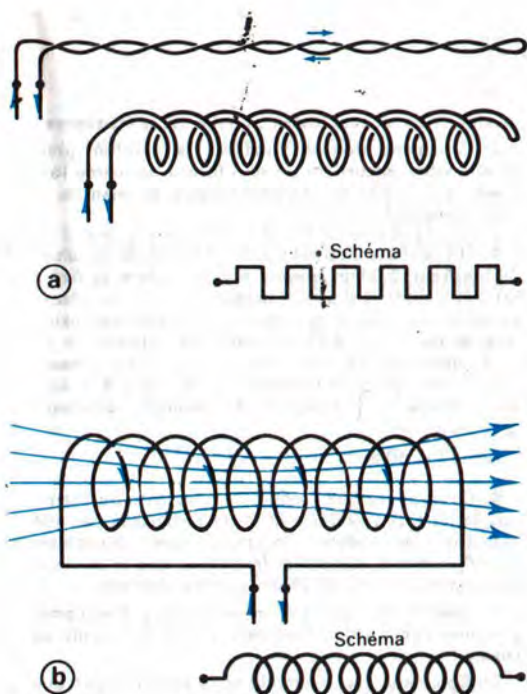


Fig. 14. — L'inductance dépend de la forme du circuit.

a) Portions de circuit à inductance négligeable.
b) Portion de circuit à inductance notable.

Remarque.

Si une portion de circuit comporte un *noyau de fer*, l'induction magnétique $\vec{b}$ créée à l'intérieur est plus forte mais n'est plus proportionnelle à l'intensité du courant du fait de l'*aimantation* du fer. Par suite, le flux φ n'est plus proportionnel à i et l'*inductance* L — égale à $\frac{\varphi}{i}$ — *varie avec i* .

Dans les calculs, on prend alors pour L la valeur *moyenne* du quotient $\frac{\varphi}{i}$ dans l'intervalle

des intensités de courant utilisées. Notons qu'en introduisant un noyau de fer doux dans une bobine longue, on peut multiplier son inductance par un facteur de l'ordre de plusieurs centaines.

L'étude des effets des forces électromotrices d'auto-induction sera faite dans le prochain chapitre. L'expérience que représente la figure 15 montre déjà qu'une variation de l'inductance L d'une portion de circuit peut entraîner une *modification considérable de l'intensité efficace* d'un courant alternatif parcourant le circuit, alors qu'une telle variation n'a aucune influence sur l'intensité d'un courant continu.

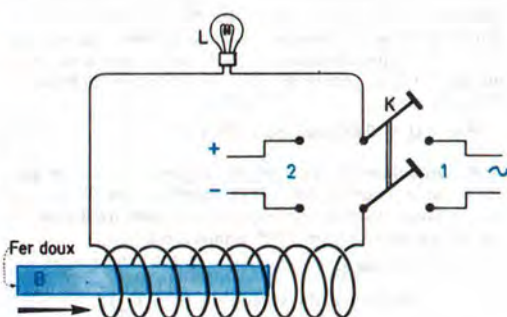


Fig. 15. — Le circuit étant alimenté en *alternatif* (K sur les plots 1), si l'on augmente l'inductance L du circuit en enfonçant le barreau de fer doux B dans le solénoïde, on observe un affaiblissement de la luminance du filament de la lampe L qui peut aller jusqu'à l'extinction.

Par contre, si l'on répète l'expérience lorsque le circuit est alimenté en *continu* (K sur les plots 2), on n'observe aucune variation de la luminance du filament, preuve que l'intensité du courant ne change pas.

EXERCICES

1. Quelle est, en fonction du temps, l'expression la plus simple d'un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz et d'intensité efficace 1 ampère ?

Rép. : $i \approx 1,41 \sin 314 t$.

2. Quelles sont les valeurs de la période, de la fréquence et de l'intensité efficace d'un courant d'expression :

$$i \approx 7,07 \sin 6280 t.$$

3. Sachant que, pour une alternance ($T/2$), la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale,

$$Y = Y_m \sin \frac{2\pi t}{T},$$

est $\frac{2Y_m}{\pi}$, calculer la quantité d'électricité transportée pendant une alternance par un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz et d'intensité efficace 4,45 ampères. En déduire le volume de mélange tonnant obtenu en 5 mn à chaque électrode d'un électrolyseur à eau acidulée (H_2SO_4) traversé par le courant précédent (0° ; 76 cm).

Rép. : $Q \approx 0,04 \text{ coulomb}$; $104,5 \text{ cm}^3$.

4. Un solénoïde de 1 m de longueur est formé par une seule couche de spires jointives de 5 cm de rayon faites d'un fil conducteur de 1 mm de diamètre et de résistivité $\rho = 10^{-6} \text{ ohm-mètre}$.

On demande :

1° La résistance du solénoïde ($R = \rho \frac{l}{S}$);

2° Son inductance L (1);

3° L'expression de la f. e. m. d'auto-induction dont il est le siège lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité $i = 5t^2$ (A) et la valeur de cette f. e. m. 0,1 seconde après l'instant initial $t = 0$.

5. Un courant alternatif de fréquence 50 Hz traverse un électro-aimant devant lequel est tendue une corde en acier doux de longueur 1 m, de diamètre 0,5 mm et de densité 8.

1° Quelle est la tension de la corde pour laquelle l'amplitude est maximale quand la corde vibre en un seul fuseau ?

2° Comment doit être modifiée cette tension pour que la corde vibre en 3 ou 5 fuseaux ?

Rép. : 1° $F \approx 63 \text{ N}$; 2° $F' = \frac{F}{9}$ ou $\frac{F}{25}$.

6. Dans une expérience de Melde, l'excitateur est un vibreur à lame d'acier doux placée au voisinage d'un électro-aimant alimenté par un courant alternatif de fréquence 50 Hz :

1° la corde est d'abord dans le plan de la lame vibrante et la tension est réglée pour qu'elle vibre au

maximum en un seul fuseau : quelle est sa fréquence ?

2° Comment doit-on modifier la tension pour qu'elle vibre encore en un seul fuseau de même longueur quand elle est perpendiculaire au plan de la lame vibrante ?

7. Un courant alternatif passe dans un fil de laiton de longueur 0,81 m, pesant 6 g par mètre et fixé à ses extrémités. La partie médiane du fil est placée perpendiculairement aux lignes d'induction du champ magnétique à peu près uniforme d'un aimant en U.

La vibration de résonance, en un seul fuseau, est obtenue pour une tension du fil égale à 4 kgf; en déduire la fréquence du courant alternatif ($g \approx 10 \text{ u. SI}$).

Rép. : $f \approx 50 \text{ hertz}$.

8. On suppose que l'induction constante du champ magnétique de l'exercice n° 7 est remplacée par une induction de même direction, mais sinusoïdale ($b = B_m \sin \omega t$), de même fréquence que le courant traversant le fil et en phase avec ce courant.

1° Quelle est l'expression de la force électromagnétique appliquée à l'élément $d\ell$ de fil soumis au champ ?

2° Comment doit-on modifier la tension pour que le fil vibre encore en un seul fuseau ?

9. 1° Une bobine circulaire allongée B à axe horizontal porte 20 tours de fil par centimètre. Elle est traversée par un courant constant de 10 ampères. Quelles sont la direction et l'intensité de l'induction magnétique au centre de la bobine ?

2° Au centre de B et perpendiculairement à son axe on place une petite bobine b formée de 10 spires de fil. Chaque spire a une surface de 100 cm^2 . Quel est le flux d'induction qui traverse la bobine b ?

Que devient ce flux quand la normale à b fait un angle α avec l'axe de B ?

3° Que se produit-il dans la bobine b quand on la fait tourner autour d'un axe vertical d'un mouvement uniforme avec une vitesse de 40 tr/s ?

Rép. : 1° $0,025 \text{ T}$; 2° $2,5 \times 10^{-3} \text{ Wb}$; il est multiplié par $\cos \alpha$;

3° Une f.e.m. d'induction : $e = 0,2 \pi \sin 80 \pi t$.

10. Une spire circulaire de rayon $r = 3 \text{ cm}$ peut tourner autour d'un diamètre vertical dans un champ magnétique horizontal d'induction $B = 0,5 \text{ tesla}$, supposé uniforme. La vitesse de rotation est maintenue constante égale à 50 tours par seconde.

1° Donner l'expression de la f. e. m. induite en fonction du temps (on suppose l'induction perpendiculaire au plan de la spire à l'origine des temps);

2° Calculer la valeur efficace de l'intensité du courant produit dans la spire, si celle-ci est faite d'un fil de cuivre de diamètre 1 mm; la résistivité du cuivre est $1,6 \times 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$;

3° Calculer la puissance dissipée en chaleur.

(1) On admettra que le champ magnétique créé par un courant circulant dans le solénoïde est uniforme dans la totalité de l'espace intérieur à ce solénoïde.

L'INFLUENCE DE L'INDUCTANCE ET DE LA CAPACITÉ EN COURANT ALTERNATIF L'IMPÉDANCE D'UNE PORTION DE CIRCUIT

A. LA VALEUR INSTANTANÉE ET LA VALEUR EFFICACE D'UNE DIFFÉRENCE DE POTENTIEL (OU TENSION) ALTERNATIVE

1. La valeur instantanée d'une différence de potentiel alternative.

Lorsqu'une portion de circuit *quelconque* MN est parcourue par un courant (fig. 1), il existe entre ses extrémités M et N une **différence de potentiel électrique** (en abrégé **d. d. p.**), encore appelée **tension électrique**.

Si le courant est *sinusoïdal*, d'intensité :

$$i = I_m \sin \omega t,$$

la d. d. p. est également *sinusoïdale*, de même pulsation ω que l'intensité, mais elle est en général *déphasée* par rapport à celle-ci ⁽¹⁾; sa valeur à l'instant t est donnée par la relation algébrique :

$$v_M - v_N = u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$$

Si la valeur φ du **déphasage** de la d. d. p. par rapport à l'intensité est

— *positive*, on dit que la d. d. p. est *en avance* sur l'intensité (ou, ce qui revient au même, que l'intensité est en retard sur la d. d. p.);

— *négative*, on dit que la d. d. p. est *en retard* sur l'intensité (ou celle-ci en avance sur la d. d. p.);

— *nulle* ($\varphi = 0$), la d. d. p. et l'intensité sont dites *en phase*.

Ce déphasage φ , et aussi la relation entre les valeurs maximales I_m et U_m de l'intensité et de

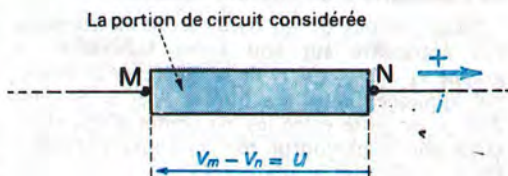


Fig. 1.

la tension, dépendent de la portion de circuit considérée.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons aux cas de *portions de circuit ne comportant ni générateur, ni moteur, ni dérivation*.

2. Le cas simple d'une portion de circuit uniquement résistante.

Une portion de circuit sans condensateur, et dont l'inductance est pratiquement *nulle*, est dite *uniquement résistante*; on l'appelle encore une **résistance pure** ⁽¹⁾; elle est caractérisée par sa *seule* résistance R .

⁽¹⁾ Il convient de distinguer une *résistance pure* d'une *résistance morte* (au sens que nous avons donné à cette appellation dans le cours de Première). Une *résistance morte* est une portion du circuit dans laquelle l'énergie électrique consommée est intégralement transformée en énergie calorifique par effet Joule; elle peut avoir de l'inductance, qui ne joue aucun rôle lorsque le courant est *constant*.

⁽¹⁾ Voir le § 6 de la p. 156.

Un fil métallique rectiligne, ou torsadé, ou encore enroulé en doubles spires (fig. 14, page 235) constitue une résistance pratiquement *pure*.

a. — L'application de la loi d'Ohm en courant alternatif.

A chaque instant, l'intensité i d'un courant alternatif dans une résistance pure et la d. d. p. u qui existe entre les extrémités de celle-ci sont liées par la même relation d'Ohm qu'en courant continu :

$$u = Ri \quad \left\{ \begin{array}{l} R \text{ en ohm;} \\ i \text{ en ampère;} \\ u \text{ en volt.} \end{array} \right. \quad (1)$$

Comme la valeur R de la résistance est sensiblement *constante*, (sous réserve que la température demeure elle-même à peu près constante), on voit qu'à tout instant la d. d. p. est proportionnelle à l'intensité i . Par suite, u et i sont en phase et l'on a, dans le cas d'un courant sinusoïdal :

$$\left. \begin{array}{l} i = I_m \sin \omega t \\ u = U_m \sin \omega t \end{array} \right\} \text{ avec : } U_m = RI_m \quad (2)$$

Application : l'emploi d'un oscilloscope électronique pour obtenir le graphe $i = f(t)$ de l'intensité d'un courant variable.

Nous verrons qu'un oscilloscope électronique fait apparaître sur son écran fluorescent le graphe $v_A - v_B = F(t)$ de la différence de potentiel appliquée entre ses bornes A et B. Si cette d. d. p. est prise entre les extrémités d'une résistance pure r parcourue par un courant d'intensité $i = f(t)$, on a, d'après (1) :

$$v_A - v_B = r i = C^{te} \times f(t)$$

Le graphe observé sur l'écran est donc celui de l'intensité $i = f(t)$, à un facteur numérique près (fig. 2).

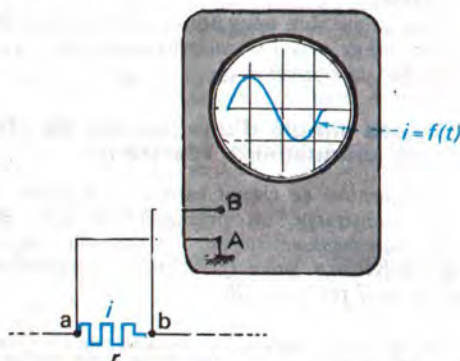


Fig. 2. — Le graphe $i = f(t)$ de l'intensité d'un courant alternatif observé sur l'écran d'un oscilloscope électronique.

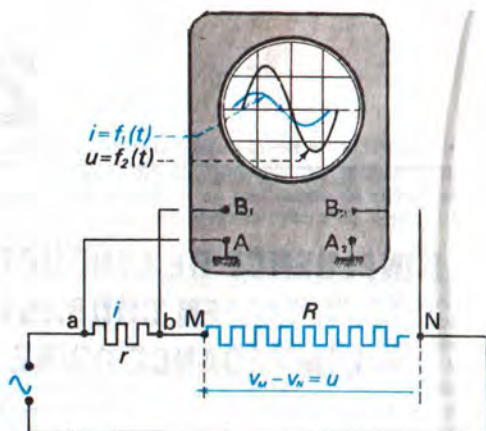
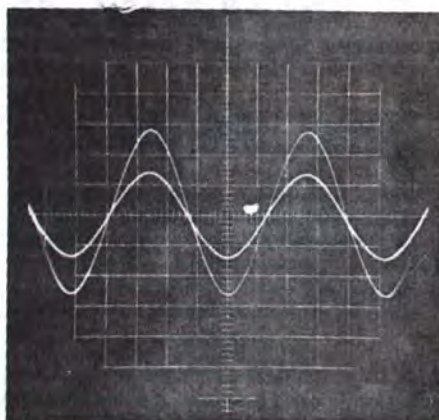


Fig. 3. — Le montage d'un oscilloscope à deux voies donnant simultanément :

$$\begin{array}{l} i = f_1(t) \\ v_M - v_N = u = f_2(t) \end{array} \quad (1)$$



Pour une résistance *pure*, l'intensité i (en gros trait) et la d. d. p. u (en trait plus fin) sont en phase.

Avec un oscilloscope à deux voies (ou « bi-courbe »), on peut obtenir *simultanément* le graphe $i = f_1(t)$ de l'intensité d'un courant et le graphe $u = f_2(t)$ de la d. d. p. entre les extrémités d'une portion de circuit MN parcourue par ce courant (fig. 3).

Dans le cas d'une résistance *pure* MN et d'un courant *sinusoïdal*, les graphes observés sont deux sinusoïdes *en phase*.

(1) En fait, la voie 2 de l'oscilloscope donne le graphe de la d. d. p. $v_A - v_N$, pratiquement égale à $v_M - v_N$ si la résistance r est très petite devant l'impédance de la portion de circuit MN. (On verra un peu plus loin ce qu'il faut entendre par *impédance*.)

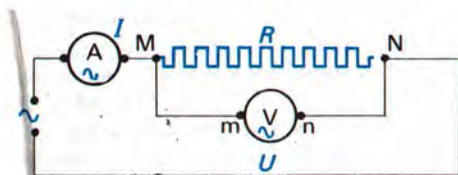


Fig. 4.

b. — La définition de la valeur efficace d'une différence de potentiel alternative.

Considérons deux points M et N entre lesquels existe une d. d. p. alternative u ; supposons que ces deux points soient reliés par une résistance pure R (fig. 4) :

La valeur efficace de la d. d. p. alternative u est égale à la d. d. p. constante U qui, appliquée entre les extrémités de la résistance pure R , y produirait durant chaque période le même dégagement de chaleur par effet Joule.

La d. d. p. constante U ferait circuler entre M et N un courant continu dont l'intensité I est donnée par la loi d'Ohm :

$$I = \frac{U}{R}$$

Pour que, durant le même temps T , l'effet Joule dans la résistance pure R soit la même en alternatif qu'en continu, il faut :

1° que la valeur efficace de la d. d. p. alternative existant entre M et N soit, par définition, égale à U ;

2° que l'intensité efficace du courant alternatif qui parcourt alors cette résistance ait, par définition, une valeur égale à I .

On en déduit que **pour une résistance pure parcourue par un courant alternatif, la loi d'Ohm s'applique aux valeurs efficaces de l'intensité et de la différence de potentiel :**

$$I = \frac{U}{R}, \text{ ou : } \boxed{U = RI} \quad (3)$$

c. — La relation entre la valeur efficace et la valeur maximale d'une différence de potentiel sinusoïdale.

Divisons membre à membre les égalités (2) et (3) :

$$\frac{U_m}{U} = \frac{RI_m}{RI} = \frac{I_m}{I}$$

Or, dans le cas d'un courant sinusoïdal : $I_m/I = \sqrt{2}$.

Par suite : $\frac{U_m}{U} = \sqrt{2}$, ou : $\boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$

La valeur efficace d'une d.d.p. sinusoïdale est égale au quotient par $\sqrt{2}$ de sa valeur maximale.

La valeur efficace U de la tension alternative entre les bornes d'une prise de courant du secteur est généralement de 115 volts ou, pour les installations récentes, de 220 volts.

Comme cette tension est pratiquement sinusoïdale, sa valeur maximale est $115 \sqrt{2} \approx 163$ volts ou $220 \sqrt{2} \approx 311$ volts.

d. — La mesure de la valeur efficace d'une d.d.p. alternative.

La différence de potentiel efficace entre deux points quelconques M et N d'un circuit parcouru par un courant alternatif se mesure avec un **voltmètre** approprié, branché **en dérivation** entre ces deux points (fig. 4).

Tout ampèremètre *très sensible* utilisable en courant alternatif (ampèremètre thermique, ampèremètre ferromagnétique à palette mobile de fer doux, ampèremètre magnéto-électrique avec redresseur incorporé) peut être transformé en un voltmètre permettant de mesurer une d. d. p. efficace. Il suffit, au moyen d'une résistance additionnelle convenable, de lui donner une résistance pure de valeur totale R_V suffisante et de porter sur sa graduation le produit $R_V I$ de cette résistance par l'intensité efficace I du courant qui la traverse.

Ainsi gradué, le voltmètre indique la d. d. p. efficace entre ses bornes m et n, pratiquement égale à celle qui existe entre les points M et N auxquels on les a reliées, sous réserve que les fils de jonction Mm et Nn aient une résistance pure négligeable. Le branchement du voltmètre modifie d'autant moins la d. d. p. à mesurer que la résistance R_V est plus élevée.

B. L'INFLUENCE DE L'INDUCTANCE ET DE LA CAPACITÉ SUR LA RELATION ENTRE LA DIFFÉRENCE DE POTENTIEL ET L'INTENSITÉ EN COURANT ALTERNATIF

En courant alternatif, si une portion de circuit MN a une inductance L non négligeable, ou bien comporte un condensateur de capacité C :

— 1° La loi d'Ohm n'est plus applicable; le quotient :

$$Z = \frac{U}{I}$$

de la différence de potentiel efficace U (volt) entre M et N par l'intensité efficace I (ampère) du courant est *plus grande* que la résistance R de la portion de circuit. On appelle Z l'**impédance** de cette portion de circuit et on l'exprime en *ohm*, comme une résistance.

— 2° La différence de potentiel instantanée $v_M - v_N$ n'est plus en phase avec l'intensité instantanée i du courant.

Nous nous proposons d'étudier l'influence de l'inductance L et celle de la capacité C sur l'impédance Z et le déphasage φ , ces deux influences étant d'abord considérées séparément, puis simultanément.

Dans chaque cas nous utiliserons les montages

des figures 3 et 4 dans lesquels nous remplacerons, entre M et N, la résistance pure R par la portion de circuit à étudier. Le montage de la figure 4 nous donnera U et I , donc l'impédance $Z = U/I$; celui de la figure 3 nous donnera les graphes $i = f_1(t)$ et $v_M - v_N = u = f_2(t)$, donc le déphasage φ de la d. d. p. u par rapport à l'intensité i (1).

3. L'influence de l'inductance.

Entre M et N nous disposons *en série* une bobine à noyau de fer doux, de résistance constante R_1 et d'inductance variable L , et une résistance pure de valeur pratiquement constante R_2 . Nous réalisons ainsi une portion de circuit MN dont l'inductance L peut augmenter ou diminuer selon que l'on enfonce plus ou moins le noyau dans la bobine et dont la résistance R est égale à la somme $R_1 + R_2$ (fig. 5-a).

(1) Les deux graphes $i = f_1(t)$ et $u = f_2(t)$ donnent aussi les valeurs maximales I_{m} et U_{m} de i et de u , sous réserve que l'oscilloscope ait été étalonné au préalable.

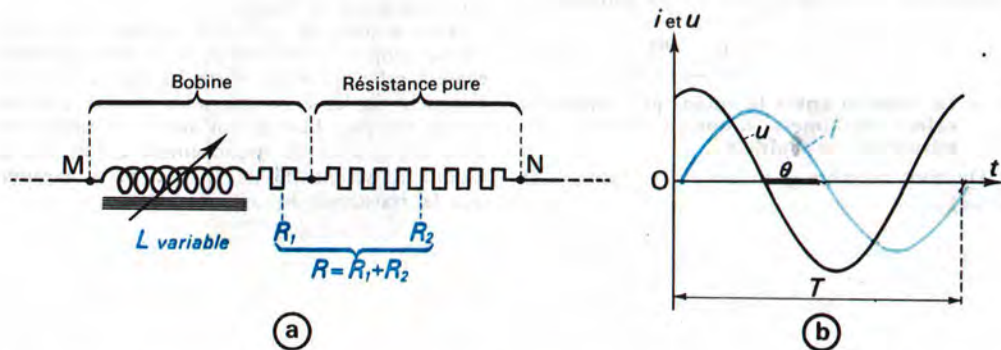


Fig. 5. — La portion de circuit MN comporte une inductance L variable et une résistance R constante.

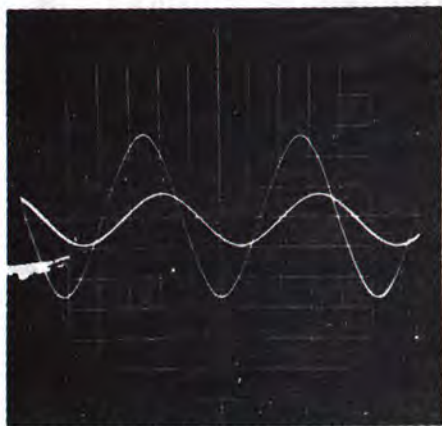
a. — Les faits observés.

Le circuit étant alimenté en courant alternatif par une prise de courant du secteur, faisons varier l'inductance L :

1° La valeur efficace I de l'intensité (lue sur l'ampèremètre; fig. 4) varie *en sens contraire*; elle diminue quand L augmente et vice versa.

La valeur efficace U de la d. d. p. entre M et N (lue sur le voltmètre; fig. 4) ne change pratiquement pas; on comprend pourquoi en remarquant que cette d. d. p. est pratiquement égale à celle qu'impose le secteur entre les bornes de la prise de courant.

Nous en déduisons que *l'impédance $Z = U/I$ de la portion de circuit MN varie dans le même sens que l'inductance L* ; de plus, si nous comparons Z à R , nous constatons que *l'impédance est toujours supérieure à la résistance*.



Le cas d'une bobine :
L'intensité i est en retard par rapport à la d. d. p. u .

2° L'examen des courbes fournies par l'oscilloscope (montage de la fig. 3 et courbes de la fig. 5-b) met en évidence une *avance horaire* θ du graphe $u = f_2(t)$ sur le graphe $i = f_1(t)$, ce qui correspond à un **déphasage avance**

φ (1) de la d. d. p. $v_M - v_N = u$ sur l'intensité i (ou, ce qui revient au même, à un déphasage

retard — φ de l'intensité par rapport à la d. d. p.). Il montre de plus que **ce déphasage φ varie dans le même sens que l'inductance L** .

b. — L'interprétation des faits; le calcul de l'impédance et du déphasage.

Admettons que le courant est sinusoïdal, d'intensité instantanée :

$$i = I_m \sin \omega t = I \sqrt{2} \sin \omega t$$

Les variations de cette intensité engendrent dans la bobine une **force électromotrice d'auto-induction**, de valeur instantanée (p. 234) :

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

Il en résulte que la différence de potentiel instantanée $v_M - v_N$ a pour expression algébrique (1) :

$$v_M - v_N = u = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Or :

$$\frac{di}{dt} = I \sqrt{2} \omega \cos \omega t = I \sqrt{2} \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Par suite :

$$u = RI \sqrt{2} \sin \omega t + LI \sqrt{2} \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

La d. d. p. u est la somme de deux fonctions sinusoïdales ayant la même pulsation que le courant : c'est donc aussi une **fonction sinusoïdale de même pulsation que le courant**.

Son expression est :

$$u = U_m \sin (\omega t + \varphi) = U \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi).$$

La **construction de Fresnel** (§ 2, p. 155) donne graphiquement la valeur efficace U de cette d. d. p. et son **déphasage φ** par rapport à l'intensité (fig. 6-a et b); on en déduit la représentation graphique de l'impédance $Z = U/I$ de la portion de circuit MN en fonction de ses caractéristiques R et L et de la pulsation ω du courant (fig. 6-c).

(1) Un sens positif de circulation ayant été choisi sur le circuit, convenons de compter *positivement* :

— d'une part, l'intensité I du courant lorsque celui-ci circule dans le sens positif;

— d'autre part, les forces électromotrices lorsqu'elles tendent à faire circuler un courant d'intensité positive.

La valeur algébrique de la d. d. p. entre les extrémités d'une portion de circuit, de résistance totale R , dans laquelle existe une f. e. m. E , a alors pour expression :

$$U = RI - E$$

Cette relation, établie en courant continu, s'applique en courant alternatif aux valeurs instantanées :

$$u = Ri - e$$

E et e représentent des forces électromotrices ou contre-électromotrices selon qu'elles ont le signe de l'intensité ou le signe contraire.

(1) Pour un courant sinusoïdal de pulsation ω , on a : $\varphi = \omega\theta$ (§ 6 de la p. 156).

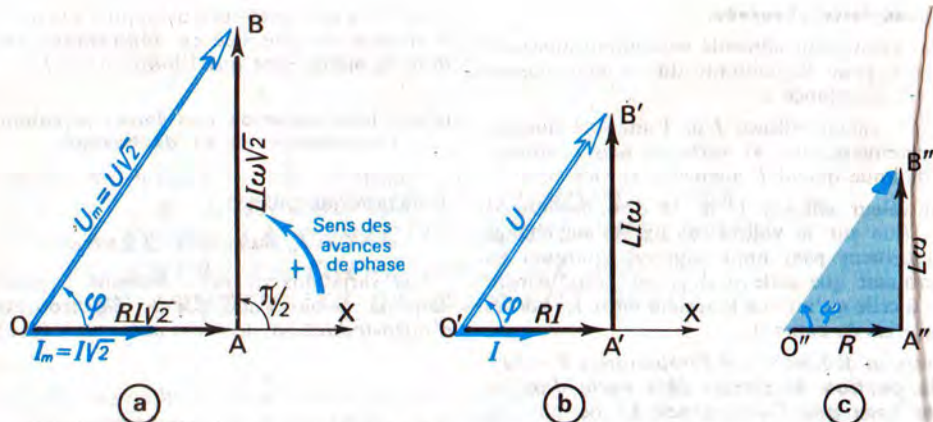


Fig. 6. — La construction de Fresnel.

a) Sur l'axe OX on porte le vecteur $\vec{OA}$, de module $RI/\sqrt{2}$, puis, déphasé de $\pi/2$ dans le sens des avances, le vecteur $\vec{AB}$, de module $L\omega\sqrt{2}$; le vecteur $\vec{OB}$ représente alors la tension cherchée :

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Le vecteur $\vec{I}_m$ représentant l'intensité i serait porté par l'axe OX , tout comme le vecteur $\vec{OA}$ qui représente le produit Ri ; il en résulte que l'angle (OX, OB) représente le déphasage de la tension u par rapport à l'intensité i .

b) Une similitude de rapport $1/\sqrt{2}$ donne immédiatement le diagramme des valeurs efficaces.

c) Compte tenu de la relation $U = ZI$, une autre similitude de rapport $1/I$ donne le diagramme de l'impédance Z .

Il est d'ailleurs facile de préciser par le calcul les valeurs de Z et de φ , puisque les vecteurs représentés forment un triangle rectangle :

$$(4) \quad Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z \text{ et } R \text{ en ohm ;} \\ L \text{ en henry ;} \\ \omega \text{ en rd/s.} \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L \omega}{R}$$

La même construction fournit de plus une relation utile entre le déphasage φ et l'impédance Z :

$$(6) \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

L'ensemble de ces résultats est bien conforme aux faits observés; en effet :

— La relation (4) montre que l'impédance Z varie dans le même sens que le produit $L\omega$; la d. d. p. efficace U étant imposée par le secteur, l'intensité efficace $I = \frac{U}{Z}$ diminue donc lorsque l'inductance L augmente. Les électriciens expriment ce fait en disant qu'une bobine étouffe le

courant; notons que cet affaiblissement de l'intensité efficace est d'autant plus marqué que la fréquence du courant ($f = \frac{\omega}{2\pi}$) est plus élevée :

quelques spires de fil de cuivre, qui constituent une résistance négligeable pour un courant continu, suffisent à annuler pratiquement un courant alternatif de haute fréquence.

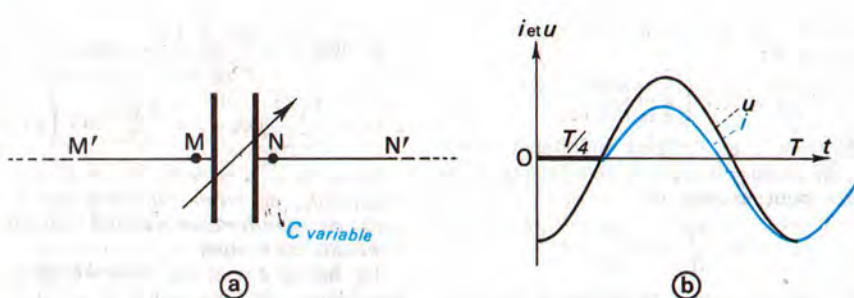
— La relation (5) montre d'autre part que le déphasage augmente avec le produit $L\omega$; l'avance de la d. d. p. u sur l'intensité i est donc d'autant plus importante que l'inductance L est plus grande.

Remarques.

1° — Si l'inductance L est assez faible pour que le produit $L\omega$ soit négligeable devant R , les relations (4) et (5) donnent :

$$Z \approx R; \quad \operatorname{tg} \varphi \approx 0, \text{ d'où } \varphi \approx 0.$$

L'impédance se confond alors avec la résistance, le courant a pour intensité efficace $I \approx \frac{U}{R}$ et u est en phase avec i ; nous retrouvons les résultats établis pour une résistance pure.



7. Fig. — La portion de circuit MN est constituée par un condensateur de capacité variable C .

2° — Par contre, si R est négligeable devant $L\omega$, on a affaire à une **inductance pure**; dans ce cas :

$$Z \approx L\omega; \quad \operatorname{tg} \varphi \approx \infty, \quad \text{d'où } \varphi \approx \pi/2.$$

L'impédance est proportionnelle à l'inductance et à la fréquence f du courant et la d. d. p. u est en *quadrature avance* par rapport à l'intensité i .

Exemple numérique.

Supposons qu'une bobine sans noyau de fer, dont l'inductance est $L = 0,02$ henry et la résistance $R = 2$ ohms, soit branchée sur une prise de courant du secteur (fréquence $f = 50$ Hz; pulsation $\omega = 2\pi N = 100\pi$ rd/s). Calculons son impédance et le déphasage de la d. d. p. entre ses extrémités par rapport à l'intensité i du courant qui la traverse :

$$1^\circ Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} = \sqrt{4 + (4 \times 10^{-4} \times 10^4 \pi^2)} \approx 6,63 \Omega$$

Ainsi, l'impédance Z vaut plus de 3 fois la résistance R .

$$2^\circ \operatorname{tg} \varphi = \frac{L \omega}{R} = \frac{0,02 \times 100 \pi}{2} \approx 3,14$$

D'où : $\varphi \approx 1,107$ rd (soit : $72^\circ 1/2$).

Avec un noyau de fer, la même bobine aurait une inductance plusieurs centaines de fois plus grande, d'où un produit $L\omega$ devant lequel R serait négligeable; le déphasage serait très voisin de $\pi/2$ (quadrature) et l'impédance ($Z \approx L\omega$) atteindrait plusieurs centaines d'ohms.

Pour un courant de haute fréquence (tel que $\omega \approx 10^6$ rd/s par exemple) la même bobine, sans fer, présenterait une impédance ($Z \approx L\omega$) de l'ordre de 20 000 ohms !

4. L'influence de la capacité.

Dans les montages des figures 3 et 4, nous plaçons cette fois, entre M et N, une batterie de condensateurs équivalente à un condensateur unique dont nous pouvons augmenter ou diminuer la capacité C en augmentant ou diminuant le nombre des éléments associés en parallèle (fig. 7-a).

a. — Les faits observés.

1° L'ampèremètre décèle le passage d'un courant dans le circuit (malgré la présence des lames isolantes entre les armatures des condensateurs) et il indique que l'intensité efficace I de ce courant augmente avec la capacité. Comme la d. d. p. efficace lue sur le voltmètre conserve une valeur pratiquement constante U imposée par le secteur, nous en déduisons que **l'impédance $Z = U/I$ de la portion de circuit MN diminue quand la capacité augmente.**

2° L'examen des graphes $i = f_1(t)$ et $u = f_2(t)$ fournis par l'oscilloscope électronique montre d'autre part que la d. d. p. u entre M et N est en retard d'un quart de période sur l'intensité i du courant, (fig. 7-b), ce qui correspond à un déphasage $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (rd); **la différence de potentiel aux bornes du condensateur est donc en quadrature retard par rapport à l'intensité du courant circulant dans le circuit, et cela quelle que soit la valeur de la capacité.**

b. — L'interprétation.

Les armatures du condensateur étant reliées aux bornes d'une prise de courant alternatif, il existe entre ces armatures une différence de potentiel alternative. Par suite, au cours de chaque période T , le condensateur se charge et se décharge pendant la première alternance, puis se recharge en sens inverse et se décharge à nouveau pendant la seconde alternance.

Cette suite ininterrompue de charges et de décharges alternées implique un mouvement alternatif des électrons libres à travers chaque section des fils de jonction M'M et NN' (fig. 7-a), donc l'existence d'un courant alternatif dans ces fils.

Soit u la d. d. p. entre M et N à un instant

quelconque t ; au même instant, la charge du condensateur est :

$$q = Cu \begin{cases} C \text{ en farad ;} \\ u \text{ en volt ;} \\ q \text{ en coulomb.} \end{cases}$$

Entre l'instant t et l'instant infiniment voisin $t + dt$, la charge variant de dq , l'intensité du courant a pour expression :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

Ainsi, à chaque instant, la différence de potentiel u entre M et N et l'intensité i du courant circulant dans les fils joignant M et N à la prise de courant sont liées par la relation :

$$\frac{du}{dt} = \frac{i}{C}$$

Comme $\frac{du}{dt}$ représente la dérivée par rapport au temps de la d. d. p. u , nous obtiendrons la fonction $u = f(t)$ en prenant la primitive de $\frac{i}{C}$ par rapport au temps.

Admettons que le courant soit *sinusoidal*, d'intensité :

$$i = I \sqrt{2} \sin \omega t$$

Il vient ⁽¹⁾ : $\frac{du}{dt} = \frac{I \sqrt{2}}{C} \sin \omega t$

$$u = -\frac{I \sqrt{2}}{C \omega} \cos \omega t = \frac{I \sqrt{2}}{C \omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (7)$$

Ainsi, la d. d. p. entre M et N est elle aussi *sinusoidale*, de même pulsation que le courant, mais *en quadrature retard* par rapport à l'intensité du courant.

La figure 8 met en évidence les variations simultanées de l'intensité i et de la d. d. p. u (qui sont aussi celles de $q = Cu$, au facteur constant C près).

La d. d. p. u est de la forme :

$$u = U \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

En comparant avec (7) on obtient la relation entre les valeurs efficaces U et I de la d. d. p. et de l'intensité :

$$U = \frac{I}{C \omega}$$

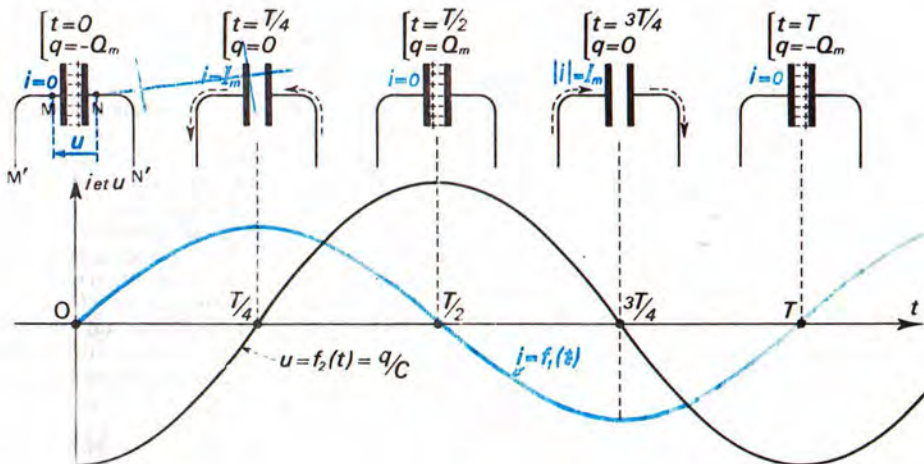
⁽¹⁾ En tenant compte du fait que la d.d.p. est *alternative* par hypothèse, donc que la constante d'intégration est nécessairement *nulle* puisque u s'annule deux fois par période.

Fig. 8. — Les charges et décharges alternées du condensateur et le courant alternatif qui en résulte dans les fils de jonction.

Les flèches en pointillé indiquent le sens du déplacement des électrons libres à l'instant considéré. On peut voir

— que le condensateur se charge, se décharge, se recharge au sens contraire, se décharge à nouveau et ainsi de suite, chaque charge ou décharge s'effectuant en un quart de période.

— que le graphe $u = f_2(t)$ est en retard de $T/4$ sur le graphe $i = f_1(t)$.



On en déduit l'expression de l'impédance $Z = U/I$ de la portion du circuit MN constituée par un condensateur de capacité C :

$$(8) \quad Z = \frac{1}{C\omega} \quad \left\{ \begin{array}{l} C \text{ en farad;} \\ \omega \text{ en rd/s;} \\ Z \text{ en ohm.} \end{array} \right.$$

Ainsi, l'impédance d'une portion de circuit réduite à un condensateur est inversement proportionnelle à la capacité du condensateur et à la fréquence $\left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right)$ du courant.

Exemple numérique.

Supposons que la d. d. p. u imposée aux extrémités d'une portion de circuit ne comprenant qu'un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$ soit alternative, de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ et de valeur efficace $U = 115 \text{ V}$. Calculons l'impédance de la portion de circuit et l'intensité efficace du courant alternatif obtenu :

$$1^\circ Z = \frac{1}{C\omega}; \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \approx 314 \text{ rd/s}$$

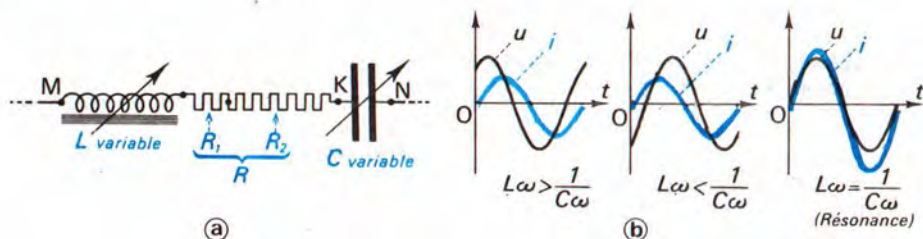
$$\text{D'où : } Z \approx \frac{1}{10^{-5} \times 314} \approx 320 \Omega$$

$$2^\circ I = \frac{U}{Z} = UC\omega \approx 115 \times 10^{-5} \times 314 \approx 0,36 \text{ A}$$

Si la tension imposée avait une fréquence « musicale » de l'ordre de 1000 Hz ($= 50 \times 20$), l'impédance Z serait 20 fois plus faible; pour une haute fréquence de l'ordre de 10^6 Hz , elle deviendrait négligeable (chap. 26).

5. La portion de circuit comporte à la fois résistance, inductance et capacité.

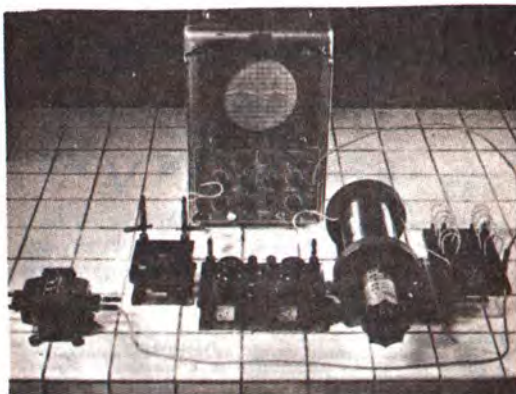
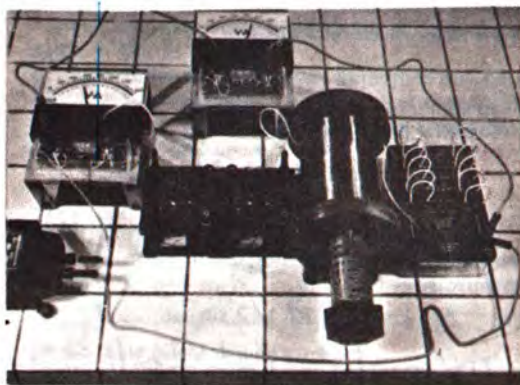
Entre M et N (fig. 3 et 4), disposons en série la bobine à noyau de fer doux, la résistance pure et la batterie de condensateurs déjà utilisées; nous réalisons ainsi une portion de circuit MN de résistance constante R , d'inductance variable L et de capacité variable C (fig. 9).

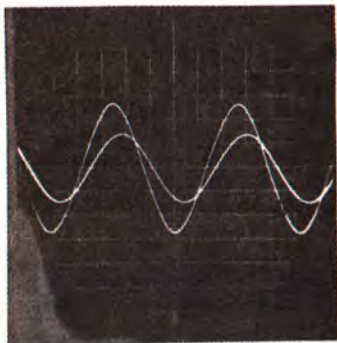


▲ Fig. 9. — Le cas général d'une portion de circuit « RLC ».

▼ Le montage de l'expérience :

a) avec ampèremètre et voltmètre. b) avec oscilloscope électronique.

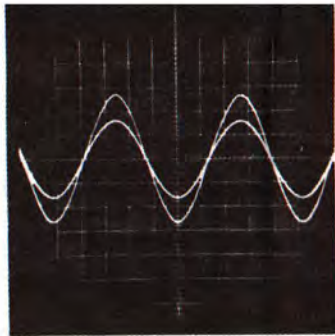




(a)
 $L\omega > \frac{1}{C\omega}$



(b)
 $L\omega < \frac{1}{C\omega}$



(c)
 $L\omega = \frac{1}{C\omega}$

a. — Les faits observés.

1° En donnant à l'inductance L une valeur convenable, puis en augmentant progressivement la capacité C sans modifier L , on peut construire point par point la courbe représentant les variations de l'intensité efficace en fonction de C ; elle a l'aspect des courbes de résonance obtenues en Mécanique et indique l'existence d'un maximum de l'intensité efficace (fig. 10).

Comme, d'autre part, la d.d.p. efficace entre M et N conserve une valeur pratiquement constante U imposée par le secteur, nous constatons que l'impédance $Z = U/I$ de la portion de circuit MN passe par un minimum égal à la résistance R lorsque l'intensité efficace I est maximale.

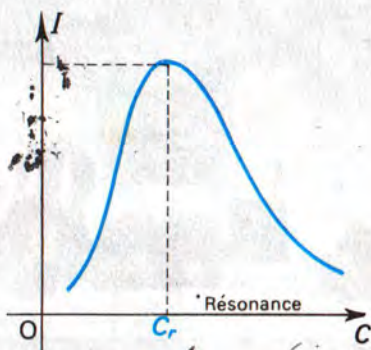


Fig. 10.

2° L'examen des graphes $i = f_1(t)$ et $u = f_2(t)$ fournis par l'oscilloscope électronique montre en outre que la d.d.p. u entre M et N est en avance ou en retard sur l'intensité i du courant suivant que l'effet d'inductance l'emporte ou non sur l'effet de capacité, sauf dans les conditions de la résonance, pour lesquelles on observe à la fois un déphasage nul entre u et i et un maximum d'amplitude pour l'intensité i (fig. 9-b).

b. — L'interprétation.

Comme précédemment, nous admettrons que le courant est sinusoïdal, d'intensité instantanée :

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t$$

Entre M et K (fig. 9-a), la différence de potentiel instantanée a pour expression algébrique (§ 3-b) :

$$v_M - v_K = RI\sqrt{2} \sin \omega t + LI\sqrt{2} \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

D'autre part, entre K et N (§ 4-b) :

$$v_K - v_N = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Or, à chaque instant, la d.d.p. entre M et N est égale à la somme des d.d.p. entre M et K et entre K et N :

$$v_M - v_N = u = RI\sqrt{2} \sin \omega t + LI\sqrt{2} \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Cette somme de trois fonctions sinusoïdales

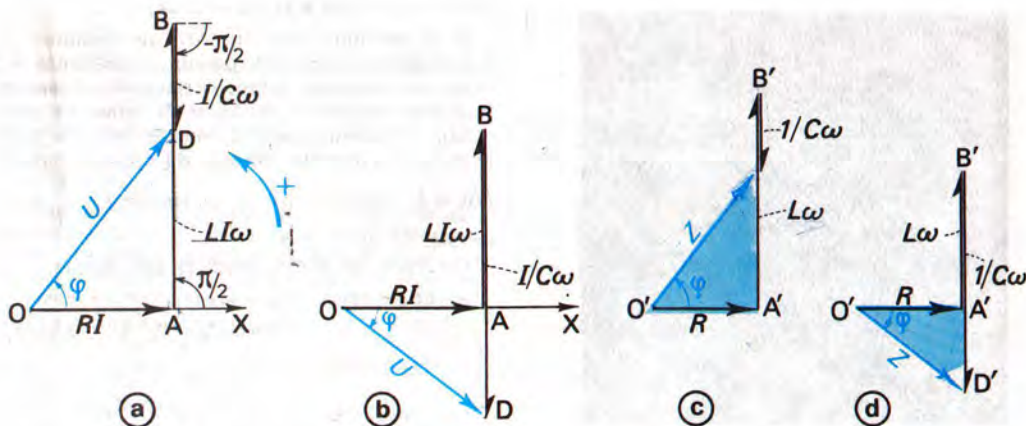


Fig. 11. — La construction de Fresnel.

On fait la somme géométrique des vecteurs :

$\vec{OA}$, de module RI et de support $\vec{OX}$;

$\vec{AB}$, de module $L\omega$ et faisant $\pi/2$ avec $\vec{OX}$;

$\vec{BD}$, de module $I/C\omega$ et faisant $-\pi/2$ avec $\vec{OX}$.

En *a*, l'influence de l'inductance l'emporte sur celle de la capacité, alors que c'est le contraire en *b*.

Compte tenu de la relation $U = ZI$, une similitude de rapport $1/I$ donne les diagrammes correspondants de l'impédance Z (fig. *c* et *d*).

de même pulsation ω est aussi une fonction sinusoïdale de pulsation ω , de la forme :

$$u = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

La **construction de Fresnel** (à partir des vecteurs représentant les d.d.p. efficaces) donne graphiquement la valeur efficace U de la d.d.p. u et son déphasage φ par rapport à l'intensité i (fig. 11-*a* et *b*). On en déduit la représentation graphique de l'impédance Z de la portion de circuit MN en fonction des caractéristiques R , L et C de cette portion de circuit et de la pulsation ω (fig. 11-*c* et *d*).

La relation de Pythagore, appliquée aux côtés du triangle rectangle $O'A'D'$, permet d'expliciter $Z = f(R, L, C, \omega)$ et de calculer la valeur algébrique du déphasage φ :

$$\begin{aligned} (9) \quad Z &= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ (10) \quad \operatorname{tg} \varphi &= \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z \text{ et } R \text{ en } \Omega; \\ L \text{ en } H; \\ C \text{ en } F; \\ \omega \text{ en } \text{rd/s.} \end{array} \right.$$

On a de plus, comme au § 3 :

$$(11) \quad \cos \phi = \frac{R}{Z}$$

Remarques.

Les relations (9) et (10) donnent :

1° Pour $L = 0$ et $C^{(1)} = \infty$,

$$Z = R; \quad \operatorname{tg} \varphi = 0, \text{ d'où } \varphi = 0.$$

Nous retrouvons les résultats relatifs à une **résistance pure**;

2° Pour $C = \infty$,

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

c'est la **bobine** seule ou en série avec une résistance pure;

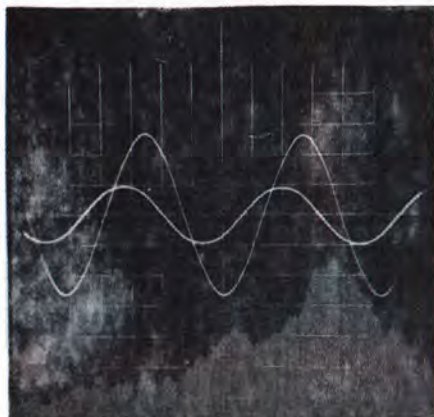
3° Pour $L = 0$,

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{CR\omega}$$

c'est le cas d'une portion de circuit comprenant une **résistance pure en série avec un condensateur** (photo de la p. 248);

(1) Supprimer le condensateur revient à rapprocher ses armatures jusqu'à les mettre en contact, donc à diminuer jusqu'à l'annuler l'épaisseur e du diélectrique, ce qui fait tendre la capacité vers l'infini.

$C = 0$ correspondrait au contraire à une distance infiniment grande entre les armatures, donc, pratiquement, à l'ouverture du circuit.



Le cas d'une résistance en série avec un condensateur :

L'intensité i est en avance sur la d. d. p. u .

4° Pour $R = 0$ et $L = 0$,

$$Z = \frac{1}{C\omega}; \quad \text{tg } \varphi = -\infty, \text{ d'où : } \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

c'est le **condensateur seul** (ou capacité pure).

c. — Le cas particulier de la résonance.

L'inductance de la bobine ayant une valeur donnée L , si la capacité du condensateur prend la valeur C_r telle que :

$$L\omega - I/C_r\omega = 0, \quad \text{ou} \quad \boxed{LC_r\omega^2 = 1}$$

on dit qu'il y a **résonance**, pour une raison liée au fait que C_r est précisément l'abscisse du maximum de la courbe $I = f(C)$ (fig. 10). Les relations (9) et (10) donnent alors :

$$Z = R; \quad \text{tg } \varphi = 0, \text{ d'où : } \varphi = 0$$

Ainsi :

1° L'impédance est égale à la résistance et elle est minimale; corrélativement, l'intensité $I = U/Z$ est maximale ;

2° La d.d.p. instantanée entre M et N est en phase avec l'intensité instantanée.

On en conclut qu'à la résonance les deux effets antagonistes de l'inductance L et de la capacité C se compensent mutuellement de telle sorte que la portion de circuit « $R L C$ » se comporte comme une résistance pure de valeur R .

Les surtensions à la résonance.

Si la portion de circuit MN ne comprenait que la bobine et le condensateur, sa résistance R , réduite à celle de la bobine, serait faible. Comme la d.d.p. efficace entre M et N conserve une valeur U pratiquement constante imposée par le secteur, l'intensité efficace du courant passerait, à la résonance, par un maximum $I = \frac{U}{R}$ très accusé.

Par suite, les d.d.p. efficaces aux bornes

— de la bobine : $U_B = Z_B I$
(avec $Z_B = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$);

— du condensateur : $U_C = Z_C I$
(avec $Z_C = \frac{1}{C_r \omega}$);

pourraient prendre des **valeurs très supérieures à la tension imposée entre M et N** (fig. 12).

Ces phénomènes de **surtensions à la résonance** ne sont pas sans danger; il peut y avoir risque d'électrocution, ou production d'étincelles entre les armatures du condensateur, perforant la diélectrique et mettant le condensateur hors d'usage. Aussi évite-t-on en général la résonance dans les circuits peu résistants alimentés en courants alternatifs de basse fréquence. Par contre, nous verrons qu'on lui fait jouer un rôle important dans le domaine des courants de haute fréquence.

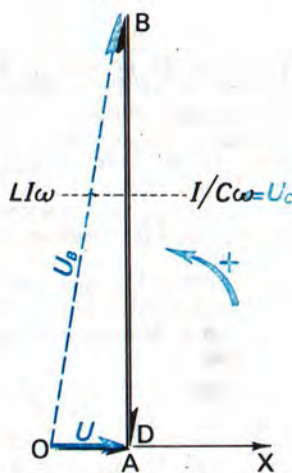


Fig. 12. — La construction de Fresnel, pour une portion de circuit « R, L, C » dans les conditions de la résonance.

EXERCICES

1. Une résistance pure de 40 ohms, parcourue par un courant alternatif, est immergée dans un calorimètre de valeur en eau totale 1 500 g. L'élévation de température est $3,16^\circ$ après 1 mn : calculer l'intensité efficace du courant et la d. d. p. efficace aux bornes de la résistance.

2. Une bobine d'électro-aimant est traversée par un courant de 12 A quand on applique entre ses bornes une tension continue de 120 V. Sous une tension alternative de valeur efficace 120 V et de fréquence 50 Hz, l'intensité efficace dans la bobine tombe à 5 A ; calculer l'inductance de cette bobine et le déphasage intensité-tension.

Rép. : $L \approx 0,07$ henry ; $\varphi \approx 1,14$ radian $\approx 65^\circ$.

3. Entre les bornes d'une prise de courant alternatif ($U = 110$ volts ; $f = 50$ Hz) on branche une lampe électrique de résistance (à chaud) égale à 200 ohms ; calculer l'intensité efficace du courant dans la lampe et la variation relative de cette intensité si, au lieu d'être nulle, l'inductance de la lampe vaut 0,001 henry.

4. Une portion de circuit comprenant une lampe (de résistance à chaud $R = 300$ ohms) et un condensateur est branchée entre les bornes d'une prise de courant alternatif ($U = 120$ V ; $f = 50$ Hz). Calculer la capacité pour laquelle l'intensité efficace est 0,24 ampère et donner l'expression de l'intensité instantanée en fonction du temps.

Rép. : $C = 8 \mu\text{F}$; le déphasage est : $\varphi \approx 0,93$ radian et, pour une tension $u = 120 \sqrt{2} \sin 314 t$, on a une intensité : $i = 0,34 \sin (314 t + 0,93)$.

5. Calculer les d. d. p. efficaces aux bornes de la lampe et aux bornes du condensateur utilisés dans les conditions de l'exercice n° 4 ; donner les expressions des deux d. d. p. instantanées en fonction du temps et les représentations vectorielles correspondantes.

6. Une portion de circuit comprenant en série une lampe ($R = 300 \Omega$; $L \approx 0$), une inductance pure ($L = 1$ H ; $R \approx 0$) et un condensateur ($C = 20 \mu\text{F}$) est branchée sur une prise de courant alternatif ($U = 120$ V ; $f = 50$ Hz) ; trouver l'intensité efficace du courant obtenu, le déphasage de l'intensité par rapport à la tension imposée et les tensions efficaces aux bornes des 3 appareils. (On prendra $\pi^2 \approx 10$).

Rép. : $I \approx 0,35$ A ; $\varphi \approx 0,48$ radian ; $U_1 \approx 105$ V ; $U_2 \approx 110$ V ; $U_3 \approx 55$ V.

7. Sur une prise de courant entre les bornes de laquelle le secteur maintient une d. d. p. sinusoïdale de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $U = 115$ V on branche une portion de circuit comprenant une bobine ($R = 1 \Omega$ et $L = 1$ H) et un condensateur. On demande :

1° La capacité que doit avoir le condensateur pour qu'il y ait résonance ;

2° L'intensité efficace du courant à la résonance ;

3° Les valeurs maximales des d. d. p. qui existent alors entre les extrémités, d'une part de la bobine, d'autre part du condensateur ;

4° La différence de phase entre ces deux d. d. p.

8. On établit une tension alternative de pulsation ω entre les bornes A et C d'un circuit comprenant un condensateur D en série avec une bobine AB ayant une résistance R et une inductance L (fig. 13).

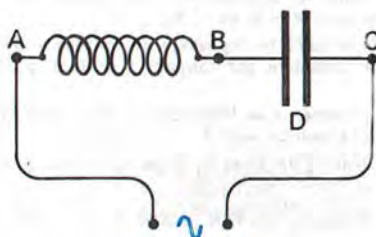


Fig. 13.

L'intensité efficace du courant étant 0,2 ampère, la mesure des tensions efficaces fournit les résultats suivants :

$$U_{AC} = 120 \text{ volts}$$

$$U_{AB} = 160 \text{ volts}$$

$$U_{BC} = 56 \text{ volts}$$

1° Calculer les impédances de la bobine et du condensateur et la résistance de la bobine.

2° Représenter l'intensité et les tensions en utilisant la construction de Fresnel. Calculer le déphasage de l'intensité par rapport à la tension imposée entre A et C.

3° Sachant qu'un courant de pulsation $\omega' = 250$ rd/s traversant le même circuit serait exactement en phase avec la tension qui existerait alors entre les extrémités A et C de ce circuit, déterminer les valeurs de l'inductance et de la capacité.

Quelle est la valeur de la pulsation ω ? Quelle est la fréquence correspondant à cette pulsation ?

(Partie de probl. de bacc.).

Rép. : 1° 800 Ω ; 280 Ω ; 480 Ω . 2° $\varphi \approx 0,63$ rd. 3° $L \approx 1,69$ H ; $C \approx 9,45 \mu\text{F}$; $\omega \approx 378$ rd/s ; $f = 60$ Hz.

9. Dans deux branches en parallèle d'un circuit passent deux courants alternatifs de même fréquence. L'intensité efficace du premier égale 9 ampères, celle du second 12 ampères. L'intensité du second est en retard d'un quart de période sur celle du premier. Calculer l'intensité efficace I du courant qui résulte de leur superposition dans la partie du circuit où existe un fil unique. Quelles sont les différences de phase de ce courant avec les courants dérivés ?

N. B. L'intensité instantanée du courant total est égale à la somme des intensités instantanées des cou-

rants dérivés. Tout revient donc à une somme d'intensités sinusoïdales de même fréquence que l'on obtient par la construction de Fresnel.

10. Une portion de circuit se partage, entre deux de ses points M et N, en deux dérivation. L'une des dérivation est constituée par une résistance pure $R = 200 \Omega$, l'autre par une bobine de résistance R' et l'inductance L' . Dans le circuit principal et les deux dérivation circulent des courants sinusoïdaux de même fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ mais n'ayant pas la même phase. Sachant que les intensités efficaces sont égales dans les deux dérivation et que l'intensité efficace est $\sqrt{3}$ fois plus grande dans le circuit principal, on demande :

1° de faire la construction de Fresnel pour les intensités (voir le N.B. du n° 9);

2° d'en déduire le déphasage de l'intensité dans la résistance inductive par rapport à la d. d. p. entre M et N;

3° de montrer que l'impédance de la bobine est égale à la résistance pure $R = 200 \Omega$;

4° de déduire du 2° et du 3° les valeurs de R et de L' .

Rép. : 2° $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$; 4° $R' = 100 \Omega$; $L' \approx 0,55 \text{ H}$.

11. « Circuit bouchon ». — Aux bornes A et B d'une prise de courant entre lesquelles le secteur maintient une tension sinusoïdale de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, on branche les extrémités d'un circuit qui comporte entre M et N deux dérivation MCN et MLN (fig. 14). La branche MCN est un condensateur seul, de capacité $C = 1 \mu\text{F}$; la branche MLN est une inductance pratiquement pure, de valeur L . On admet que la tension entre M et N est pratiquement celle qui est imposée entre A et B et qu'elle a pour expression :

$$u = U_m \sin \omega t$$

On demande :

1° de trouver les expressions des intensités instantanées dans les deux dérivation;

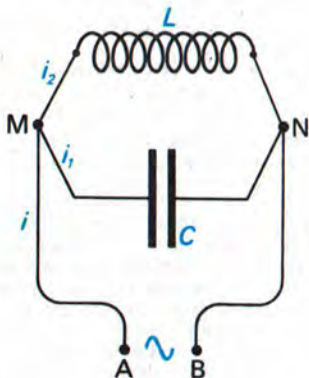


Fig. 14.

2° de faire la construction de Fresnel pour les intensités (voir le N.B. du n° 9) et d'en déduire le déphasage de l'intensité du courant principal (en AM et NB) par rapport à la tension imposée (interpréter les deux cas de figure);

3° de calculer la valeur de L pour laquelle le courant principal est constamment nul.

12. Problème récapitulatif. — On a monté en série une bobine et une corde vibrante tendue par

un poids p , entre le point fixe B et une poulie en cuivre. La bobine et la corde sont constituées par le même fil de cuivre (diamètre = 0,2 mm; densité = 8,8; résistivité = $1,6 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$).

La partie vibrante de la corde, AB, a une longueur de 1 m et se trouve placée entre les pôles N et S d'un aimant. La bobine, qui comprend 200 spires de diamètre 10 cm, est plongée dans un calorimètre dont la valeur en eau est 6 kg (fig. 15).

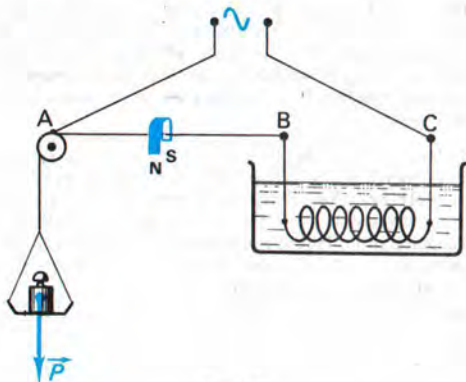


Fig. 15.

On applique entre les extrémités A et C du conducteur ainsi formé une d. d. p. de valeur instantanée :

$$u = 120 \sqrt{2} \sin(100 \pi t)$$

et l'on constate que le calorimètre s'échauffe de 3°C en 10 mn.

1° Étudier le mouvement de la corde et calculer

l'intensité du poids p pour laquelle la corde vibre en un seul fuseau avec une amplitude maximale.

2° Calculer :

a) la résistance r_1 du fil AB et la résistance r_2 de la bobine;

b) l'intensité efficace du courant;

c) l'inductance L de la bobine.

3° Quelle devrait être la capacité d'un condensateur, monté en série avec le conducteur précédent, pour avoir l'intensité maximale et quelle serait alors la tension efficace aux bornes du condensateur ? ($g \approx 10 \text{ u. SI}$; $\pi^2 \approx 10$).

(Bacc.).

Rép. : 1° $p \approx 2,76 \text{ N}$; 2° $r_1 \approx 0,51 \Omega$; $r_2 = 32 \Omega$. $I \approx 1,98 \text{ A}$; $L \approx 0,161 \text{ H}$; 3° $C \approx 62 \mu\text{F}$; $U_c \approx 190 \text{ V}$.

LA PUISSANCE MOYENNE LE FACTEUR DE PUISSANCE

1. La définition et l'expression de la puissance moyenne et du facteur de puissance.

a. — En courant *continu*, si I désigne l'intensité du courant traversant une portion de circuit quelconque MN et U la différence de potentiel entre M et N, l'énergie électrique consommée dans la portion de circuit pendant un temps t a pour expression :

$$W = UIt \begin{cases} U \text{ en volt;} \\ I \text{ en ampère;} \\ t \text{ en seconde;} \\ W \text{ en joule.} \end{cases}$$

On en déduit celle de la *puissance électrique consommée* entre M et N, numériquement égale à l'énergie consommée par unité de temps :

$$P \text{ (watt)} = \frac{W}{t} = UI$$

En courant *alternatif*, si l'intensité instantanée est *sinusoïdale*, de la forme :

$$i = I \sqrt{2} \sin \omega t,$$

nous avons vu que la d.d.p. entre M et N (fig. 1) est au même instant t :

$$v_M - v_N = u = U \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi)$$

Il en résulte que **la valeur instantanée p de la puissance consommée, liée à i et à u par la même relation, $p = ui$, qu'en continu, varie à chaque instant.**

En fonction de p , l'expression de l'énergie électrique consommée entre M et N est :

— au cours de l'intervalle de temps infiniment petit séparant l'instant t de l'instant infiniment voisin $t + dt$:

$$dW = p dt$$

— et au cours d'une période T du courant :

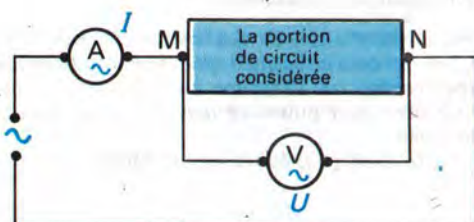


Fig. 1.

$$W_T = \int_0^T dW = \int_0^T p dt$$

Le quotient :

$$P = \frac{W_T}{T} = \frac{\int_0^T p dt}{T}$$

est, par définition, la **puissance moyenne** consommée dans la portion de circuit considérée; c'est la *valeur moyenne* de la puissance instantanée p pour un intervalle de temps égal à une période.

b. — Explicitons p :

$$p = ui = U \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) \cdot I \sqrt{2} \sin \omega t$$

$$\text{ou : } p = UI \times 2 \sin \omega t \cdot \sin (\omega t + \varphi),$$

qui peut encore s'écrire ⁽¹⁾ :

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos (2 \omega t + \varphi)$$

⁽¹⁾ En remarquant que :

$$2 \sin \omega t \cdot \sin (\omega t + \varphi) = \cos \varphi - \cos (2 \omega t + \varphi).$$

Le second terme de cette expression, étant une fonction *sinusoïdale* de pulsation 2ω (donc de période $T/2$), a une *valeur moyenne nulle* pour un intervalle de temps T (fig. 6 page 230); par suite, la valeur moyenne de la puissance instantanée p , pour une période T du courant, est égale au terme constant $UI \cos \varphi$:

$$P = UI \cos \varphi \quad (1)$$

Ainsi, la puissance électrique moyenne fournie par un courant sinusoïdal à une portion de circuit est égale au produit des trois facteurs :

— *différence de potentiel efficace* entre les extrémités de la portion de circuit;

— *intensité efficace* du courant;

— *cosinus de l'angle de déphasage* de la d.d.p. par rapport à l'intensité, facteur que l'on appelle le **facteur de puissance**.

c. — Le produit UI des valeurs efficaces de la d.d.p. et de l'intensité représente la **puissance apparente**; on l'exprime en *volt-ampère* (VA) pour distinguer puissance *apparente* et puissance *moyenne*.

La relation (1), écrite sous la forme :

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI}$$

montre que le **facteur de puissance est égal au quotient de la puissance moyenne par la puissance apparente**.

d. — **L'expression de l'énergie électrique consommée en fonction de la puissance moyenne.**

D'après la définition de la puissance moyenne, l'énergie électrique consommée est :

— pour une période T du courant : $W_T = P \cdot T$;

— pour un nombre entier k de périodes consécutives :

$$W = k \cdot PT = P \cdot kT$$

Comme les durées t envisagées dans les calculs de consommation d'énergie électrique sont toujours très grandes comparées à la période T , on peut les assimiler à des nombres entiers de périodes et écrire :

$$t \approx kT$$

$$(2) \quad W = P \cdot t \quad \begin{cases} P \text{ en Watt;} \\ t \text{ en seconde;} \\ W \text{ en joule.} \end{cases}$$

Ainsi, on obtient l'énergie électrique consommée dans une portion de circuit parcourue par un courant alternatif en multipliant la puissance moyenne par le temps de passage du courant.

2. L'application aux différents cas.

a. — Le cas d'une résistance pure.

Si la portion de circuit MN (fig. 1) est une résistance *pure* de valeur R , le déphasage d.d.p. — intensité est nul :

$$\cos \varphi = 1; \quad \text{d'où } P = UI$$

La puissance moyenne se confond avec la puissance apparente; sous réserve d'utiliser les valeurs *efficaces* U et I de la tension et de l'intensité, **les relations établies pour le courant continu s'appliquent au courant alternatif** :

$$P = UI; \quad U = RI$$

$$\text{D'où : } P = RI^2, \quad \text{ou : } P = U^2/R$$

$$\text{et : } W = Pt = UI t = RI^2 t = \frac{U^2}{R} t$$

En particulier, puisque les fils chauffants des appareils fondés sur l'effet Joule (radiateurs, fers à repasser, chauffe-eau électriques; lampes électriques à filament incandescent, ...) peuvent être considérés comme des résistances pratiquement *pures*, les calculs concernant ces appareils sont les mêmes en courant alternatif qu'en courant continu.

Exemple numérique.

On lit sur la plaque indicatrice d'un radiateur électrique : 220 V, 600 W. Proposons-nous de calculer la résistance R du fil chauffant, puis l'intensité efficace I du courant d'alimentation et la quantité de chaleur fournie par heure en régime normal d'utilisation :

1° Sous une tension efficace $U = 220$ V, le radiateur consomme une puissance électrique $P = 600$ W.

$$\text{De } P = \frac{U^2}{R}, \text{ nous tirons : } R = \frac{U^2}{P}$$

$$\text{Par suite : } R = \frac{220^2}{600} \approx 81 \, \Omega$$

2° En régime normal d'utilisation, c'est-à-dire si la valeur efficace de la tension alternative d'alimentation est bien 220 V, l'intensité efficace du courant qui traverse l'appareil est :

$$I = \frac{P}{U}; \quad I = \frac{600}{220} \approx 2,7 \text{ A}$$

3° La quantité de chaleur fournie en 1 heure a pour expression :

$$\begin{aligned} W &= Pt = 600 \text{ watts-heure,} \\ \text{soit : } 600 \times 3600 &= 2\,160\,000 \text{ joules,} \\ \text{ou encore, puisque } 1 \text{ kcal} &\approx 4\,185 \text{ J :} \\ \frac{2\,160\,000}{4\,185} &\approx 516 \text{ kcal} \end{aligned}$$

b. — Le cas d'une inductance pure.

La d.d.p. aux bornes est alors en *quadrature avance* par rapport à l'intensité du courant (revoir les remarques de la p. 247) :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0 \text{ et, par suite, } P = 0$$

La puissance moyenne est nulle.

C'est ainsi qu'une bobine en gros fil de cuivre, dont la résistance R est *négligeable* devant l'impédance ($Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \approx L\omega$), ne consomme pratiquement pas d'énergie électrique :

$$W = P \cdot t; \quad P \approx 0, \text{ d'où : } W \approx 0$$

Placée en série dans un circuit parcouru par un courant alternatif, une telle bobine dans laquelle on peut enfoncer plus ou moins un noyau de fer doux affaiblit d'autant plus l'intensité efficace du courant que son impédance $Z \approx L\omega$ est plus grande (fig. 15 de la p. 235). Elle joue donc le même rôle qu'un *rhéostat*, mais présente sur celui-ci l'avantage de ne pas gaspiller d'énergie électrique.

c. — Le cas d'un condensateur.

La d.d.p. entre les armatures d'un condensateur reliées aux bornes d'une prise de courant alternatif est en *quadrature retard* par rapport à l'intensité du courant circulant dans les fils de jonction (§ 4 du chap. précédent) :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0 \text{ et, par suite : } P = 0$$

Là encore, **la puissance moyenne est nulle**; l'énergie électrique qu'emmagasine le condensateur à chacune de ses charges est rendue au circuit au cours de la décharge qui suit.

d. — Le cas d'une portion de circuit « RLC ».

Nous savons que dans ce cas le déphasage φ de la d.d.p. aux bornes par rapport à l'intensité du courant dépend, en grandeur et en signe, des effets antagonistes de l'inductance et de la capacité (fig. 9-b de la p. 245).

S'il y a *résonance*, $\varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 1$; la puissance moyenne a même expression, $P = UI$, que dans le cas d'une résistance pure.

D'ailleurs, quel que soit φ , on a :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

D'où :

$$P = UI \cos \varphi = UI \cdot \frac{R}{Z}$$

$$\text{Et comme : } Z = \frac{U}{I}$$

$$P = UI \cdot \frac{R}{U/I} = \boxed{R I^2}$$

Ainsi, **toute la puissance électrique fournie**

par le courant à une portion de circuit « RLC » est transformée en chaleur par effet Joule. Ce résultat est conforme aux conclusions précédentes : l'existence d'une inductance et d'une capacité n'entraînant aucune consommation supplémentaire, la résistance R de la portion de circuit est seule responsable de la dissipation de l'énergie électrique.

Remarque.

Si la portion de circuit considérée comportait un *moteur à courant alternatif* transformant de l'énergie électrique en énergie mécanique, la puissance moyenne fournie par le courant aurait encore comme expression :

$$P = UI \cos \varphi$$

mais l'on aurait alors :

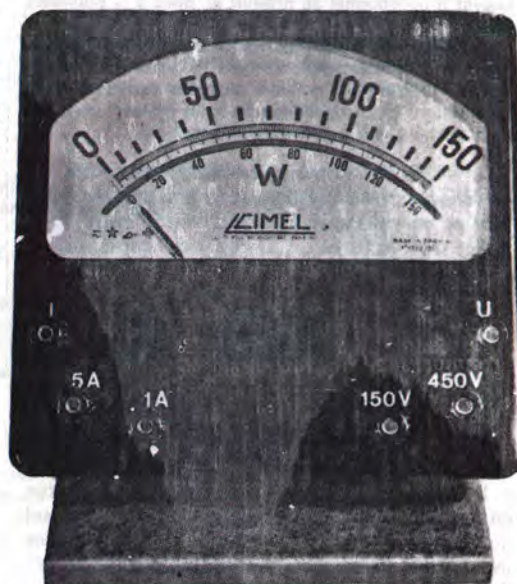
$$P > R I^2$$

la différence $P - R I^2$ étant pratiquement égale à la puissance mécanique du moteur.

3. La mesure de la puissance moyenne et du facteur de puissance.

a. — La puissance moyenne consommée dans une portion de circuit quelconque se mesure avec un **wattmètre** électrodynamique.

Wattmètre.



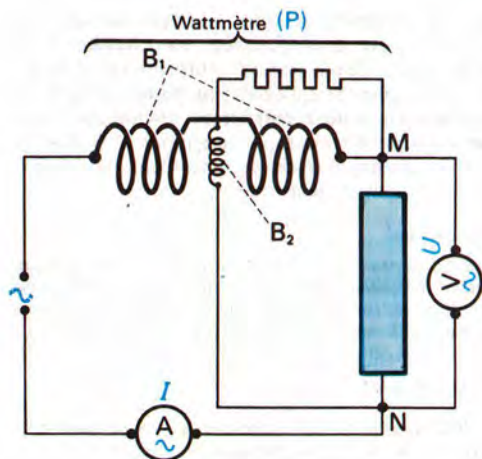


Fig. 2.

Un wattmètre comporte (fig. 2) :

— Une bobine fixe B_1 , peu résistante, disposée en série avec la portion de circuit MN où se consomme la puissance électrique que l'on mesure; elle est parcourue par le même courant i que cette portion de circuit;

— Une bobine mobile B_2 , associée à une résistance pure de forte valeur et branchée en dérivation entre M et N; le courant qui la traverse a une intensité proportionnelle à la d. d. p. $v_m - v_n = u$.

De l'action mutuelle de ces deux bobines résulte un couple électromagnétique dont le moment est à chaque instant proportionnel au produit ui , donc à la puissance instantanée $p = ui$.

Ce couple tend à faire tourner B_2 et, avec elle, l'aiguille indicatrice de l'appareil; comme cet équipement mobile a trop d'inertie pour pouvoir suivre les variations de p , sa rotation est proportionnelle à la valeur moyenne de p , c'est-à-dire à la puissance moyenne P .

b. — Si le montage comporte en outre un ampèremètre A en série avec la portion de circuit MN et un voltmètre V en dérivation entre M et N, les trois lectures : I , U et P donnent le *facteur de puissance* :

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI}$$

Remarque.

Les **compteurs** de nos installations domestiques comportent un petit disque métallique dont la vitesse de rotation est proportionnelle à la puissance moyenne P débitée.

Le nombre de tours que ce disque effectue en un temps t quelconque est donc proportionnel au produit $P \cdot t = W$, de sorte que les aiguilles indicatrices entraînées par le disque enregistrent directement l'énergie électrique W consommée dans l'installation durant le temps t .

4. L'importance du facteur de puissance.

Considérons une installation domestique ou industrielle branchée entre deux points M et N d'une ligne appartenant à un réseau de distribution de l'énergie électrique (fig. 3).

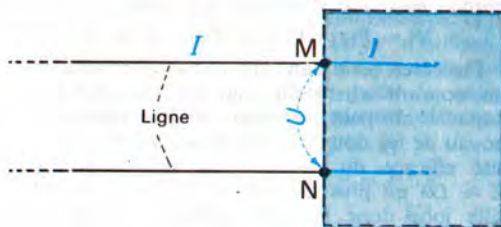
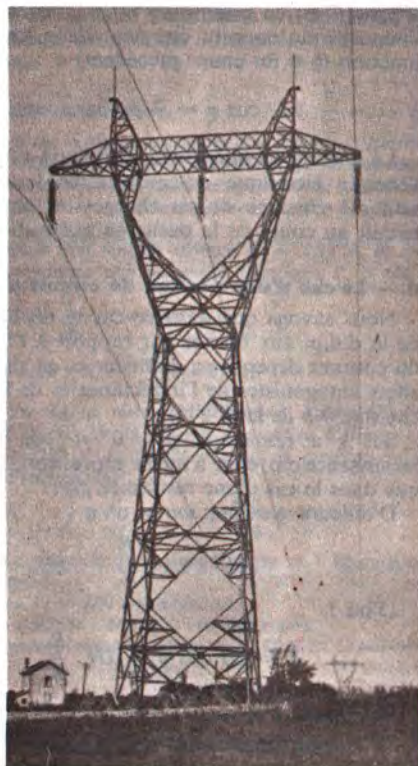


Fig. 3.



Une ligne de distribution d'énergie électrique.

L'E.D.F. maintient entre M et N une différence de potentiel u , sensiblement sinusoïdale, de valeur efficace U pratiquement constante.

A toute consommation d'énergie électrique entre M et N correspond le passage dans la ligne d'un courant alternatif dont l'intensité efficace I et le déphasage par rapport à la d.d.p. u dépendent des caractéristiques (R , L , C) des appareils mis en service dans l'installation.

Soit P la puissance moyenne consommée dans cette installation; de la relation :

$$P = U I \cos \varphi$$

nous tirons :

$$I \cos \varphi = \frac{P}{U}$$

Pour une valeur donnée de P , consommée et

payée par l'utilisateur, le quotient $\frac{P}{U}$ est déterminé

de sorte que **l'intensité efficace I du courant débité est d'autant plus grande que le facteur de puissance est plus faible**. Comme l'effet Joule dans la ligne est proportionnel à I^2 et constitue un gaspillage d'énergie aux frais de la compagnie distributrice, on comprend que les contrats d'abonnements industriels imposent aux usagers une valeur élevée du facteur de puissance, **généralement comprise entre 0,8 et 0,9**.

Si, par suite de l'inductance des enroulements des machines mises en service dans l'installation, le $\cos \varphi$ devient inférieur à 0,8, il y a pénalisation; par contre, si l'utilisateur compense cet effet d'inductance au moyen, par exemple, de condensateurs associés aux enroulements et amène, de ce fait, le $\cos \varphi$ à une valeur supérieure à 0,9, il reçoit une bonification.

EXERCICES

1. Une bobine sans noyau de fer est formée de 2 000 spires de 6 cm de diamètre, réparties uniformément sur une longueur de 40 cm. Cette bobine, en série avec une capacité réglable (boîte de condensateurs), une résistance morte $R = 60$ ohms et un milliampermètre, est reliée à une prise de courant alternatif sinusoïdal de fréquence 50 hertz, de tension efficace 120 volts. L'intensité efficace passe par un maximum : 1,5 ampère pour $C = 318$ microfarads.

On demande :

1° la valeur théorique de l'inductance de la bobine ;
2° la valeur de cette inductance déduite des résultats de l'expérience; expliquer le sens de la différence entre les deux valeurs trouvées;

3° la valeur de la résistance ohmique R' de la bobine ;

4° les valeurs instantanées des tensions aux bornes :

a) de la résistance morte ;

b) de la bobine ;

c) du condensateur ;

d) de la prise de courant.

On posera $i = I_m \sin 2\pi ft$ pour définir l'origine des temps.

5° Déterminer les puissances absorbées par la bobine, le condensateur et la résistance R . Comment peut-on calculer directement la puissance totale ?

6° Quelle est la valeur efficace de l'intensité lorsque la capacité prend une valeur sept fois plus petite, $C = 45,4$ microfarads ? Quels sont alors les valeurs instantanées des différentes tensions et le facteur de puissance de l'ensemble ?

2. Un wattmètre indique 220 watts dans une portion de circuit sous tension alternative de valeur efficace $U = 110$ volts; si l'ampèremètre du circuit indique 2,5 A, quel est le facteur de puissance ? Qu'indiquerait l'ampèremètre pour la même indication au wattmètre si la tension $U = 110$ volts était continue ?

Rép. : $\cos \varphi = 0,8$; $I = 2$ A.

3. 1° Entre deux points P et Q on maintient une différence de potentiel sinusoïdale qui est exprimée, en volt, par l'équation $u = 141,4 \sin \omega t$.

La pulsation ω est égale à 314 rd/s. Quelles sont la fréquence et la valeur efficace de cette tension ?

2° On relie P et Q par une résistance pure r et une bobine B, montées en série. L'intensité efficace du courant qui parcourt ce circuit est $I_1 = 10$ ampères. La différence de potentiel efficace aux bornes de r est 20 volts.

Quelle est la résistance r ?

3° La résistance de la bobine B est 6 ohms.

a) A partir de la différence de potentiel efficace entre P et Q et de l'intensité efficace, calculer l'impédance du circuit PQ.

b) A partir de l'impédance du circuit PQ, calculer la valeur L de l'inductance de B.

c) Quel est le facteur de puissance de B ?

d) Quel est le facteur de puissance du circuit PQ ? Comment pourrait-on le rendre égal à 1 ?

4. Une ligne de résistance $R = 2$ ohms amène un courant alternatif de fréquence 50 Hz à un compteur. La différence de potentiel efficace aux bornes du compteur sera supposée constante et égale à 120 volts.

1° Un appareil de chauffage branché après le compteur fonctionne pendant 5 h. Le compteur indique une consommation de 6 kWh. Calculer l'intensité efficace du courant qui passe dans la ligne et la perte d'énergie (en kWh) dans la ligne pendant ces 5 h. On supposera que l'appareil de chauffage est formé d'une résistance pure.

2° On remplace cet appareil par un moteur qui fonctionne avec un facteur de puissance $\cos \varphi = 0,80$. Mêmes questions, sachant qu'en 5 h la consommation est aussi de 6 kWh.

3° Aux bornes du compteur, on met seulement un condensateur de 10 microfarads. Calculer de même l'intensité du courant, la perte en ligne pendant 5 h et la consommation indiquée par le compteur pour ces 5 h.

4° On branche de nouveau le moteur comme au 2°. Montrer qu'un condensateur disposé entre ses bornes améliore le facteur de puissance dans la ligne. Calculer pour quelle valeur de la capacité le facteur de puissance dans la ligne devient égal à 1.

5° Le moteur et l'appareil de chauffage sont branchés en dérivation aux bornes du compteur. Il n'y a pas de condensateur. Calculer le facteur de puissance dans la ligne.

(Bacc.).

Rép. : 1° $I = 10$ A ; perte 1 kWh ; 2° $I = 12,5$ A ; perte 1,56 kWh ; 3° $I \approx 0,377$ A ; perte 0,00142 kWh ; consommation nulle ; 4° $C \approx 199$ μ F ; 5° $\cos \varphi \approx 0,937$.

5. Deux récepteurs de courant alternatif sont alimentés au moyen d'une différence de potentiel sinusoïdale dont la valeur efficace est de 128 volts. Tous deux consomment une puissance moyenne de 2 kW.

1° Le premier récepteur est un radiateur. Son facteur de puissance est égal à 1. Quelles sont l'intensité efficace et l'intensité maximale du courant qui le parcourt ?

2° Le deuxième est un moteur. Son facteur de puissance est seulement égal à 0,6 dans les conditions de son emploi. Quelles sont l'intensité efficace et l'intensité maximale du courant qui le parcourt ?

3° La ligne d'alimentation du radiateur a une résistance de 1 ohm. Quelle est l'énergie perdue en ligne par effet joule ?

4° Quelle devra être la résistance de la ligne d'alimentation du moteur pour que l'énergie perdue en ligne soit la même que dans le cas précédent ?

5° Les résultats précédents vous permettent-ils de comprendre les raisons pour lesquelles les compagnies distributrices d'énergie électrique pénalisent les usagers utilisant des appareils dont le facteur de puissance est faible ?

(Bacc.)

6. La représentation graphique de la puissance consommée dans une portion de circuit.

1° La d. d. p. entre les bornes d'une résistance pure est supposée de la forme :

$$u = U \sqrt{2} \sin \omega t$$

Construire les courbes représentant, en fonction du temps, les variations de cette tension et celles de l'intensité du courant qui parcourt la résistance. Sur l'axe des abscisses, la période T sera représentée par 8 cm ; sur l'axe des ordonnées on représentera

$U_M (= U \sqrt{2})$ par 4 cm et $I_M (= I \sqrt{2})$ par 2 cm.

A partir de la relation générale :

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos (2 \omega t + \varphi),$$

trouver l'expression de la puissance instantanée p consommée dans la résistance pure et représenter, sur le graphique précédent, les variations de p en fonction du temps. (On représente d'abord le terme sinusoïdal, de pulsation 2ω (donc de période $T/2$) puis on augmente toutes les ordonnées de la valeur du terme constant.) On représentera le produit UI par 3 cm.

Montrer graphiquement que la valeur moyenne de p , pour une période T , est $P = UI$.

2° La même tension est appliquée entre les bornes d'une inductance pure. Construire, comme au 1°, les trois graphes $u = f_1(t)$; $i = f_2(t)$; $p = f_3(t)$ et montrer graphiquement que la valeur moyenne de p , pour une période T , est nulle.

Qu'y aurait-il de changé dans le tracé des courbes si l'on substituait un condensateur seul à l'inductance pure ?

3° Recommencer les constructions dans le cas d'une portion de circuit introduisant un déphasage retard φ de l'intensité sur la tension. Interpréter les parties négatives de la courbe $p = f(t)$ et montrer graphiquement que la valeur moyenne de p , pour une période T , est égale à : $P = UI \cos \varphi$

(On prendra : $\varphi = \pi/4$ rd)

LES COURANTS DE HAUTE FRÉQUENCE LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

A. LES PROPRIÉTÉS DES COURANTS ALTERNATIFS DE HAUTE FRÉQUENCE

Grâce aux progrès incessants de l'Électronique, on produit facilement aujourd'hui des courants électriques sinusoïdaux dont les fréquences s'échelonnent de quelques dizaines à plus de 10^{11} hertz ⁽¹⁾.

On réserve l'appellation *haute fréquence* aux courants alternatifs dont les fréquences atteignent ou dépassent 10^5 Hz; ils ont pris une importance considérable dans de nombreux domaines de l'Électronique et de la Radioélectricité.

La nature d'un courant de haute fréquence ne diffère pas de celle d'un courant de basse fréquence, du courant industriel de fréquence 50 Hz par exemple; dans les deux cas, les électrons libres des conducteurs métalliques parcourus par le courant sont animés de mouvements sinusoïdaux de faible amplitude dont la fréquence est celle du courant.

Les définitions de l'intensité efficace, de la d.d.p. efficace, de l'impédance, de la puissance moyenne, ..., restent valables, mais nous allons voir que l'extrême rapidité des variations de l'intensité instantanée confère aux courants de haute fréquence des propriétés particulières.

1. L'influence de l'inductance et de la capacité en haute fréquence.

a. — Nous savons que l'impédance d'une bobine est liée à sa résistance R , à son inductance L et à la pulsation ω du courant alternatif qui la traverse :

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

La pulsation $\omega = 2\pi f$ variant comme la fréquence f du courant, le terme $L^2 \omega^2$ prend en haute fréquence une valeur devant laquelle le terme R^2 est négligeable.

L'impédance est alors pratiquement proportionnelle à la fréquence :

$$Z \approx L\omega = 2\pi Lf$$

Elle peut être *très grande*, même si l'inductance L de la bobine est faible.

Par exemple, si $L = 10^{-4}$ H et $f = 10^8$ Hz :

$$Z \approx 2 \times 3,14 \times 10^{-4} \times 10^8 \approx 63\,000 \text{ ohms!}$$

C'est ainsi que quelques spires de gros fil de cuivre, qui ne présentent qu'une résistance négligeable à un courant continu et une impédance très faible à un courant alternatif de basse fréquence, « étouffent » pratiquement un courant de haute fréquence.

b. — Par contre, l'impédance d'un condensateur,

$$Z = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi Cf},$$

inversement proportionnelle à la fréquence, peut être *très petite* en haute fréquence, même si la capacité C du condensateur est faible.

Par exemple, avec $C = 10^{-8}$ μ F = 10^{-8} F,

$$\text{— Si } f = 50 \text{ Hz : } Z \approx \frac{1}{6,28 \times 10^{-8} \times 50} \approx 320\,000 \, \Omega$$

$$\text{— Si } f = 10^8 \text{ Hz : } Z \approx \frac{1}{6,28} \approx 0,16 \, \Omega$$

⁽¹⁾ Les modes de production des courants de haute fréquence sont hors programme.

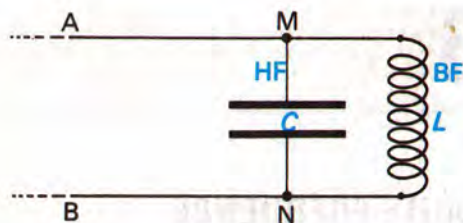


Fig. 1. — Les courants basse fréquence et haute fréquence, superposés en AM et BN, sont séparés entre M et N :

— Le courant BF traverse seul la bobine d'arrêt L ;
— Le courant HF ne peut passer que dans la branche « capacité » C.

En technique radioélectrique, lorsqu'on veut séparer l'un de l'autre un courant de basse fréquence et un courant de haute fréquence produits simultanément dans le même circuit, on associe en parallèle une « bobine d'arrêt » et un « shunt-capacité » (fig. 1).

2. Les effets d'induction en haute fréquence.

a. — L'effet pelliculaire.

Un courant alternatif, parce qu'il crée un champ magnétique variable, fait naître dans la masse des conducteurs métalliques qu'il parcourt des forces électromotrices d'induction dont l'effet est de s'opposer au passage du courant en profondeur; le courant n'existe pratiquement qu'à la périphérie des conducteurs, dans une pellicule dont l'épaisseur diminue quand la fréquence augmente.

Cet **effet pelliculaire** (*skin-effect* des Anglo-Saxons) n'intervient en basse fréquence que pour les très gros conducteurs, de sorte que l'on peut admettre — comme nous l'avons fait pour le courant alternatif 50 Hz — que la résistance R d'un fil métallique est pratiquement la même qu'en courant continu.

Par contre, en haute fréquence, la section utile se trouvant diminuée, la résistance d'un conducteur est plus grande qu'en continu et augmente avec la fréquence du courant.

Pour des courants à haute fréquence de forte intensité efficace, on diminue la résistance des conducteurs en augmentant non pas l'aire de leur section, mais son périmètre; à cette fin, on utilise des tubes ou des rubans larges et minces.

b. — La production d'une f.e.m. d'induction dans un circuit voisin.

1° A proximité d'une bobine B parcourue par un courant de haute fréquence, dans le champ magnétique créé par ce courant, plaçons un circuit C réduit à une spire conductrice dans laquelle est incorporée une ampoule électrique de faible puissance (fig. 2-a); la lampe s'allume, preuve que le courant induit qui traverse son filament est assez intense pour le porter à l'incandescence.

Ce fait s'explique par l'extrême rapidité des variations du flux d'induction à travers C :

Si le courant produit et entretenu dans la bobine B par l'oscillateur haute fréquence est un courant sinusoïdal de fréquence f , l'induction B qu'il crée en tout point voisin de la bobine et, par suite, le flux d'induction à travers le circuit induit C, étant proportionnels à l'intensité du courant, sont aussi des fonctions sinusoïdales

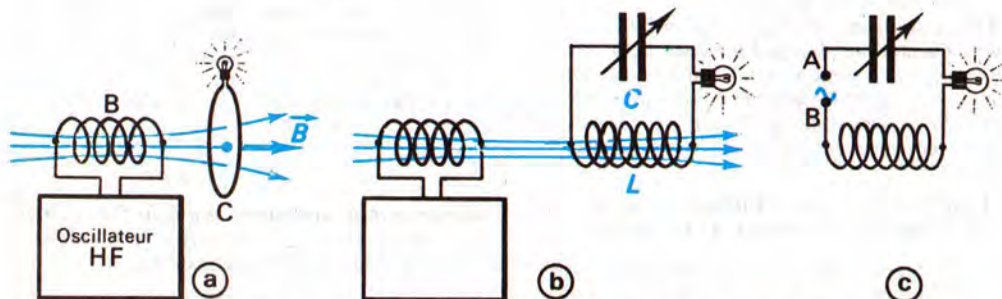


Fig. 2. — La mise en évidence des effets d'induction dans un circuit voisin.

En b, l'intensité efficace du courant induit dépend de la valeur imposée à la capacité variable C. Elle passe par un maximum pour la valeur correspondant à la résonance ($C = 1/L\omega^2$), ce qui se manifeste par un maximum de luminance du filament de la petite lampe; on dit alors que le circuit induit est *accordé* sur la fréquence du courant inducteur.

de fréquence f . En particulier, le flux instantané peut s'écrire :

$$\varphi = \Phi_m \sin \omega t = \Phi_m \sin 2 \pi f t$$

Les variations de ce flux créent dans le circuit C une *force électromotrice d'induction*, de valeur instantanée :

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} = - 2 \pi f \Phi_m \cos 2 \pi f t$$

La valeur efficace de cette f.e.m.,

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{2 \pi f \Phi_m}{\sqrt{2}},$$

est **proportionnelle à la fréquence du courant inducteur**. Elle peut donc être importante même si le flux maximal Φ_m est faible.

2° Remplaçons la boucle C par un circuit « R L C » à capacité variable C (fig. 2-b). La f.e.m. d'induction e joue dans ce circuit le rôle qu'y jouerait, en l'absence du dispositif inducteur, une différence de potentiel $v_A - v_B$ de même fréquence f , installée entre les extrémités A et B d'une coupure (fig. 2-c).

Nous avons vu (chap. 24; § 5) que dans un tel circuit la valeur efficace I de l'intensité du courant et son déphasage par rapport à e dépendent des influences antagonistes de l'inductance L et de la capacité C . Si L et C satisfont à la relation :

$$L C \omega^2 = 1; \text{ ou : } 4 \pi^2 f^2 L C = 1$$

il y a **résonance**; le déphasage s'annule et l'intensité efficace du courant induit passe par un maximum d'autant plus accusé que la résistance R du circuit est plus faible. On dit alors que le circuit induit « R L C » est **accordé** sur la fréquence f du courant inducteur fourni par l'oscillateur haute fréquence.

3. Les effets de propagation; ondes de courant progressives et stationnaires.

a. — Supposons qu'une f.e.m. d'induction e , sinusoïdale de fréquence f , soit produite dans une portion M d'un circuit MPP' (fig. 3). Le courant induit qui en résulte ne s'installe pas instantanément tout le long du circuit; dans le métal des conducteurs MP et MP', le mouvement sinusoïdal de fréquence f des électrons libres commence en M et se propage de proche en proche à *célérité constante* V , comme un mouvement vibratoire se propage le long d'un ressort ou dans la colonne gazeuse d'un tuyau.

De M, vers P et P', partent deux **ondes progressives de courant** ayant la fréquence f de la f.e.m. e et, par suite, une longueur d'onde :



Fig. 3.

$$\lambda = \frac{V}{f}$$

Ces deux ondes se croisent entre P et P', puis elles se superposent dans le circuit; si celui-ci a une longueur convenable, leur interférence produit un système d'**ondes de courant stationnaires**, caractérisé par la formation de nœuds et de ventres d'intensité :

Aux **nœuds**, distants de $\lambda/2$, l'intensité i du courant est constamment *nulle* alors qu'aux **ventres**, situés à mi-distance des nœuds, son amplitude I_m et, par suite, sa valeur efficace $I_m/\sqrt{2}$ sont *maximales*.

Ainsi, **à chaque instant, l'intensité n'est pas la même à travers les différentes sections du circuit**.

La théorie montre et — nous le verrons plus loin — l'expérience confirme que la *célérité* V des ondes de courant est égale à celle de la lumière dans le milieu où se trouve le circuit.

Considérons le cas général de circuits situés dans l'air :

$$V \approx 300\,000 \text{ km/s}$$

— Si la f.e.m. induite e est de basse fréquence, $f = 50 \text{ Hz}$, la longueur d'onde $\lambda = V/f$ a pour valeur :

$$\lambda \approx \frac{3 \times 10^8}{50} = 6\,000 \text{ kilomètres.}$$

Devant une telle longueur d'onde, les dimensions des circuits utilisés dans nos expériences sont négligeables; les effets de propagation n'interviennent donc pas en basse fréquence et il est tout à fait légitime d'admettre, comme nous l'avons fait, que l'intensité du courant est à chaque instant la même dans toutes les sections du circuit.

— Par contre, pour une fréquence $f = 10^8 \text{ Hz}$, la longueur d'onde ne vaut plus que :

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{10^8} = 3 \text{ mètres.}$$

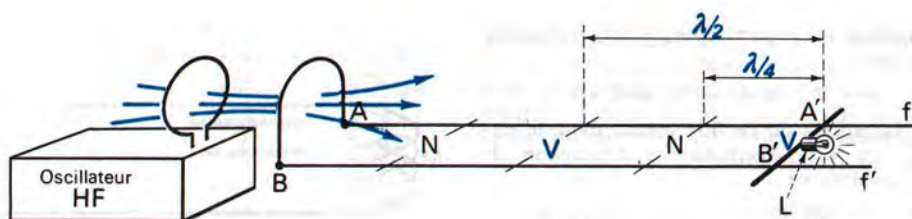


Fig. 4. — L'expérience des fils de Lecher.

Deux longs fils conducteurs parallèles, f et f' , reliés par une demi-boucle AB , forment un circuit que l'on ferme par une ampoule électrique L de faible puissance. En approchant AB d'un générateur de courant haute fréquence, on y fait naître une f.e.m. d'induction qui constitue une source d'ondes progressives de courant se propageant dans les fils.

Pour certaines positions de la petite lampe L , la superposition de ces ondes produit un système stable d'ondes stationnaires dans le circuit.

L'existence d'ondes stationnaires peut alors être mise expérimentalement en évidence en utilisant par exemple le dispositif des « fils de Lecher » (fig. 4).

En déplaçant la petite lampe L à partir de AB , on trouve des positions V pour lesquelles la luminance de son filament est maximale; elles correspondent à des *ventres d'intensité*, équidistants de $\lambda/2$. Quant aux *nœuds d'intensité*, ils sont alors en N , à $\lambda/4$ des ventres.

Connaissant la fréquence f du courant inducteur, on peut, en mesurant l'équidistance $\lambda/2$,

vérifier que la célérité, $V = \lambda \cdot f$, des ondes de courant est voisine de 300 000 km/s.

Notons que les ventres d'intensité coïncident avec des nœuds de potentiel électrique et réciproquement; ce fait est à rapprocher de la coïncidence d'un ventre d'élongation et d'un nœud de pression, dans une colonne gazeuse où s'est établi un système stable d'ondes stationnaires.

b. — Un système d'ondes de courant stationnaires, de haute fréquence, peut aussi s'établir dans un circuit *ouvert*, réduit par exemple à un simple tube conducteur de longueur réglable (fig. 5).

En approchant la partie médiane du tube de la boucle d'un générateur de courant haute fréquence dont la fréquence f est de l'ordre de 10^8 Hz, on y fait naître une f.e.m. d'induction, source d'ondes progressives de courant de longueur d'onde $\lambda = V/f$, V désignant la vitesse de la lumière dans l'air.

Si la longueur du tube est égale à une *demi-longueur d'onde*, la réflexion de ces ondes progressives sur les extrémités du tube produit un système stable d'ondes stationnaires comportant un *ventre d'intensité* V au milieu du tube et deux *nœuds d'intensité* N et N' aux extrémités.

Nous verrons, dans la seconde partie de ce chapitre, qu'un tel dispositif constitue une *antenne « demi-onde »*, émettant dans l'espace une *onde électromagnétique* de même fréquence f et de même longueur d'onde $\lambda = V/f$ que les ondes de courant produites dans cette antenne.

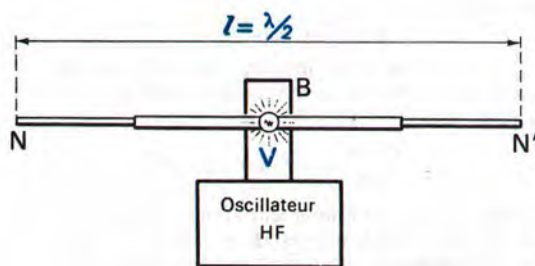


Fig. 5. — Antenne « demi-onde ».

Lorsqu'on approche le tube de la boucle B d'un oscillateur haute fréquence, la petite lampe interposée entre les deux moitiés du tube s'illumine du fait que les ondes stationnaires qui s'établissent le long du tube présentent un ventre d'intensité en son milieu.

B. LA PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

4. L'onde électromagnétique.

a. — Considérons une antenne « demi-onde » dans laquelle a été établi un système stable d'ondes de courant stationnaires, de fréquence f .

Autour de l'antenne existent à la fois un champ électrique périodique et un champ magnétique périodique ayant tous les deux la fréquence f .

C'est l'illustre physicien Maxwell qui, partant des lois de l'Électromagnétisme et de l'Induction découvertes respectivement par Ampère et Faraday, montra le premier (en 1865) que ces deux champs périodiques *coexistent nécessairement*.

Au terme d'une étude théorique magistrale, il précisa les équations reliant à chaque instant et en chaque point le vecteur champ électrique $\vec{E}$

et le vecteur induction magnétique $\vec{B}$ et il établit que les deux champs se propagent simultanément dans le milieu environnant avec une célérité constante V égale à la vitesse de la lumière dans ce milieu, constituant ainsi une **onde électromagnétique** de fréquence f et de longueur d'onde $\lambda = V/f$.

Une vingtaine d'années plus tard, le physicien allemand Hertz confirma les prévisions de Maxwell en mettant expérimentalement en évidence l'existence d'ondes électromagnétiques — encore appelées, pour cette raison, *ondes hertziennes* — et en vérifiant, à partir de la mesure de leur longueur d'onde, que leur vitesse de propagation est bien égale à celle de la lumière.

b. — Nous préciserons la constitution d'une onde électromagnétique en nous plaçant dans le cas le plus simple :

— L'antenne émettrice est du type « demi-onde » et un générateur de courant haute fréquence y produit par induction des ondes électriques stationnaires *sinusoïdales*, de fréquence f et de longueur d'onde $\lambda = 2l$ (fig. 6).

— L'onde émise est étudiée à une distance relativement *grande*, comparée à la longueur d'onde λ .

En un point M d'un rayon de propagation OX, l'onde électromagnétique est caractérisée par un

vecteur champ électrique $\vec{E}$ et un **vecteur induction magnétique** $\vec{B}$ ayant les propriétés suivantes :

— Ils sont *rectangulaires*, tous deux *perpendiculaires* à OX et orientés de façon qu'un observateur se plaçant sur ME et regardant suivant MB ait le sens de la propagation M $\rightarrow$ X à sa gauche ;

— Leurs valeurs algébriques sont des fonctions *sinusoïdales* du temps, de la forme :

$$E = E_m \sin 2\pi ft$$

$$B = B_m \sin 2\pi ft$$

Ils vibrent donc *en phase* et leur fréquence f est égale à celle des ondes de courant dans l'antenne ;

— A tout instant t , les extrémités des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui caractérisent l'onde électromagnétique

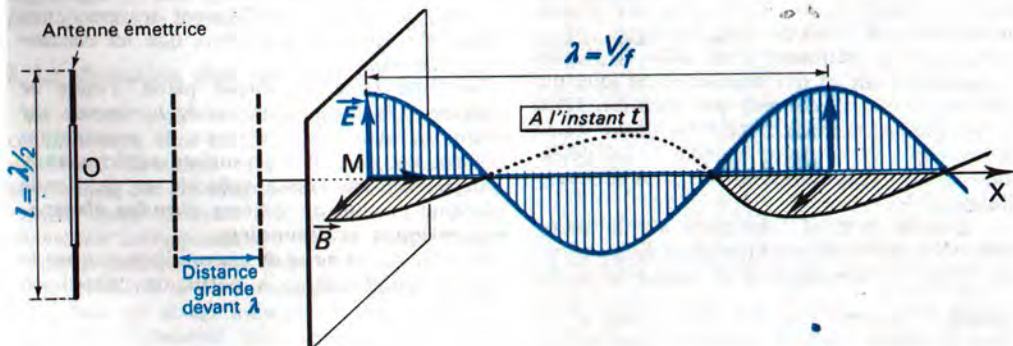


Fig. 6. — La représentation schématique d'une onde électromagnétique plane.

tique aux divers points de MX à cet instant se trouvent sur deux sinusôides de période spatiale $\lambda = V/f$, V désignant la vitesse de la lumière dans le milieu de propagation (fig. 6);

— A un instant postérieur t' la représentation de l'onde se déduit de la précédente par une translation d'amplitude $V(t' - t)$ le long de MX. Nous retrouvons là le caractère doublement périodique, dans le temps et dans l'espace, de la propagation à célérité constante de tout phénomène vibratoire (p. 168).

Remarquons que l'onde électromagnétique, comme l'onde lumineuse (p. 220), est une onde $\rightarrow$ transversale puisque les deux vecteurs vibrants $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui la caractérisent en chaque point d'un rayon de propagation sont perpendiculaires à ce rayon; elle est de plus polarisée rectilignement, le vecteur champ électrique $\vec{E}$ demeurant parallèle à l'antenne d'émission (fig. 6).

c. — Notons enfin que, comme l'onde lumineuse, l'onde électromagnétique transporte de l'énergie rayonnante. A chaque seconde, la quantité d'énergie ainsi rayonnée dans l'espace par l'antenne émettrice représente une fraction de la puissance électrique que le générateur de courant à haute fréquence fournit à l'antenne, le reste se dissipant dans celle-ci par effet Joule.

5. La mise en évidence expérimentale d'une onde électromagnétique de haute fréquence.

a. — Les dispositifs permettant de déceler les deux champs périodiques.

— Soit un tube conducteur AB, de longueur réglable, disposé $\rightarrow$ parallèlement au vecteur champ électrique $\vec{E}$ d'une onde électromagnétique de longueur d'onde λ (fig. 7-a); ce champ exerce sur les électrons libres du tube des forces périodiques dont la fréquence f est celle de l'onde électromagnétique et qui engendrent le long du tube des ondes de courant stationnaires, sous réserve que la longueur de ce tube ait été « accordée » sur la longueur d'onde λ . La petite lampe, se trouvant alors à un ventre d'intensité, s'illumine.

— D'autre part, si l'on place sur le trajet d'une onde électromagnétique un cadre conducteur reliant les armatures d'un condensateur de capacité C variable (fig. 7-b), l'induction $\vec{B}$ de l'onde produit à travers le cadre un flux d'induction périodique dont l'amplitude est maximale $\rightarrow$ lorsque le cadre est perpendiculaire au vecteur $\vec{B}$.

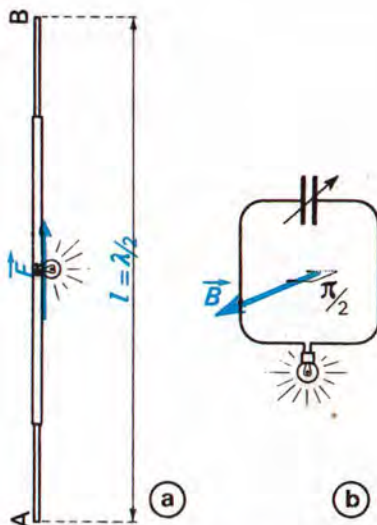


Fig. 7.

- a) Résonateur ouvert décelant le champ électrique;
b) Résonateur fermé décelant le champ magnétique.

Les variations de ce flux engendrent dans le cadre un courant induit dont l'intensité efficace passe par un maximum pour la valeur de C qui correspond à la résonance (§ 2-b).

b. — La réflexion de l'onde; l'obtention d'un système d'ondes stationnaires.

Si l'on interpose, entre l'antenne émettrice et un résonateur du type précédent, une lame de bois, de carton ou de verre, la luminance du filament de la petite lampe n'est pas sensiblement diminuée; par contre si la lame est en métal, la lampe s'éteint :

Ainsi, les isolants se laissent traverser par l'onde électromagnétique alors que les conducteurs l'arrêtent.

Sur une lame métallique plane, l'onde se réfléchit à la façon d'une onde lumineuse sur un miroir plan ⁽¹⁾; si le rayon de propagation incident est normal à la surface réfléchissante, l'interférence de l'onde réfléchie et de l'onde incidente produit un système d'ondes électromagnétiques stationnaires.

Il se forme un nœud du champ électrique sur la surface réfléchissante; à partir de celle-ci on

⁽¹⁾ La lame réfléchissante peut être remplacée par un grillage métallique ou des fils conducteurs parallèles, sous réserve que la distance des fils soit petite comparée à la longueur d'onde de l'onde incidente.

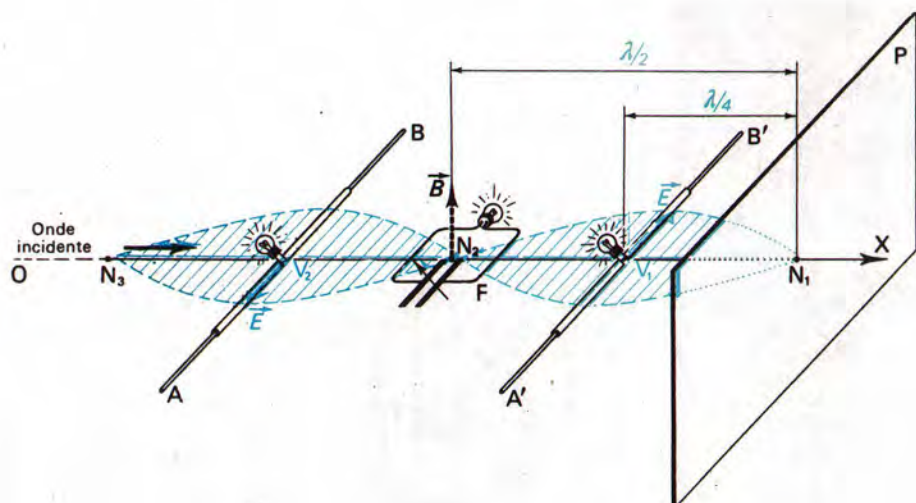


Fig. 8. — Ondes électromagnétiques stationnaires.

La réflexion de l'onde venant de l'émetteur O (à gauche, non représenté) est obtenue sur un plan métallique P de grandes dimensions, normal à OX et placé à plusieurs mètres de l'émetteur, loin des murs de la salle.

Les deux résonateurs ouvert (AB) et fermé (F) sont accordés à proximité immédiate de l'émetteur, puis déplacés progressivement à partir du plan réfléchissant P.

La lampe de AB brille au maximum aux ventres du champ électrique $\vec{E}$; par contre, les maximums de celle de F correspondent aux nœuds de $\vec{E}$, qui coïncident avec les ventres de l'induction magnétique $\vec{B}$.

trouve les autres nœuds, équidistants de $\lambda/2$ et les ventres de champ électrique, à mi-distance des nœuds (fig. 8).

L'expérience montre d'autre part que les nœuds de champ électrique coïncident avec les ventres de champ magnétique et réciproquement.

La fréquence f du dispositif émetteur de l'onde étant connue, la mesure de l'équidistance $\lambda/2$ des ventres de l'un ou l'autre champ permet de vérifier que la célérité, $V = f\lambda$, d'une onde électromagnétique est bien égale à la vitesse de la lumière dans le milieu de propagation.

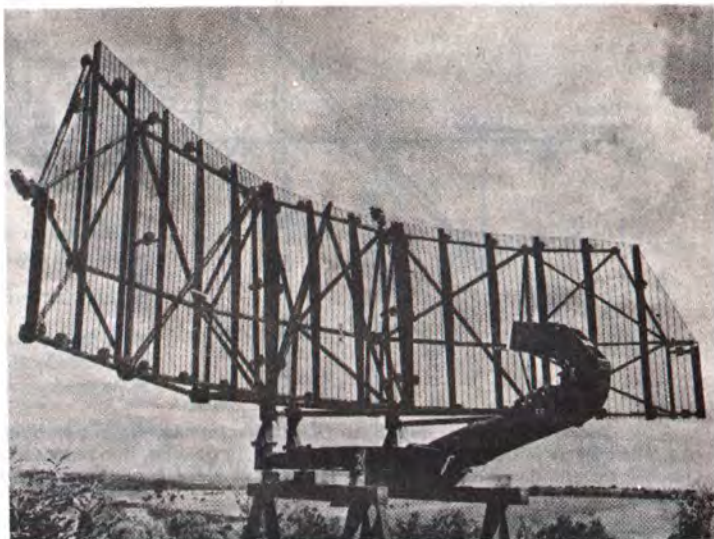
6. Le domaine des ondes hertziennes.

a. — Les ondes électromagnétiques utilisées journellement, tant au laboratoire que dans les nombreux domaines des télécommunications hertziennes, ont des longueurs d'onde qui s'échelonnent entre quelques millimètres et plusieurs kilomètres, correspondant à des fréquences comprises, en nombres ronds, entre 10^{11} Hz et 10^5 Hz.

Les modalités de leur propagation dans le vide, l'air, l'eau ou divers milieux, de même que la possibilité d'observer leur réflexion, diffusion, réfraction, diffraction ou absorption dépend essentiellement de l'ordre de grandeur de leur longueur d'onde.

En ce qui concerne leur utilisation courante, on a coutume de les classer comme suit :

« Grandes » ondes (ou ondes longues)	$\lambda > 800 \text{ m}$	Télécommunications maritimes; radio- diffusion
« Petites » ondes (ou ondes moyennes)	$800 \text{ m} > \lambda > 100 \text{ m}$	Radiodiffusion
Ondes « courtes »	$100 > \lambda > 10 \text{ m}$	Radiodiffusion et radiotéléphonie
Ondes très courtes (métriques, décimétriques et centimétriques)	$\lambda < 10 \text{ m}$	Radiodiffusion en modulation de fréquence; télévision; radar; relais téléphoniques hertziens.



▲ Un radar (Compagnie Française Thomson-Houston Hotchkiss-Brandt).

◀ Une antenne d'émission de télévision. Photo Fausto Picedi.

La portée des ondes hertziennes est influencée par des phénomènes complexes, faisant que le sol, la mer et surtout l'*ionosphère* ⁽¹⁾ se montrent plus ou moins réfléchissants ou absorbants pour telle « bande » de longueurs d'onde plutôt que pour telle autre. C'est ainsi par exemple que les ondes longues et moyennes peuvent contourner le globe grâce à une série de réflexions entre le sol et l'ionosphère alors que les ondes très courtes ne sont pas renvoyées par l'ionosphère et peuvent atteindre la Lune et les satellites artificiels.

De plus, les propriétés de l'ionosphère, gouvernées surtout par le rayonnement solaire, varient avec l'heure du jour, la saison, l'évolution des taches solaires, de sorte que telle « bande » hertzienne se propage beaucoup mieux la nuit que le jour, en décembre qu'en juin, ou encore cette année qu'elle ne le fera dans dix ans.

⁽¹⁾ L'*ionosphère* est une couche de la très haute atmosphère (entre 200 et 500 km d'altitude) où le rayonnement solaire entretient une ionisation intense des molécules gazeuses qui donne à cette couche les propriétés d'une couche conductrice.

Cela fait comprendre qu'à certains usages (radiotélégraphie, radiotéléphonie, radiodiffusion...) correspondent aussi bien des ondes longues que des ondes moyennes ou des ondes courtes, et que tel émetteur, pour ses télécommunications à très longues distances, peut être contraint de changer plusieurs fois de fréquence en vingt-quatre heures.

Quant à la **possibilité de diriger les ondes hertziennes**, c'est-à-dire de localiser l'énergie qu'elles transportent dans un faisceau plus ou moins étroit, elle augmente à mesure que la longueur d'onde décroît; en particulier, pour les ondes très courtes (métriques et centimétriques), dont la *propagation rectiligne* rappelle celle de la lumière, on construit de véritables projecteurs orientables réalisant une grande économie de puissance rayonnée.

Les *courtes* longueurs d'onde auront donc la préférence dans les applications des ondes dirigées telles que les *radiophares* de navigation et d'atterrissage, les *relais hertziens* de téléphonie-multiplex et de télévision, les *radiosondes* de météorologie, etc.

Notons que parmi les plus courtes de ces ondes figurent nécessairement celles de deux techniques à signaux extrêmement rapides : la télévision (λ de l'ordre du mètre) et le radar ⁽¹⁾ (ondes décimétriques et centimétriques).

Le nombre de ces applications — et de leurs usagers — ne cesse d'ailleurs de croître et l'encombrement de l'« espace hertzien » deviendrait vite inadmissible si des conventions internationales ne venaient strictement réglementer l'utilisation des diverses bandes de longueurs d'onde.

b. — Nous avons signalé que les ondes hertziennes de très courtes longueurs d'onde ont des propriétés qui les rapprochent beaucoup des ondes lumineuses. C'est ainsi par exemple qu'avec des ondes centimétriques (f de l'ordre de 10^{10} Hz) on reproduit toutes les expériences de réflexion, de réfraction, de déviation par un prisme ou une lentille (en paraffine ou en matière plastique), d'interférence, ou encore de diffraction que l'on réalise avec une lumière monochromatique du spectre visible.

⁽¹⁾ Voir la lecture, p. 285.

En fait, **il n'y a pas de discontinuité entre les ondes hertziennes ultra-courtes et les ondes lumineuses de grandes longueurs d'onde**, le spectre hertzien et le spectre infrarouge se recouvrant sur une bande de longueurs d'onde comprises environ entre 500 microns et 30 microns.

Des radiations appartenant à cette bande peuvent être produites indifféremment par certaines sources de lumière infrarouge ou par de très courtes antennes dans lesquelles sont entretenus des courants électriques de très haute fréquence; le fait qu'il est possible de les capter avec les mêmes dispositifs récepteurs et de déterminer leurs longueurs d'onde avec les mêmes spectrographes prouve qu'il s'agit des *mêmes ondes*, bien que les techniques de leur production soient fondamentalement différentes.

L'existence de cette lisière commune aux deux domaines hertzien et lumineux apporte la preuve que, conformément à l'hypothèse géniale de Maxwell, **les ondes lumineuses sont de nature électromagnétique ⁽¹⁾**.

⁽¹⁾ Revoir la lecture de la p. 225.

EXERCICES

1. Une spire conductrice de 100 cm^2 de surface est placée normalement aux lignes d'induction (supposées parallèles) d'un champ magnétique d'expression :

$$b = B_m \sin 2 \pi f t ;$$

calculer la valeur efficace de la f. é. m. d'induction produite dans la spire : 1° si $f = 50 \text{ Hz}$; 2° si $f = 10^3 \text{ Hz}$. (On prendra : $B_m = 10^{-4} \text{ tesla}$.)

2. On crée par induction, en un point O d'une ligne conductrice indéfinie OX, un courant alternatif de fréquence égale à $3 \times 10^6 \text{ Hz}$, dont on représente l'intensité i à l'instant t par la fonction : $i = I_m \sin \omega t$.

1° Quelles sont les distances au point O des points M où le courant est en phase avec le courant en O ?

2° La ligne conductrice est maintenant limitée à un point A, à une distance $l = 925 \text{ m}$ du point O. Les ondes de courant se réfléchissent à l'extrémité A de façon que le courant en A soit constamment nul. Quelles sont les distances au point A des points M où l'intensité du courant est nulle ?

3° Le point O est maintenant le milieu d'une ligne conductrice A'A de longueur $2l$. Quelle est la plus petite valeur $2l_0$ que l'on puisse donner à la longueur $2l$ pour que les ondes stationnaires produites par réflexion sur les deux extrémités A et A' coïncident ? Si l'intensité efficace du courant en O est égale à 100 ampères, quelle est alors l'intensité efficace de $12,5 \text{ m}$ de O ?

(D'après un probl. de bacc.).

Rép. : 1° $d = k\lambda = 100 \text{ k (mètres)}$; 2° $d = k\lambda/2 = 50 \text{ k (mètres)}$; 3° $2l_0 = 50 \text{ m}$; $I = 100/\sqrt{2} \text{ ampères}$.

3. Un circuit résonateur, accordé sur la longueur d'onde λ d'une onde électromagnétique, a une inductance $L = 10 \text{ microhenrys}$, une capacité $C = 0,025 \text{ millièmes de } \mu\text{F}$ et une résistance $R = 0,01 \text{ ohm}$. L'onde induit dans ce circuit une f. é. m. de valeur efficace $E = 0,1 \text{ microvolt}$. Calculer : 1° la longueur d'onde; 2° l'intensité efficace du courant de résonance; 3° la tension efficace aux bornes du condensateur (phénomène de surtension à la résonance).

4. On réalise l'expérience des ondes électromagnétiques stationnaires comme l'indique la fig. 8; on trouve que le 1^{er} ventre du champ magnétique est à 0,75 m du miroir réfléchissant. Calculer la fréquence de l'onde émise et la longueur de l'antenne « demi-onde » émettrice.

Rép. : $f = 200$ mégahertz ; $l = 0,75$ mètre.

5. Une antenne est constituée par un fil métallique vertical de 75 m de long, relié au sol par son extrémité inférieure et isolé à sa partie supérieure. Un générateur de courant haute fréquence produit dans cette antenne un système d'ondes stationnaires stables.

1° Rechercher, sans calculs, la position des nœuds et des ventres de tension et d'intensité dans le cas de l'émission de l'onde fondamentale (1°).

Calculer dans ce cas la longueur d'onde λ et la fréquence de cette onde.

2° Deux antennes disposées comme la précédente se trouvent placées à une distance $\frac{\lambda}{2}$ l'une de l'autre.

On entretient dans ces deux antennes des ondes de courant stationnaires identiques.

Indiquer dans quelle direction horizontale les effets produits s'ajoutent et dans quelle direction ils se détruisent.

(Partie de probl. de bacc.).

6. Deux antennes verticales A et B, identiques, distantes de 1 800 m, sont le siège d'oscillations électriques de même phase, ayant une fréquence de 250 kilohertz. Les ondes sont reçues à une distance assez grande pour qu'on puisse la considérer comme infinie par rapport à celle de deux antennes.

1° Dans quelles directions horizontales l'intensité à la réception est-elle a) maximale ? b) minimale ?

2° Comment ces résultats sont-ils modifiés quand les oscillations en A et B sont en opposition de phase ?

(D'après un probl. de bacc.).

Rép. : Si θ est l'angle des directions cherchées avec une horizontale du plan AB, les maximums correspondent à $\theta = 90^\circ$ et $\theta \approx 48^\circ$ ou 132° ; les minimums à $\theta \approx 71^\circ$ ou 109° et à $\theta = 0$; 2° il y a permutation des valeurs correspondant aux maximums et minimums.

7. 1° On constitue un condensateur de capacité variable en plaçant devant une plaque métallique P_1 , plane horizontale, en forme de demi-cercle de centre O_1 et de rayon $r = 6$ cm, une autre plaque P_2 plane, parallèle à P_1 , en forme de demi-cercle de centre O_2 , et de même rayon r . La plaque P_2 peut tourner autour de l'axe vertical O_1O_2 . La distance O_1O_2 des deux plaques vaut $e = 0,5$ mm. Calculer la capacité maximale C_0 de ce condensateur à capacité variable. Lorsque les deux armatures (plaques P_1 et P_2) ne se recouvrent que sur un angle θ inférieur à π , que devient la capacité C de ce condensateur ?

On rappelle que dans le système SI, la capacité d'un condensateur plan à lame d'air est donnée par la formule $C = \frac{1}{36\pi} \frac{S}{10^9 e}$.

(1°) Le potentiel du sol est égal conventionnellement à zéro.

2° Le condensateur C et une bobine de résistance $R = 1$ ohm et d'inductance

$$L = 480 \times 10^{-6} \text{ henry}$$

constituent un circuit résonateur « R, L, C ». Une force électromotrice alternative e de pulsation ω est produite dans ce circuit par une onde électromagnétique de longueur d'onde λ .

Comment varient en fonction de l'angle θ les valeurs ω et λ qui correspondent à la résonance ?

Applications numériques :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{2\pi}{3}$$

3° Le circuit étant accordé sur la longueur d'onde λ capte une puissance de 10^{-10} watts. Calculer les valeurs efficaces de la force électromotrice et de l'intensité.

4° Le résonateur étant parfaitement accordé pour une certaine valeur de C on le dérègle légèrement en prenant une nouvelle valeur $C + \Delta C$ de la capacité du condensateur variable. Calculer ΔC sachant que la puissance captée est alors deux fois plus faible que lors du réglage correct. Calculer la rotation $\Delta \theta$ correspondante.

(D'après un probl. de bacc.).

8. Un condensateur variable rotatif de T.S.F. est formé de 11 lames fixes entre lesquelles peuvent s'engager 10 lames mobiles, demi-circulaires, de 3 cm de rayon. La distance qui sépare une lame fixe d'une lame mobile est de 0,5 mm. L'angle dont tournent les lames mobiles est repéré par un index mobile sur un cadran gradué de 0 à 180° .

1° Sachant que deux lames conductrices de 100 cm² et séparées par un intervalle de 1 cm ont dans l'air une capacité de $\frac{1}{36\pi}$ millièmes de microfarad, calculer la capacité maximale du condensateur en millièmes de microfarad, l'index étant alors à la division 180°.

2° Ce condensateur et une inductance de 200 microhenrys constituent un circuit résonateur « R, L, C ». A quelles divisions se trouvera l'index lorsque le circuit sera exactement accordé sur les longueurs d'onde $\lambda_1 = 266,6$ m et $\lambda_2 = 533,2$ m ?

3° Une onde électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 266,6$ m entretient dans le circuit une force électromotrice efficace de 1 microvolt. Quelle est l'intensité qui s'établit alors dans le circuit qui est supposé accordé sur la même longueur d'onde et dont la résistance est de 0,1 ohm ?

4° De combien doit-on, à partir du réglage sur 266,6 m, déplacer l'index du condensateur pour réduire le courant au $\frac{1}{1000}$ de sa valeur afin de ne plus entendre l'émission ?

Sur quelles longueurs d'ondes le circuit sera-t-il alors accordé ?

(Bacc. Mat.).

Rép. : 1° $C = 0,5$ millièmes de μF ; 2° 36° et 144° ; 3° $l = 10$ micro-ampères; 4° $\pm 2,5^\circ$; 276 m ou 257 m.

Le principe des télécommunications hertziennes

Une télécommunication revient à un transport d'énergie à distance, entre un poste émetteur et un poste récepteur. L'émetteur envoie au récepteur de l'énergie rayonnante sous la forme d'une onde hertzienne qui constitue l'onde porteuse des signaux à transmettre.

a. — Le poste émetteur comprend essentiellement (fig. 9) :

— Un *générateur de courant électrique haute fréquence* dont la fréquence f est ajustée en fonction du choix de la longueur d'onde ($\lambda = \frac{V}{f}$) de l'émission ($V \approx 300\,000$ km).

— Un *dispositif de modulation*, destiné à imprimer à l'onde porteuse les signaux que l'on veut transmettre à distance. Par exemple, en radiodiffusion avec « modulation d'amplitude », un microphone recueille les sons à transmettre et impose au courant haute fréquence des variations d'amplitude qui reproduisent très fidèlement celles du courant microphonique, constituant en quelque sorte l'image électrique du complexe sonore capté par le microphone.

— Un *dispositif d'amplification*, permettant d'augmenter la puissance du courant HF ainsi modulé.

— Une *antenne d'émission*, accordée sur la fréquence de ce courant modulé et qui rayonne dans l'espace, sous la forme d'une onde hertzienne, une fraction importante de la puissance que lui fournit le générateur. La forme de l'antenne et la puissance qu'elle rayonne varient beaucoup avec l'ordre de grandeur de la longueur d'onde d'émission.

b. — Au poste récepteur, on trouve généralement (fig. 10) :

— Une *antenne de réception*, que l'on accorde sur l'onde à recevoir; celle-ci engendre dans le circuit d'antenne un courant HF de très faible puissance qui reproduit fidèlement les particularités du courant modulé produit dans le poste émetteur. Des tubes électroniques ou des transistors *amplificateurs* augmentent la puissance de ce courant oscillant.

— Un *dispositif de détection*, qui transforme le courant oscillant en en supprimant pratiquement toutes les alternances d'un certain signe; la valeur moyenne de l'intensité — nulle avant la détection — présente alors des variations qui reproduisent celles du courant microphonique ayant servi à la modulation dans le poste émetteur (fig. 11).

— Un *dispositif d'utilisation*, qui amplifie ce courant moyen basse fréquence et l'envoie dans un écouteur ou un haut-parleur.

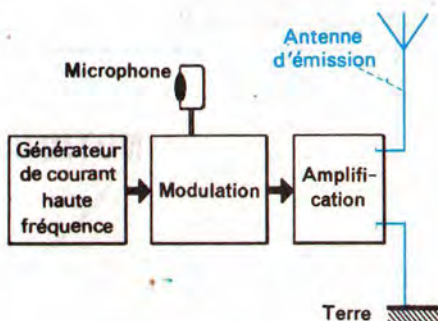


Fig. 9. — Poste émetteur.

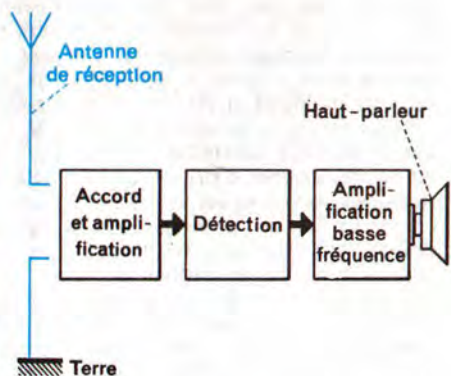
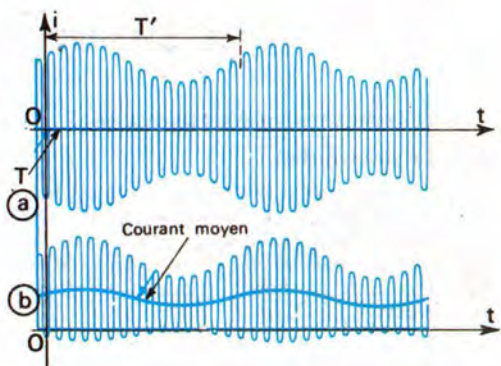


Fig. 10. — Poste récepteur.

► Fig. 11. — La détection d'un courant de haute fréquence modulé.

a) Le graphe du courant modulé. Si la fréquence du courant HF est, par exemple, $f (= 1/T) = 10^6$ Hz et si la fréquence $f' (= 1/T')$ de la modulation est 10^3 Hz, il y a 1 000 oscillations du courant HF pendant le temps T' ;

b) Les mêmes oscillations après détection.



NOTIONS D'ÉLECTRONIQUE

Les notions d'électronique figurant au programme des classes Terminales se limitent au principe des *émissions thermoélectronique et photoélectrique* et à l'étude des propriétés principales des *faisceaux d'électrons*. L'exposé de ces notions nous permettra de donner un aperçu de leurs multiples et remarquables applications.

Nous avons vu au début du cours de Chimie que le moindre échantillon de matière contient un *nombre énorme d'électrons* : ce sont les électrons qui, dans tous les atomes, circulent autour du noyau, formant un *nuage électronique* dont la charge électrique négative est égale en valeur absolue à la charge positive du noyau.

Quels que soient les corps dont on extrait des électrons et les méthodes utilisées pour mesurer leurs caractéristiques, on trouve toujours les mêmes résultats. C'est la preuve que **tous les électrons sont des particules identiques**.

Nous retiendrons les valeurs approchées des caractéristiques de l'électron :

— Valeur absolue de la charge :

$$e \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ coulomb}$$

Rappelons que e représente la charge électrique élémentaire.

— Charge massique (quotient de la charge de l'électron par sa masse) :

$$\frac{e}{m} \approx 1,76 \times 10^{11} \text{ coulomb par kilogramme}$$

— Masse $\left(m = \frac{e}{e/m}\right)$:

$$m \approx 0,91 \times 10^{-30} \text{ kilogramme}$$

C'est là une masse extrêmement faible, représentant environ la 1/2 000 partie de la masse de l'atome d'hydrogène, le plus léger de tous les atomes.

A. L'EFFET THERMOÉLECTRONIQUE

1. La diode thermoélectronique.

a. — La description.

Une diode thermoélectronique est constituée par un tube où l'on a fait un *vide* aussi poussé que possible (la pression du gaz résiduel est inférieure au dix-millionième de millimètre de mercure ⁽¹⁾) et à l'intérieur duquel sont disposés parallèlement (fig. 1-a) :

— Un **filament** F en tungstène, que l'on peut porter à l'incandescence par effet Joule au moyen d'un petit circuit de chauffage;

— Une **plaque** métallique P, à laquelle on donne souvent la forme d'un cylindre entourant le filament (fig. 1-b).

La plaque est reliée extérieurement au filament par un circuit « plaque » comportant un milli-ampèremètre A et une batterie d'accumulateurs; lorsque ce circuit est fermé, la batterie maintient entre la plaque et le filament une différence de

⁽¹⁾ Il reste encore plusieurs millions de molécules par mm³!

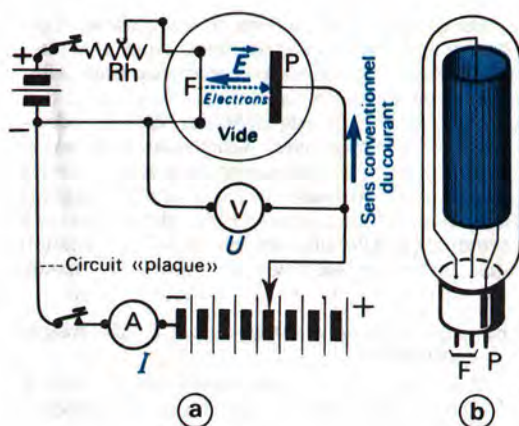


Fig. 1. — La diode thermoélectronique.

potentiel $V_P - V_F = U$, dite *tension plaque*, que l'on peut faire varier en mettant en service un plus ou moins grand nombre d'éléments d'accumulateur.

b. — Les faits observés.

1° Si le filament est à la température ambiante, le milliampèremètre n'indique *aucun courant dans le circuit plaque*, quelle que soit la valeur de la tension plaque; l'espace entre F et P se comporte comme un isolant.

2° Lorsque le filament est porté à l'incandescence :

— Si la tension plaque est *nulle* (circuit plaque ouvert) ou *négative* (fermeture du circuit plaque après intervention des connexions aux bornes de la batterie), on ne décèle encore *aucun courant* dans le circuit plaque;

— Par contre, il suffit d'une tension plaque *positive* de quelques dizaines de volts pour obtenir dans le circuit plaque un courant de plusieurs milliampères dont le sens conventionnel, à l'intérieur de la diode, va de la plaque au filament ⁽¹⁾.

Ainsi, **la diode n'est traversée par un courant que si le filament est chaud et si la tension plaque $V_P - V_F = U$ est positive.**

3° Le filament incandescent étant maintenu à une température θ constante, si l'on augmente progressivement la valeur U de la tension plaque, l'intensité I du courant croît d'abord rapidement puis devient pratiquement constante : on dit alors que l'on a obtenu le **courant de saturation**.

⁽¹⁾ Ce sens explique pourquoi la plaque est encore appelée l'anode et le filament la cathode.

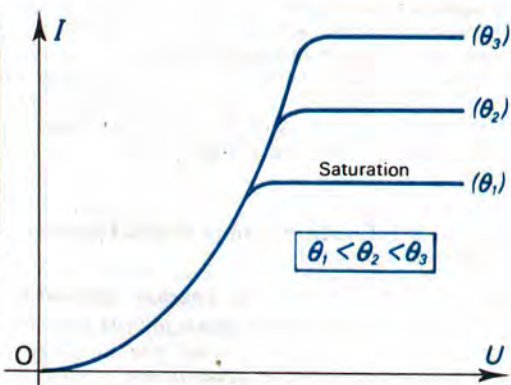


Fig. 2. — Les courbes caractéristiques d'une diode thermoélectronique.

4° Le courant de saturation est d'autant plus intense que la température θ du filament est plus élevée.

L'ensemble de ces résultats est illustré par les **courbes caractéristiques** de la diode, qui représentent les graphes $I = f(U)$ pour plusieurs valeurs ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$) de la température du filament (fig. 2).

c. — L'interprétation : l'effet thermoélectronique.

Les électrons libres contenus dans le tungstène du filament s'agitent de façon incessante et désordonnée. Lorsque celui-ci est froid, leur énergie cinétique n'est cependant pas suffisante pour qu'ils puissent sortir du métal à l'intérieur duquel ils sont retenus par les forces électrostatiques qu'exercent sur eux les charges positives des noyaux.

Par contre, si le métal s'échauffe, l'énergie cinétique des électrons augmente et leur permet de s'échapper, en nombre croissant à mesure que la température du métal s'élève : c'est ce qu'on appelle l'**effet thermoélectronique**.

— Si la tension plaque est *négative* ($V_P - V_F < 0$), le champ électrique qui en résulte entre le filament et la plaque s'oppose au mouvement des électrons en direction de la plaque, de sorte qu'aucun d'eux ne peut atteindre celle-ci.

— Au contraire, si la tension plaque est *positive* ($V_P - V_F > 0$), le champ électrique accélère les électrons vers la plaque et l'on conçoit que le nombre de ceux qui y parviennent par unité de temps augmente rapidement avec l'intensité du champ, donc avec la valeur U de la tension plaque. Ces électrons, captés par la

plaque, passent dans le circuit plaque où leur circulation constitue le courant dont on lit l'intensité I sur le milliampèremètre.

Pour une valeur suffisante de U , les électrons émis par le filament chaud sont pratiquement tous captés par la plaque dans le même temps : l'intensité I cesse alors d'augmenter, la *saturation* est atteinte.

2. Les applications de la diode thermo-électronique.

a. — Le redressement du courant alternatif.

Si la tension plaque est *alternative*, le courant dans le circuit plaque n'existe que lorsqu'elle est positive, c'est-à-dire *pendant une alternance sur deux*. Ce **courant redressé** n'est pas un courant continu mais *son sens est constant* (photo ci-dessous).



On emploie, sous le nom de « *lampes valves* », des diodes thermoélectroniques pour alimenter en courant redressé les récepteurs de radiodiffusion et de télévision.

Les *kénotron*s sont aussi des diodes redresseuses, mais de grandes dimensions et spécialement agencées pour pouvoir supporter, entre la plaque et le filament, des tensions alternatives de valeur efficace très élevée, de l'ordre des centaines de kilovolts; ils servent à l'alimentation des tubes producteurs de rayons X (chap. suivant).

b. — Les tubes électroniques à électrodes multiples.

Il est possible d'étendre considérablement le domaine d'application des diodes thermoélectroniques en interposant, entre le filament et la plaque, une ou plusieurs électrodes supplémentaires portées à des potentiels variables par rapport au potentiel du filament.

On obtient ainsi des *triodes*, *tétrapodes*, *pentodes*, très utilisées en radioélectricité, mais que concurrencent de plus en plus les *transistors*, fondés sur les propriétés électriques des corps semi-conducteurs.

◀ Le graphe d'un courant redressé.

B. L'ACCÉLÉRATION DES ÉLECTRONS PAR UN CHAMP ÉLECTRIQUE LES PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX D'ÉLECTRONS

3. L'accélération d'un faisceau d'électrons dans le vide; le canon à électrons.

a. — Le principe du dispositif accélérateur.

La figure 3 représente très schématiquement un dispositif expérimental, dérivé de la diode, permettant d'une part d'obtenir une émission continue d'électrons par effet thermoélectronique, et d'autre part d'accélérer ces électrons *dans le vide* par un champ électrique.

— La *cathode thermoémissive* C est un tube

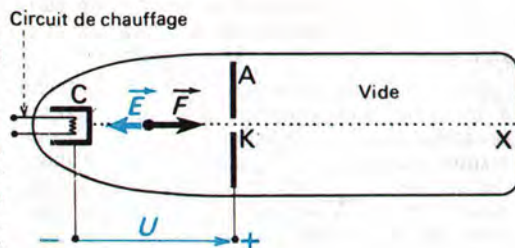


Fig. 3.

de nickel que l'on chauffe intérieurement au moyen d'un filament de tungstène porté à l'incandescence par effet Joule. Le tube est recouvert d'une très mince couche d'oxydes de baryum et de strontium ayant la propriété d'accroître l'intensité de l'émission thermoélectronique.

— L'anode A est une plaque métallique circulaire, trouée en son milieu. On établit entre l'anode et la cathode une différence de potentiel $V_A - V_C$ positive dont la valeur U , dite *tension accélératrice*, peut varier de quelques dizaines de volts à plusieurs kilovolts.

b. — L'énergie cinétique et la vitesse acquises par les électrons à la traversée du champ électrique.

Les électrons sortent de la cathode avec des vitesses variables, mais toujours assez faibles pour être négligées.

Soit l'un de ces électrons, en un point de l'axe CX, dans le champ électrique qui existe entre la cathode et l'anode du fait de la tension accélératrice U (fig. 3) :

Si $\vec{E}$ désigne le vecteur champ électrique au point considéré, l'électron est soumis à une force

électrique $\vec{F}$ qui l'entraîne vers l'anode.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, la variation ΔE_c de l'énergie cinétique de l'électron entre l'instant où il sort de la cathode et celui où il traverse le trou de l'anode est mesurée par

le travail de la force électrique $\vec{F}$ entre ces deux instants; or, nous avons appris (cours de Première) que ce travail est dans tous les cas ⁽¹⁾ égal au produit de la charge — e de l'électron par la différence de potentiel $V_C - V_A = -U$ entre le point de départ et le point d'arrivée, quel que soit le chemin suivi par la particule de l'un à l'autre point :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 - 0 = -e \cdot -U$$

$$\text{D'où : } \boxed{\frac{1}{2} m v^2 = eU} \begin{cases} m \text{ en kg;} \\ v \text{ en m/s;} \\ e \text{ en C;} \\ U \text{ en V.} \end{cases} \quad (1)$$

L'électron-volt :

Cette importante relation, fondamentale en Électronique, donne en *joule* l'énergie cinétique acquise par l'électron en traversant de bout en bout le champ électrique accélérateur. Comme la charge élémentaire e est très faible, le nombre obtenu est le plus souvent très petit; aussi préfère-t-on généralement mesurer l'énergie cinétique des particules électrisées en prenant comme unité l'**électron-volt (eV)** :

⁽¹⁾ Le champ électrique où se déplace la particule électrisée peut être uniforme ou quelconque.

L'électron-volt est l'énergie cinétique acquise par un électron de vitesse initiale nulle sous l'influence d'une tension accélératrice de 1 volt.

En faisant $e \approx 1,60 \times 10^{-19}$ coulomb et $U = 1$ volt dans la relation (1), nous voyons que :

$$\boxed{1 \text{ électron-volt} \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ joule.}}$$

On emploie aussi :

— Le **mégaélectron-volt** (MeV; prononcer *mev*), valant 1 million d'électrons-volts :

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} \approx 1,60 \times 10^{-13} \text{ J}$$

— Le **gigaélectron-volt** (GeV; prononcer *gev*), égal à 1 milliard d'électrons-volts :

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} \approx 1,60 \times 10^{-10} \text{ J}$$

En K, à la sortie du champ accélérateur, la **vitesse acquise** par l'électron se déduit de la relation (1) :

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} U} \begin{cases} e/m \text{ en C/kg;} \\ U \text{ en V;} \\ v \text{ en m/s.} \end{cases} \quad (2)$$

Exemples numériques :

Comme la charge massique de l'électron vaut :

$$\frac{e}{m} \approx 1,76 \times 10^{11} \text{ C/kg,}$$

la relation (2) peut s'écrire :

$$v \approx \sqrt{2 \times 1,76 \times 10^{11} U} \approx 6 \times 10^5 \sqrt{U} \text{ m/s}$$

ou encore :

$$v \approx 600 \sqrt{U} \text{ km/s}$$

Si $\begin{cases} U = 100 \text{ volts, } v \approx 6000 \text{ km/s} \\ U = 10^4 \text{ volts (10 kilovolts), } v \approx 60\,000 \text{ km/s} \end{cases}$

De telles vitesses — qui surpassent de beaucoup celles des missiles les plus rapides que l'on sache actuellement construire — sont acquises sur des parcours de l'ordre du décimètre; cela implique évidemment des *accélérations énormes*, qui ne sont possibles qu'en raison de l'extrême petitesse de l'inertie de l'électron.

Remarque.

On ne peut cependant pas accroître indéfiniment la vitesse communiquée aux électrons en augmentant la tension accélératrice U .

En effet, la masse d'un mobile ne peut être considérée comme une constante qu'autant que le carré v^2 de sa vitesse est négligeable devant le carré c^2 de la vitesse de la lumière dans le vide (p. 297). Si la vitesse dépasse quelques dizaines de milliers de km/s, le mouvement n'obéit plus aux lois de la Mécanique newtonienne mais à celles de la Mécanique relativiste, de sorte que la relation (2) n'est plus applicable.

Le calcul relativiste montre que si l'on pouvait augmenter la tension U indéfiniment, la vitesse de l'électron n'augmenterait pas indéfiniment mais tendrait vers la vitesse de la lumière.

Avec des tensions accélératrices atteignant plusieurs centaines de kilovolts, on arrive à communiquer aux électrons des vitesses de l'ordre de 250 000 km/s (5/6 de c).

Pour dépasser cette valeur, il faudrait appliquer des tensions égales ou supérieures à 10^8 volts; on préfère alors employer un accélérateur d'un principe tout différent (*) capable de donner aux électrons des vitesses (très voisines de c) qui exigeraient, dans un dispositif du type précédent (fig. 3), des tensions accélératrices dépassant 1 milliard de volts!

c. — Le canon à électrons.

A partir de K , à la sortie du champ accélérateur (fig. 3), l'électron, n'étant plus soumis à une force électrique, poursuit son mouvement en ligne droite à vitesse v constante.

Toutefois si — comme nous l'avons supposé — l'anode est réduite à une simple plaque perpendiculaire à OX , les vitesses de sortie v des électrons n'ont pas toutes la même direction, de sorte que le faisceau électronique obtenu est divergent.

Le « canon à électrons », qui constitue le dispositif émetteur et accélérateur d'électrons équipant par exemple un oscilloscope électronique (fig. 9) ou un microscope électronique (fig. 21), comporte en fait plusieurs anodes ayant la forme de cylindres de révolution autour de la direction de lancement des électrons. En établissant entre ces anodes et la cathode des différences de potentiel accélératrices de valeurs U_1 , U_2 , ... convenables, on obtient à la sortie du champ un faisceau électronique sensiblement **homocinétique**, c'est-à-dire formé d'électrons ayant pratiquement tous des vitesses v de mêmes direction, sens et module.

On règle l'intensité du faisceau en portant la cathode émissive à une température plus ou moins élevée et la vitesse v des électrons en faisant varier les tensions d'accélération.

4. Les propriétés des faisceaux d'électrons.

Pour mettre expérimentalement en évidence les propriétés des faisceaux électroniques, nous utilisons un **tube de Crookes**, dispositif émetteur et accélérateur beaucoup moins perfectionné que le canon à électrons mais dont la mise en œuvre est plus facile et qui permet de matérialiser les trajectoires électroniques.

(*) Tel, par exemple, qu'un *bétatron* dans lequel l'énergie cinétique acquise par les électrons dépasse 100 MeV.



Un faisceau électronique dans un tube de Crookes.

Dans un tube de Crookes le mécanisme de production des électrons est différent de l'effet thermoélectronique :

Une d. d. p. de quelques dizaines de kilovolts est établie entre deux électrodes métalliques disposées à l'intérieur d'un tube de verre où un vide partiel a abaissé la pression du gaz résiduel à environ 1/100 de mm de mercure.

Parmi les molécules d'un gaz, il en existe toujours qui, sous diverses influences, se transforment en ions gazeux positifs en perdant un ou plusieurs électrons. Dans le champ électrique intense régnant à l'intérieur du tube, ces ions positifs sont soumis à des forces électriques qui les précipitent sur l'électrode au plus bas potentiel fonctionnant comme cathode.

Soumise à ce bombardement, la cathode perd des électrons que le champ électrique lance en sens inverse de l'afflux positif; sur leur parcours, certains d'entre eux rencontrent des molécules du gaz raréfié et peuvent en arracher d'autres électrons. Cette ionisation par choc entretient l'afflux d'ions positifs sur la cathode et, par suite, l'émission d'électrons par celle-ci.

a. — Un faisceau d'électrons excite la fluorescence de certains corps.

On dit qu'un corps est *fluorescent* s'il émet des radiations lumineuses lorsqu'on le soumet à l'action de certains rayonnements.

C'est ainsi que, dans le tube de Crookes, la *craie* s'illumine en jaune orangé, le *rubis* (alumine cristallisée) en rouge, le *tungstate de cadmium* en bleu, le *diamant*, le *platinocyanure de baryum*, la *willemite* (silicate de Zn) en vert, ... D'autre part, le verre du tube émet lui-même une lumière verdâtre par fluorescence.

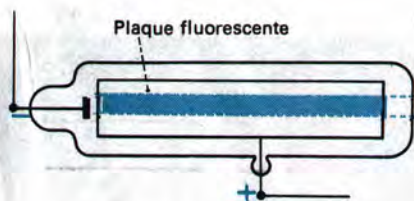


Fig. 4

Cette propriété permet de matérialiser le trajet d'un faisceau électronique (fig. 4) comme on matérialise un faisceau lumineux avec une plaque diffusante.

b. — Un faisceau d'électrons est arrêté par la matière.

L'ombre d'une croix métallique sur la paroi de verre illuminée par fluorescence montre que la croix n'est pas traversée par le faisceau électronique (fig. 5); la forme de l'ombre, semblable à celle de la croix, prouve de plus que, dans un tube de Crookes, les trajectoires des électrons sont des droites normales à la cathode, quelle que soit d'ailleurs la position de l'anode.

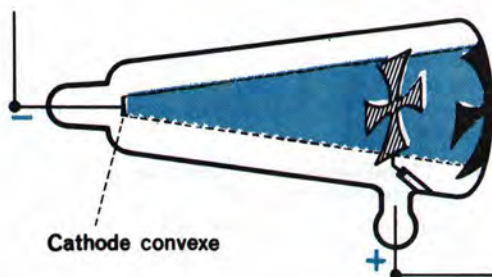


Fig. 5

c. — Un faisceau d'électrons transporte de l'énergie cinétique.

On peut en effet observer l'apparition de diverses formes d'énergie à la suite de l'arrêt du faisceau électronique par un obstacle :

— **Énergie calorifique** : un corps s'échauffe lorsqu'il est frappé par un faisceau électronique; par exemple, une lame de platine placée au centre de courbure d'une cathode ayant la forme d'une calotte sphérique concave peut s'échauffer jusqu'à son point de fusion.

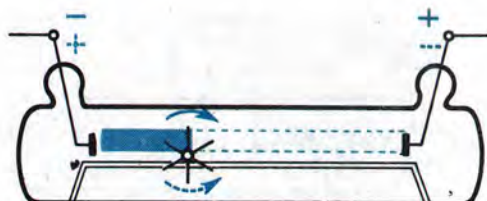


Fig. 6. — L'impact du faisceau électronique sur les palettes de mica fait rouler le moulinet sur les rails de verre.

— **Énergie mécanique** : le « bombardement » des ailettes d'un moulinet léger provoque la rotation de ce moulinet (fig. 6).

— **Énergie chimique** : exposés à un faisceau d'électrons, certains corps subissent une réduction; un verre à l'oxyde de plomb, par exemple, noircit par suite de la formation de plomb métallique. D'autre part, les faisceaux électroniques impressionnent les émulsions photographiques.

— **Énergie rayonnante** : la fluorescence, déjà signalée, est un exemple d'apparition d'énergie rayonnante. Nous verrons aussi que des corps, bombardés par des électrons rapides, émettent des rayons X, c'est-à-dire des radiations électromagnétiques de très courtes longueurs d'onde.

d. — La déviation d'un faisceau d'électrons par un champ électrique et par un champ magnétique.

1° Si l'on fait passer un faisceau électronique à travers le champ électrique existant entre deux plateaux conducteurs parallèles porteurs de charges électriques de signes contraires (fig. 7), on constate qu'il est dévié vers le plateau chargé positivement. Le calcul montre que, dans un champ électrique uniforme, les trajectoires des électrons se courbent en arcs de parabole dans des plans parallèles au vecteur champ $\vec{E}$ et que

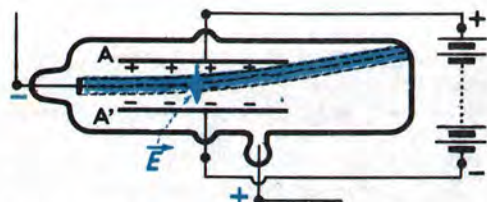


Fig. 7. — La déviation par un champ électrique.

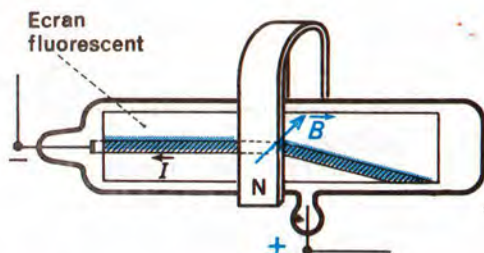


Fig. 8. — La déviation d'un faisceau d'électrons par un champ magnétique.

la déviation qui en résulte est proportionnelle à l'intensité du champ (voir, en fin de chapitre, l'exercice résolu n° 1).

2° Il est d'autre part facile de montrer qu'un faisceau électronique est également dévié par un champ magnétique (fig. 8).

A la traversée d'un champ uniforme dont le vecteur induction $\vec{B}$ est perpendiculaire à la direction initiale du faisceau, les trajectoires des électrons se courbent en arcs de cercle en demeurant contenues dans des plans perpendiculaires au vecteur $\vec{B}$.

L'exercice résolu n° 2 montrera comment l'application de la loi de Laplace permet de prévoir le sens de la déviation et de calculer sa valeur en fonction de la vitesse des électrons et de l'intensité de l'induction magnétique.

5. L'oscilloscope (ou oscillographe) électronique.

L'oscilloscope électronique dont nous nous sommes servis pour étudier les phénomènes vibratoires et le courant alternatif utilise les propriétés d'un faisceau d'électrons d'origine thermoélectronique.

a. — La description schématique.

Dans un tube de verre où règne un vide aussi parfait que possible sont disposés (fig. 9) :

1° Un **canon à électrons**, conçu pour fournir un faisceau électronique très mince, pratiquement homocinétique, dont la trace, sur le fond du tube recouvert d'une couche fluorescente, apparaît sous la forme d'un **spot** lumineux dont la luminance varie comme l'intensité du faisceau;

2° Des **plaques déflectrices**, permettant de soumettre le faisceau d'électrons à deux champs électriques rectangulaires. La paire de plaques X



produit un champ horizontal qui dévie le faisceau d'électrons suivant $x'Ox$; la paire de plaques Y produit un champ vertical qui dévie le faisceau suivant $y'Oy$. Ces deux déviations sont respectivement proportionnelles aux intensités des champs correspondants, donc aussi aux tensions U_{AB} et U_{CD} appliquées entre les plaques de chaque paire.

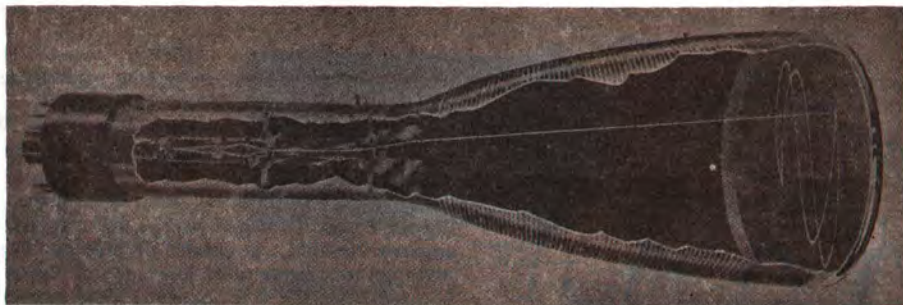
b. — L'application à l'étude d'un phénomène rapidement variable.

Supposons par exemple qu'on se propose d'étudier les variations en fonction du temps d'une tension électrique $u = f(t)$:

L'application de cette tension entre C et D provoque un déplacement du spot le long de $y'y$ proportionnel à u .

Si, d'autre part, une tension u' en dents de scie (fig. 10), établie entre A et B, donne au spot un mouvement dit de **balayage**, c'est-à-dire un mouvement rectiligne uniforme suivant $x'x$, avec retours périodiques quasi instantanés en x' , la composition de ces deux déviations rectangulaires fait décrire au spot une courbe représentant fidèlement les variations de u en fonction du temps.

La persistance des impressions visuelles permet d'observer cette courbe, pourvu toutefois que la vitesse de balayage, donc la période T' de la tension u' , soit convenable; par exemple, si la



Vue intérieure d'un oscilloscope électronique montrant le canon à électron, les plaques défectrices et l'écran fluorescent. Photo R. T. C.

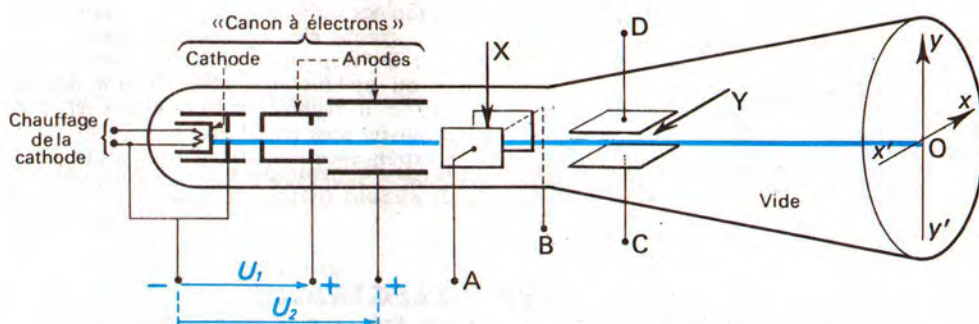
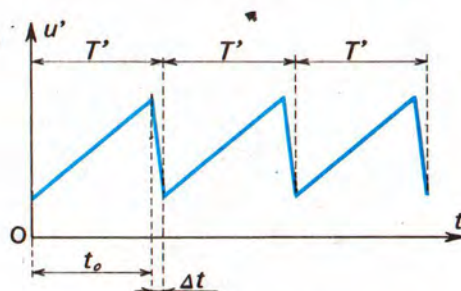


Fig. 9. — Le schéma d'un oscilloscope (ou oscillographe) électronique.

Fig. 10. — Le graphe de la tension périodique en dents de scie assurant le balayage horizontal du spot.

La tension u' (établie entre A et B; fig. 9) croît proportionnellement au temps, puis revient brusquement (et périodiquement) à sa valeur initiale. t_0 est la durée d'un balayage de x' en x ; Δt est celle, beaucoup plus faible, du retour en x' .



Le mouvement vibratoire imprimé au spot par un champ électrique (a) et par un champ magnétique (b) alternatifs.

(a)

(b)



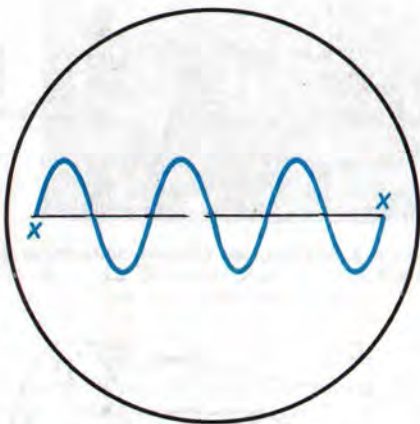


Fig. 11. — L'aspect de l'écran pour une période T' de balayage égale à 3 fois la période T de la tension étudiée (qui est ici une tension sinusoïdale).

tension u à étudier est elle-même périodique de période T , une période de balayage $T' = nT$ permettra d'observer, toujours à la même place de l'écran, n sinuosités consécutives du graphe $u = f(t)$ (fig. 11).

La tension étudiée u peut être prise aux bornes d'une résistance *pure* parcourue par un courant variable : la courbe donnée par l'oscillographe représente alors le graphe de l'intensité $i = f(t)$; de plus, si le courant i a été modulé en traversant un *microphone*, la même courbe renseigne sur la forme des *vibrations sonores* recueillies par le microphone (fig. 12 de la p. 159).

On conçoit ainsi la multiplicité des phénomènes rapides qu'il est possible d'étudier avec un oscillographe électronique; son grand avantage sur les dispositifs d'enregistrement mécaniques ou optiques (p. 158) est son *absence d'inertie* : il répond immédiatement et peut même suivre, sans retard appréciable, les variations extrêmement rapides d'un courant oscillant dont la fréquence atteint les mégahertz.

C. L'EFFET PHOTOÉLECTRIQUE LA NATURE CORPUSCULAIRE DE LA LUMIÈRE

6. L'existence de l'effet photoélectrique.

Réalisons le montage représenté par la figure 12.

a. — Électrisons le conducteur formé par la plaque de zinc et l'électroscope, puis éclairons la plaque avec une source émettant une lumière riche en radiations *ultraviolettes* (arc électrique utilisé sans condensateur ou lampe à vapeur de mercure dans une ampoule de silice) :

1° Si la charge électrique du conducteur est *positive*, l'illumination ne produit aucun changement dans l'écartement des feuilles de l'électroscope; le conducteur reste donc chargé.

2° Par contre, si la charge est *négative*, les feuilles retombent rapidement, preuve que le conducteur plaque-électroscope *se décharge*.

b. — Électrisons de nouveau ce conducteur *négativement*, puis éclairons la plaque après avoir interposé entre elle et la source une *lame de verre* qui absorbe l'ultraviolet : la décharge n'a plus lieu.

Ces observations montrent qu'une plaque de zinc électrisée *négativement* se décharge quand elle reçoit des radiations ultraviolettes. On en

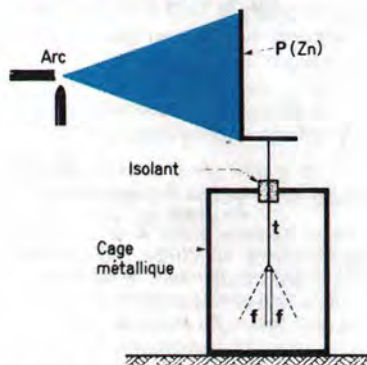


Fig. 12. — La mise en évidence de l'émission photoélectrique.

Une plaque de zinc P , fraîchement nettoyée, est soudée à la tige d'un électroscope à feuilles d'or. Si l'on électrise la plaque, la charge électrique se répartit sur tout le conducteur $Ptff'$ et les deux feuilles d'or f et f' , pareillement chargées, se repoussent et divergent.

déduit que **les radiations ultraviolettes expulsent des électrons du métal.**

Cette émission d'électrons par un métal qui reçoit de l'énergie rayonnante constitue l'**effet photoélectrique**, découvert par Hertz en 1887.

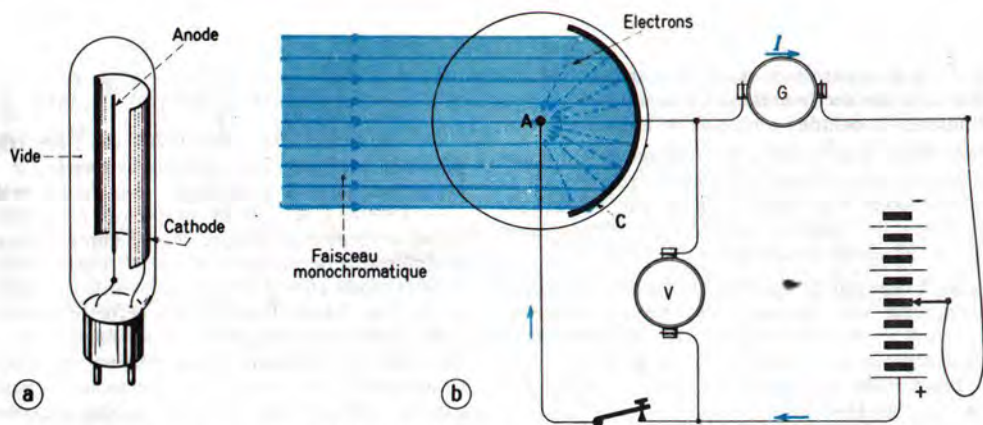


Fig. 13. — La cellule photoémissive.

a) Type de cellule à anode filiforme.

b) Montage de la cellule permettant l'étude des lois de l'émission photoélectrique.

7. Les lois de l'émission photoélectrique des métaux purs placés dans le vide.

a. — Le dispositif expérimental.

La partie principale du montage est une **cellule photoémissive**, constituée par une ampoule en verre spécial, transparent à l'ultraviolet, dans laquelle règne un vide aussi parfait que possible et qui comporte (fig. 13) :

1° Une **cathode C**, formée par une couche du métal pur à étudier;

2° Une **anode A**, réduite à un fil (ou à une boucle) métallique.

L'anode, portée à un potentiel supérieur à celui de la cathode, capte les électrons qu'expulse le métal de la cathode lorsqu'il est éclairé par une source convenable; il en résulte, dans le circuit extérieur, un courant de très faible intensité que l'on mesure au moyen d'un galvanomètre très sensible G.

La cathode est éclairée par une **lumière monochromatique** dont on peut faire varier l'intensité et la fréquence ν .

b. — Les résultats expérimentaux.

1° **Pour un métal pur, l'émission photoélectrique ne se produit que si la fréquence ν de la lumière excitatrice est supérieure à une limite ν_0 , caractéristique de ce métal.**

Il revient au même de dire que la longueur d'onde ($\lambda = \frac{c}{\nu}$) doit être **inférieure** à une

longueur d'onde limite λ_0 qui caractérise le **seuil d'excitation**.

Par exemple, la longueur d'onde limite étant $\lambda_0 = 0,55\mu$ pour le **potassium**, une cellule à cathode de potassium ne débite un courant que si elle reçoit de la lumière contenant des radiations de longueurs d'onde inférieures à $0,55\mu$.

Voici les longueurs d'onde qui correspondent aux seuils d'excitation — ou **seuils photoélectriques** — de quelques métaux purs :

Césium	0,66 μ	} Radiations visibles.
Potassium	0,55	
Calcium	0,45	
Zinc	0,37	} Radiations ultraviolettes.
Cuivre	0,29	
Argent	0,27	
Platine	0,19	

C'est parce que le seuil photoélectrique du zinc est dans l'ultraviolet que la décharge d'une plaque de zinc électrisée négativement (fig. 12) ne se produit qu'en présence d'une lumière contenant des radiations ultraviolettes. Par contre, les seuils photoélectriques du **potassium** et du **césium** sont situés dans le spectre visible; aussi ces deux métaux sont-ils largement utilisés dans la confection des modèles courants de cellules photoémissives.

Une modification chimique de la surface du métal peut faire varier le seuil photoélectrique : c'est ainsi que, par un traitement spécial du césium, on porte la longueur d'onde limite λ_0 à plus de 1 micron, ce qui permet de construire des cellules capables de « répondre » en lumière infrarouge.

2° **L'émission photoélectrique est instantanée**; on observe en effet que le courant photo-

(¹) c désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

électrique apparaît et cesse en même temps que l'irradiation de la cathode. Commandée par la lumière, la cellule « répond » immédiatement.

3° Pour une lumière de fréquence ν donnée, l'intensité du courant photoélectrique dépend de la puissance rayonnante reçue par la cathode et de la différence de potentiel $V_A - V_C$ appliquée entre l'anode et la cathode.

Si le faisceau de lumière qui frappe la cathode transporte une *puissance rayonnante constante*, le courant photoélectrique varie en fonction de la différence de potentiel $V_A - V_C$ comme l'indiquent l'une et l'autre des courbes (1) et (2) de la figure 14-a.

Portons notre attention sur les régions extrêmes de ces courbes :

— Au-delà d'une certaine valeur de la d.d.p. on obtient la *saturation* : l'intensité I du courant n'augmente plus parce que tous les électrons émis par la cathode sont captés par l'anode dans le même temps. L'intensité I du **courant de saturation** mesure donc l'intensité de l'émission photoélectrique qui correspond à la valeur actuelle de la puissance rayonnante reçue par la cathode.

Si l'on envoie successivement sur la cathode des puissances rayonnantes de valeurs $P_1, P_2, \dots$, on obtient des courants de saturation $I_1, I_2, \dots$, tels que :

$$\frac{I_1}{P_1} = \frac{I_2}{P_2} = \dots = C^{\text{te}}$$

On en déduit que **l'intensité de l'émission photoélectrique est proportionnelle à la puissance rayonnante reçue par la cathode.**

— Quelle que soit la puissance rayonnante reçue, le courant photoélectrique s'annule lorsque la différence de potentiel $V_A - V_C$ entre l'anode et la cathode atteint une certaine valeur *négligée* — U_0 (fig. 14-a). Interprétons cette propriété :

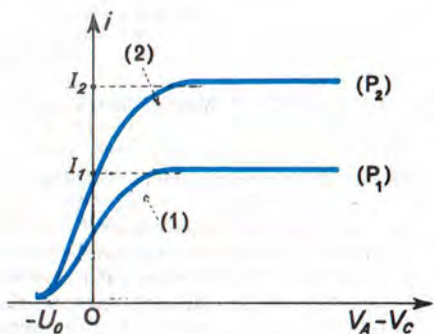
A une d.d.p. négative entre l'anode et la cathode (1) correspond un champ électrique antagoniste qui *ralentit* les électrons expulsés par la cathode. Si ν est la vitesse *maximale* d'expulsion, les électrons sortent de la cathode

avec une énergie cinétique maximale $\frac{1}{2} m\nu^2$ et ils sont tous arrêtés entre la cathode et l'anode si la d.d.p. décélétratrice a une valeur $-U_0$ telle que (d'après la relation (1) du § 3) :

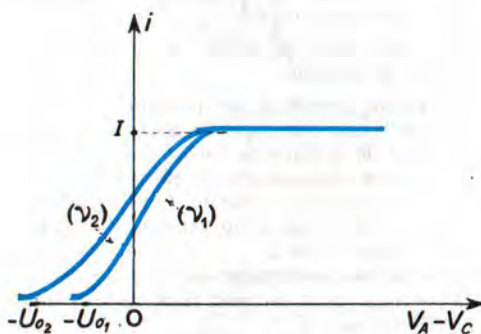
$$0 - \frac{1}{2} m\nu^2 = -eU_0$$

Variation de l'énergie cinétique Travail résistant de la force électrique

(1) Obtenue en intervertissant les connexions joignant A et C à la batterie d'accumulateurs (fig. 13).



(a)



(b)

Fig. 14.

a) Le graphe de l'intensité i du courant photoélectrique en fonction de la d.d.p. entre anode et cathode et pour diverses valeurs de la puissance rayonnante reçue par la cathode.

Les courbes (1) et (2) correspondent à la même fréquence ν et à des puissances rayonnantes différentes ($P_2 > P_1$).

Le potentiel d'arrêt $-U_0$ est le même dans les deux cas.

b) La variation du potentiel d'arrêt avec la fréquence ν de la lumière reçue par la cathode.

Les deux courbes correspondent à des fréquences différentes ($\nu_2 > \nu_1$) et des puissances rayonnantes conduisant au même courant de saturation I . Les potentiels d'arrêt sont différents :

$$\nu_2 > \nu_1 \text{ entraîne } U_{02} > U_{01}.$$

La valeur absolue U_0 est appelée le **potentiel d'arrêt**; la détermination de ce potentiel d'arrêt U_0 permet de connaître l'énergie cinétique maximale ($\frac{1}{2}mv^2 = eU_0$) des électrons à la sortie du métal.

Or, l'expérience montre que le potentiel d'arrêt ne dépend pas de la puissance rayonnante reçue (fig. 14-a) mais croît avec la fréquence de la lumière employée (fig. 14-b).

On en déduit que **l'énergie cinétique maximale des électrons qui sortent du métal de la cathode**

— est indépendante de la puissance rayonnante reçue par la cathode;

— est une fonction croissante de la fréquence de la radiation qui frappe la cathode.

8. L'interprétation : le mécanisme des échanges d'énergie entre la lumière et les électrons; l'hypothèse des photons.

a. — Pour qu'un électron soit expulsé d'un métal sous l'action d'une radiation convenable, il doit absorber une énergie rayonnante W au moins égale à un certain **travail d'extraction** W_0 , variable avec la nature du métal. Si l'énergie W absorbée par l'électron est supérieure à W_0 , la différence se retrouve dans l'énergie cinétique de l'électron expulsé, de sorte que cette énergie cinétique est au plus égale à :

$$\frac{1}{2}mv^2 = W - W_0 \quad (1)$$

Or, nous venons de voir que cette énergie cinétique maximale est indépendante de l'énergie rayonnante arrivant sur la cathode par unité de temps et ne dépend que de la fréquence ν de la radiation qui transporte cette énergie. Les mesures des potentiels d'arrêt pour diverses radiations (§ précédent) conduisent en effet à la relation :

$$\frac{1}{2}mv^2 = h(\nu - \nu_0) \quad (2)$$

dans laquelle :

ν_0 est la fréquence qui caractérise le seuil photoélectrique du métal de la cathode;
 h est la **constante de Planck**, indépendante de la nature de ce métal. En unités SI :

$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ joule} \cdot \text{seconde}$

La comparaison des relations (1) et (2) conduit à identifier le terme $h\nu$ avec l'énergie W absorbée par un électron expulsé et le terme $h\nu_0$ avec le travail d'extraction W_0 . Il s'en dégage une conclusion étonnante *a priori* :

Que la lumière monochromatique reçue par la cathode soit intense ou faible, chacun des électrons expulsés du métal emprunte à cette radiation le même petit « grain » d'énergie $W = h\nu$, on dit encore le même **quantum** d'énergie.

b. — Cet échange d'énergie par quanta entre la lumière et les électrons ne peut s'expliquer à partir de la théorie électromagnétique de la lumière, qui suppose une répartition continue de l'énergie transportée par les ondes lumineuses.

Aussi, l'interprétation de l'émission photoélectrique a-t-elle suggéré à Einstein l'**hypothèse des photons** :

L'énergie transportée par une radiation de fréquence ν a une structure discontinue : elle est répartie en « grains », ou **photons**, transportant chacun le même quantum d'énergie $h\nu$, égal au produit de la fréquence de la radiation par la constante de Planck.

Quand un écran intercepte un faisceau lumineux, il reçoit une « pluie » de photons dont le nombre, par unité de surface et par unité de temps, est proportionnel à l'intensité de la lumière incidente, mais dont l'énergie individuelle dépend uniquement de la fréquence de cette lumière.

Cette hypothèse des photons confère à la lumière un **aspect corpusculaire** qui paraît s'opposer à l'**aspect ondulatoire** que nous lui avons reconnu jusqu'à présent : de là une **dualité d'aspects** qui a suggéré, voici à peu près un demi-siècle, de nouvelles théories concernant le rayonnement électromagnétique ⁽¹⁾.

Retenons qu'un photon, considéré comme corpuscule, est dénué à la fois de **masse propre** et de **charge électrique** et ne peut se concevoir qu'animé d'une vitesse égale à celle de la lumière.

c. — A partir de l'hypothèse des photons, l'explication de l'émission photoélectrique devient immédiate :

Considérons une cathode photoémissive soumise à une lumière *monochromatique*; que cette lumière soit intense ou faible, la cathode reçoit toujours des photons de même énergie $W = h\nu$, mais en plus ou moins grand nombre.

Soit l'un de ces photons : ou bien il n'est pas absorbé, ou bien il cède son énergie à un électron du métal;

(1) Voir la lecture p. 296.

— Si son quantum $h\nu$ est supérieur ou au moins égal au travail d'extraction W_0 , l'électron est expulsé;

— Par contre, si $h\nu$ est inférieur à W_0 , aucun électron n'est émis, d'où l'existence d'une fréquence limite ν_0 donnée par la relation :

$$h\nu_0 = W_0; \quad \nu_0 = \frac{W_0}{h}$$

C'est la fréquence du *seuil photoélectrique*.

Notons bien cette loi du « tout ou rien » : l'émission électronique est ou n'est pas possible selon que ν est supérieure ou inférieure à ν_0 . Dans le second cas, l'accumulation d'un nombre quelconque de photons trop faibles — si grand soit ce nombre — est incapable de provoquer l'expulsion d'un seul électron.

Quant à l'interprétation de la proportionnalité du courant de saturation I débité par la cellule à la puissance rayonnante P reçue par la cathode, elle conduit à admettre, pour l'ensemble des photons incidents, un *pourcentage constant de photons « utiles »* ⁽¹⁾ :

Comme l'expulsion d'un électron correspond à l'absorption d'un photon, le nombre d'électrons recueillis à chaque seconde par l'anode est alors proportionnel au nombre total de photons venant frapper la cathode dans le même temps.

9. L'intérêt pratique de la cellule photoémissive.

La possibilité de *commander* par un faisceau lumineux le courant électrique fourni par une cellule photoémissive et d'*infliger* à ce courant des variations reproduisant fidèlement et instantanément les variations d'intensité de la lumière incidente, si rapides soient-elles, comporte d'importantes applications.

Notons que le *courant de saturation d'une cellule à vide est toujours faible* (de l'ordre d'une fraction de microampère pour un éclairage moyen de la cathode); il doit être généralement amplifié avant d'être utilisé.

Parmi les applications des cellules photoémissives, citons la *photométrie* (mesure des intensités lumineuses), la lecture des films sonores (*cinéma parlant*) et certaines caméras de *télévision*.

⁽¹⁾ Ce pourcentage dépend beaucoup de la cellule étudiée; il varie de quelques pour-cent à moins de 1 pour mille.

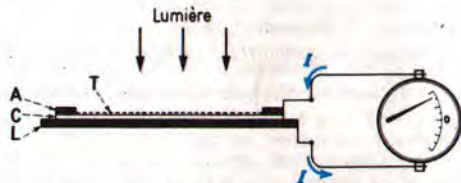


Fig. 15. — Le schéma d'une photopile.

La couche photosensible C est faite d'un corps semi-conducteur tel que le *germanium* ou le *silicium* ayant la propriété, quand il est en contact avec une lame L d'un conducteur convenablement choisi, de donner naissance à une force électromotrice toutes les fois qu'il reçoit de la lumière.

Pour utiliser cette force électromotrice il faut une seconde électrode : on la réalise par une couche d'or T (assez mince pour être transparente) ou par un fin grillage de fils métalliques; l'anneau A, en contact avec T, permet de souder une borne de retour du courant.

10. Les photopiles.

La figure 15 donne le schéma d'une photopile, que l'on appelle souvent « cellule photovoltaïque » comme la cellule photoémissive, bien qu'elle en diffère fondamentalement :

Outre que le principe de son fonctionnement est plus complexe, elle constitue un véritable *générateur*, transformant de l'énergie rayonnante en énergie électrique; elle est donc *utilisable sans générateur auxiliaire*. Il suffit, en effet, de connecter ses pôles aux bornes d'un galvanomètre pour obtenir la « traduction » électrique des variations d'intensité de la lumière incidente, pourvu toutefois que ces variations ne soient pas trop rapides.

Cette restriction lui fait préférer la cellule photoémissive, pourtant plus fragile et plus encombrante, dans les mesures photométriques de précision et dans les lecteurs de films sonores. Par contre, la photopile constitue cet « *œil électrique* », robuste et d'emploi facile, qui commande par exemple la mise en marche d'un escalier roulant, l'ouverture d'une porte, le déclenchement d'un signal d'alarme, ou qui compte les suites de personnes ou d'objets que l'on fait défiler devant lui.

A cette fin, un faisceau lumineux, qui peut être *infrarouge* (donc invisible), tombe normalement sur la photopile et produit un courant photoélectrique dont la suppression, quand un corps opaque intercepte le faisceau, déclenche le fonctionnement d'un dispositif électromécanique approprié.

Des photopiles au silicium sont utilisées pour transformer directement de l'énergie rayonnante en énergie électrique. C'est ainsi qu'associées en grand nombre dans des « *batteries solaires* », et disposées de façon à recevoir du Soleil le maximum d'éclairement, elles alimentent les satellites artificiels en énergie électrique.

Notons enfin que la photopile est aussi l'organe essentiel de la plupart des *posemètres* utilisés par les photographes pour déterminer le temps de pose.

EXERCICES

I. — EXERCICES RÉSOLUS

1. La déviation d'un faisceau d'électrons par un champ électrique.

Dans le vide d'un tube électronique à cathode thermoémissive (fig. 3), un faisceau d'électrons, supposé homocinétique de vitesse v_0 , aborde le champ électrique uniforme produit par deux plateaux conducteurs parallèles entre lesquels est établie une différence de potentiel U ; la direction du faisceau, à l'entrée du champ, est normale aux lignes de champ (fig. 16).

On demande la trajectoire des électrons à l'intérieur du champ électrique et la déviation α infligée au faisceau par ce champ.

Nous supposons que la vitesse initiale des électrons est assez faible devant la célérité de la lumière pour que les lois de la Mécanique classique restent applicables.

Considérons un électron, de masse m et de charge $-e$, au point O , à l'entrée du champ : il est soumis à une force électrique constante $\vec{F} = -e\vec{E}$, perpendiculaire à la direction de sa vitesse $\vec{v}_0$ et de sens contraire au vecteur $\vec{E}$.

Rapportons le mouvement aux deux axes rectangulaires :

Ox , de mêmes direction et sens que $\vec{v}_0$;

Oy , de mêmes direction et sens que $\vec{F}$.

L'accélération $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$ est dirigée suivant Oy et a pour module :

$$\gamma = \frac{eE}{m} = \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \quad \left(\text{car } E = \frac{U}{d} \right)$$

Les mouvements projetés sur Ox et Oy ont donc comme équations (l'instant $t=0$ correspondant à la position O) :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t^2 \\ x = v_0 t \end{cases}$$

Nous obtiendrons l'équation $y = f(x)$ de la trajectoire de l'électron en éliminant t entre les expressions de x et y :

$$y = \frac{1}{2} \frac{e}{mv_0^2} \cdot \frac{U}{d} x^2$$

C'est l'équation d'une **parabole** dont le sommet est O et dont l'axe de symétrie est Oy .

La valeur de la **dévi**ation s'obtient en calculant la dérivée pour la valeur de x égale à la largeur l du champ :

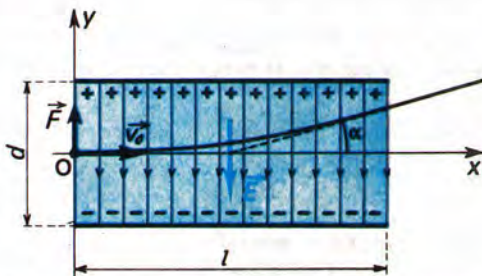


Fig. 16. — La déviation d'un faisceau d'électrons par un champ électrique uniforme.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{e}{mv_0^2} \cdot \frac{Ul}{d} \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ en kg;} \\ e \text{ en C;} \\ v_0 \text{ en m/s;} \\ U \text{ en V;} \\ l \text{ et } d \text{ en m.} \end{array} \right.$$

Application numérique.

Si : $v_0 = 20\,000 \text{ km/s} = 2 \times 10^7 \text{ m/s}$

$U = 100 \text{ V}$; $d = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$; $l = 0,2 \text{ m}$

On a, en remarquant que e/m est la charge massique de l'électron :

$$\frac{e}{m} \approx 1,76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{1,76 \times 10^{11}}{4 \times 10^{14}} \times \frac{100 \times 0,2}{5 \times 10^{-2}} = 0,176;$$

d'où : $\alpha \approx 10^\circ$

Remarque : La mesure de la déviation α permet de déterminer le produit

$$\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v_0^2}, \text{ connaissant } U, d \text{ et } l :$$

$$\frac{e}{mv_0^2} = \frac{d}{Ul} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

2. — La déviation d'un faisceau d'électrons par un champ magnétique.

— Un faisceau homocinétique d'électrons de vitesse $\vec{v}_0$ traverse, dans le vide, un champ magnétique uniforme, d'induction $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}_0$. On demande la trajectoire des électrons dans le champ et la déviation α infligée au faisceau par ce champ.

D'une manière générale, considérons une particule électrisée portant une charge de valeur algébrique Q . Lorsqu'elle entre dans un champ magnétique avec

une vitesse $\vec{v}_0$, elle est soumise à une force $\vec{F}$ que l'on détermine en appliquant la loi de Laplace relative à l'action d'un champ magnétique sur un élément de courant (fig. 9 de la p. 232).

L'élément de courant équivalent à la particule en mouvement se définit comme suit :

- sa direction est celle du vecteur vitesse $\vec{v}_0$;
- son sens est celui de $\vec{v}_0$ si la charge Q est positive, le sens contraire si Q est négative (cas de l'électron, pour lequel $Q = -e$);
- son intensité I est telle que le produit $I \Delta l$ qui figure dans l'expression de la loi de Laplace égale le produit Qv_0 de la charge de la particule par sa vitesse.

Par suite, l'intensité de la force électromagnétique due à l'action du champ magnétique sur l'électron en mouvement a pour expression :

$$F = I \Delta l B = ev_0 B$$

Cette force $\vec{F}$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{v}_0$ et à $\vec{B}$ et son sens est donné par la règle d'Ampère ou la règle des trois doigts de la main droite ⁽¹⁾ (fig. 17). Elle communique à l'électron une accélé-

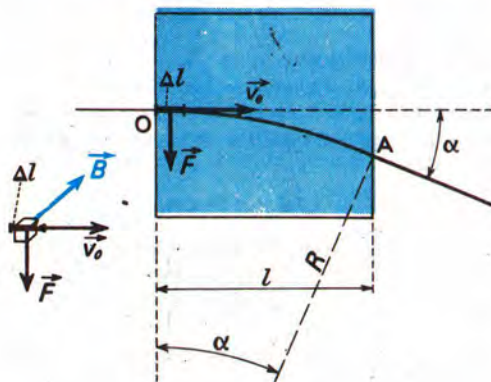


Fig. 17. — La déviation d'un faisceau d'électrons par un champ magnétique uniforme.

(¹) En tenant compte de ce que le sens conventionnel du courant équivalent est contraire au sens de $\vec{v}_0$, dans le cas d'une particule électrisée négativement.

ration de module $\gamma = \frac{F}{m} = \frac{ev_0}{m} B$ dont la direction est, comme celle de la force $\vec{F}$, normale à la trajectoire.

L'accélération $\vec{\gamma}$ n'a donc pas de composante tangentielle $\vec{\gamma}_T$, elle se réduit à la composante normale $\vec{\gamma}_N$. Par suite, la vitesse de l'électron conserve le même module v_0 et ne varie qu'en direction.

Si R désigne le rayon de courbure de la trajectoire en O, on a, en identifiant γ_N et γ :

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{ev_0}{m} B; \quad R = \frac{mv_0}{e} \cdot \frac{1}{B}$$

Comme tout est constant dans l'expression du rayon de courbure, celui-ci est constant : la trajectoire de l'électron dans le champ magnétique est donc un arc de cercle, de sorte que l'électron est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

L'angle de déviation α est égal à l'angle au centre de l'arc $\widehat{OA}$ (fig. 17); par suite :

$$\alpha = \frac{\widehat{OA}}{R} \approx \frac{l}{R} = \frac{e}{mv_0} \cdot Bl \quad \left\{ \begin{array}{l} e \text{ en C;} \\ m \text{ en kg;} \\ v \text{ en m/s;} \\ B \text{ en tesla;} \\ l \text{ en m.} \end{array} \right.$$

Application numérique.

si $\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 20\,000 \text{ km/s} = 2 \times 10^7 \text{ m/s} \\ B = 10^{-3} \text{ tesla}; l = 2 \text{ cm} = 2 \times 10^{-2} \text{ m} \end{array} \right.$

On trouve, avec $\frac{e}{m} \approx 1,76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$:

$$\alpha = 1,76 \times 10^{11} \times \frac{10^{-3} \times 2 \times 10^{-2}}{2 \times 10^7} = 0,176 \text{ radian} \approx 10^\circ$$

Remarque : la mesure de la déviation α permet de déterminer le produit $\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v_0}$ connaissant B et l :

$$\frac{e}{mv_0} = \frac{\alpha}{Bl}$$

D'autre part, si l'on superpose les actions d'un champ électrique uniforme et d'un champ magnétique uniforme, les deux déviations se composent et la mesure de leur résultante permet de déterminer simultanément, pour le même faisceau de particules, les deux produits :

$$\frac{e}{mv_0^2} \text{ et } \frac{e}{mv_0}$$

On en déduit à la fois la vitesse v_0 des particules et leur charge massique $\frac{e}{m}$.

II. — EXERCICES PROPOSÉS

1. Une diode (fig. 1) débite un courant de plaque d'intensité $I = 10$ milliampères lorsque la tension plaque a une valeur positive $U = 40$ volts.

1° Calculer le nombre des électrons qui arrivent sur la plaque par seconde.

2° En admettant que ces électrons sont émis par le filament chaud sans vitesse initiale, calculer la quantité de chaleur que produirait la transformation intégrale en chaleur de l'énergie cinétique des électrons qui frappent la plaque par minute.

Rép. : 1° $6,25 \times 10^{16}$ électrons ; 2° 5,8 calories.

2. 1° Calculer le travail d'extraction d'un électron dans le cas d'une cathode photoémissive au césium pur (λ_0 du seuil : $0,66 \mu$).

2° En déduire la vitesse initiale maximale de cet électron à la sortie du métal quand la lumière incidente est monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 0,55 \mu$.

3. Un électron est lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans le vide ; il pénètre dans une région de l'espace où règne un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ uniforme, perpendiculaire à la vitesse initiale. Démontrer que la trajectoire de l'électron dans le champ est circulaire et que son mouvement est uniforme. Évaluer le rayon R de la trajectoire en fonction des données v_0 , B et $\frac{e}{m}$ et le nombre de tours qu'effectue par seconde l'électron sur son orbite.

Application numérique : $v_0 = 10^4$ km/s ; $B = 10^{-3}$ tesla.

Rép. : $R \approx 5,6$ cm ; $N \approx 28 \times 10^6$ tours par seconde.

4. Soit un faisceau d'électrons émis dans le vide par une cathode C, accélérés dans la direction Ox par une anode A limitant un diaphragme D et frappant un écran fluorescent. La différence de potentiel entre l'anode et la cathode est $U_1 = +10\,000$ volts.

1° Sachant que l'électron a une charge $e = -1,60 \times 10^{-19}$ coulomb

et une masse $m = 0,9 \times 10^{-30}$ kg, calculer la vitesse et l'énergie cinétique E_c d'un électron. On admettra que m est constant, quelle que soit la vitesse.

2° Le faisceau d'électrons est alors soumis sur une distance d à l'action d'un champ électrique uniforme créé par un condensateur plan dont les armatures sont parallèles au plan xOz et distantes de $l = 2$ cm. La différence de potentiel entre les armatures est $U_2 = 1\,200$ V. On a $d = 6$ cm (fig. 18).

Déterminer le mouvement d'un électron et l'équation cartésienne de sa trajectoire dans le repère xOy.

Soit l le point de Ox d'abscisse $Ol = 3$ cm. La distance de l à l'écran fluorescent est $D = 30$ cm. Calculer la déviation y de l'électron sur l'écran fluorescent.

3° Montrer que, pour un condensateur et un écran donnés, la déviation y ne dépend que de U_1 et de U_2 et qu'elle serait la même pour des particules négatives

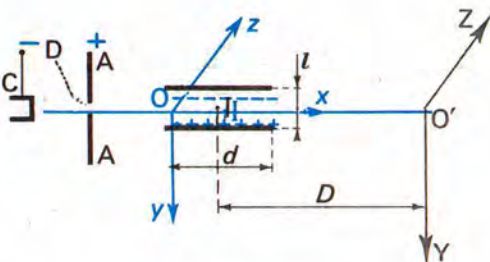


Fig. 18.

de charge et de masse différentes de celles de l'électron.

4° Les électrons sont alors soumis, sur la même distance d , à un champ magnétique d'induction B uniforme, parallèle à Oy et dirigé vers le haut (le champ électrique est alors sans action).

On admettra sans démonstration que la loi de Laplace concernant l'action d'un champ magnétique sur un courant peut s'appliquer à l'électron, à condition de remplacer dans son expression le produit $i \cdot dl$ (i intensité du courant, dl longueur de l'élément de courant) par le produit ev (e : charge de l'électron, v : vitesse de l'électron).

Montrer que le mouvement de l'électron est circulaire et uniforme dans le champ magnétique.

Calculer le rayon de l'arc de cercle décrit et la déviation Z de l'électron sur l'écran ; $B = 1,8 \cdot 10^{-3}$ tesla.

5° On fait agir simultanément le champ électrique et le champ magnétique. Soit M le point d'impact d'un électron sur l'écran. Déterminer le lieu de M dans le repère YO'Z dans le cas où le faisceau d'électrons n'est pas homocinéétique, c'est-à-dire où la vitesse v n'est pas la même pour tous les électrons. (Bacc.).

5. 1° Dans un tube électronique la vitesse, en fin de parcours, des électrons constituant le faisceau est égale à $40\,000$ km par seconde. Sachant que la charge d'un électron est $e \approx 1,6 \times 10^{-19}$ coulomb et que sa masse (supposée indépendante de la vitesse) est $m \approx 0,9 \times 10^{-30}$ kg, calculer la différence de potentiel entre l'anode et la cathode.

2° On concentre le faisceau d'électrons sur une plaque de platine d'épaisseur 1 mm et de surface 1 cm². En une minute la température du platine s'élève de 20°C à $1\,770^\circ\text{C}$ (température de fusion). Calculer le nombre n des électrons émis par seconde par la cathode et l'intensité du courant qui traverse le tube. On donne : chaleur massique du platine : $0,035$ cal/(g. $^\circ\text{C}$) densité du platine : $21,4$. On suppose que toute l'énergie transportée par le faisceau est convertie en chaleur.

3° Le faisceau horizontal passe entre les armatures AB, CD d'un condensateur plan, puis va frapper un écran fluorescent produisant ainsi une petite tache lumineuse. S'il n'existe aucune différence de potentiel entre les plateaux, la tache lumineuse est en O; lorsqu'on établit une différence de potentiel convenable, le faisceau est dévié et la tache vient en O'. Dans son parcours entre les plateaux AB, CD chaque électron est alors soumis à une force verticale égale à 18×10^{-15} newton;

$$AB = CD = 2 \text{ cm}$$

et l'extrémité BD du condensateur est à 24 cm de O.

a) Étudier la trajectoire des électrons entre les plateaux du condensateur.

b) En déduire la déviation OO'. On admettra qu'à l'entrée du condensateur la vitesse des électrons est égale à 40 000 km par seconde.

(Bacc.).

Rép. : 1° 4 500 V; 2° $n \approx 1,28 \times 10^{-11}$; $I \approx 2 \text{ mA}$; 3° $OO' \approx 6,25 \text{ cm}$.

LECTURE

Quelques applications des faisceaux d'électrons

a. — Le principe de la télévision.

Dans un type répandu de caméra, un objectif photographique forme l'image de la scène télévisée à l'intérieur d'un tube à vide, sur un écran spécial E (fig. 19) qui prend, en chacun de ses points, une charge électrique d'autant plus grande que ce point est plus éclairé. Un faisceau électronique vient explorer *successivement* ces points de telle sorte que la tension électrique u entre les bornes M et N varie comme la luminance du point de l'image sur lequel tombe le faisceau; il suffit alors d'utiliser cette tension u à la modulation de l'onde hertzienne qui assure la liaison entre l'émetteur de télévision et les postes récepteurs pour obtenir la transmission de l'image « électrique » de la scène télévisée.

Dans ce balayage électronique point par point, l'ordre de succession est, bien entendu, rigoureusement déterminé : les points de l'image sont explorés de ligne en ligne (l'image entière correspondant par exemple à

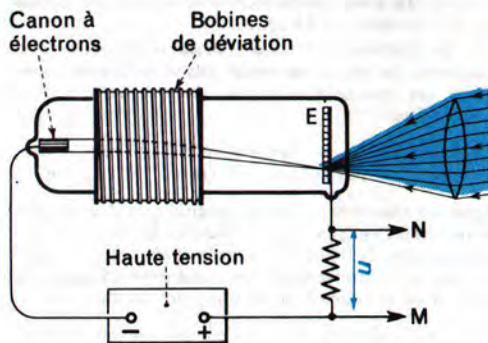


Fig. 19. — Le schéma d'une caméra de télévision du type « vidicon ».

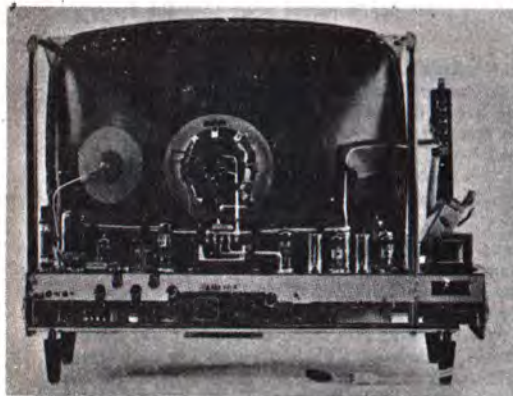
819 lignes régulièrement étagées) et l'exploration totale se répète identiquement tous les 1/25 de seconde.

En même temps que la traduction « électrique » de l'image, les ondes hertziennes transmettent des signaux spéciaux assurant le réglage rigoureux des organes de réception sur le dispositif d'exploration.

La partie « image » d'un poste récepteur de télévision est comparable à un oscilloscope électronique dont le canon à électrons est conçu de façon à imposer au faisceau électronique des variations d'intensité reproduisant fidèlement les variations de la tension de modulation u des ondes captées par l'antenne; il en résulte que la luminance du spot sur l'écran fluorescent varie comme celle des points de l'image qu'explore successivement le dispositif de balayage de la caméra de prise de vue.

Si le spot est animé, d'une part d'un mouvement de balayage horizontal de période $T' = \frac{1}{25} \times \frac{1}{819}$ seconde et, d'autre part, d'un mouvement de balayage vertical qui, chaque 1/25^e de seconde, le relève de bas en haut pendant qu'il parcourt l'écran 819 fois de gauche à droite, l'œil voit une image faite de spots plus ou moins clairs ou sombres selon que les points correspondants de la scène télévisée envoient plus ou moins de lumière sur la caméra, et cette image paraît animée parce qu'elle se renouvelle sur l'écran 25 fois par seconde.

▼ Vue arrière du châssis d'un récepteur de télévision (Document Ribet-Desjardins).



b. — Le radar.

Un radar ⁽¹⁾ permet de détecter et de localiser un obstacle (avion, bateau, iceberg, sol, etc.) par réflexion sur lui d'une onde hertzienne très courte.

Soit par exemple un poste de radar émettant tous les millièmes de seconde un « train » constitué par un millier de cycles d'une onde de fréquence $f = 10^9$ Hz ($\lambda \approx 10$ cm) : chaque émission ne dure qu'une microseconde et deux « trains » consécutifs sont séparés par un « silence » de 999 microsecondes.

Supposons qu'en explorant l'espace (par rotation de l'antenne « dirigée ») le faisceau hertzien rencontre un obstacle : une partie de l'énergie rayonnante sera renvoyée au radar, comme une partie de l'énergie sonore revient vers sa source dans le phénomène de l'écho.

Si l'obstacle est par exemple à 75 km dans l'air, l'onde ne met que $\frac{150}{300\,000} = 0,0005$ s (soit 500 microsecondes) pour effectuer l'aller et retour et l'écho d'un « train » parvient au poste avant le départ du « train » suivant.

Considérons maintenant un oscilloscope électronique dont la période T' de balayage vaudra ici 1/1 000 de seconde :

Si l'on s'arrange pour que l'émission de chaque « train » et l'arrivée de chaque écho provoquent une variation très brève de la tension U_{cd} de déviation verticale, toutes les émissions donneront sur l'écran lumineux la même crête E et tous les échos (correspondant au même obstacle) la même crête, plus faible, R, la distance de R à E étant proportionnelle à l'éloignement de l'obstacle ; il suffira alors de lire cet éloignement sur une échelle convenablement étalonnée placée sur l'écran (fig. 20).

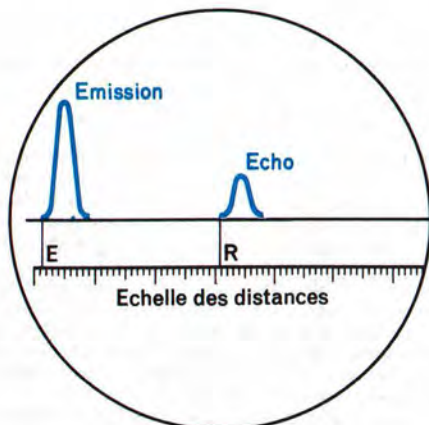
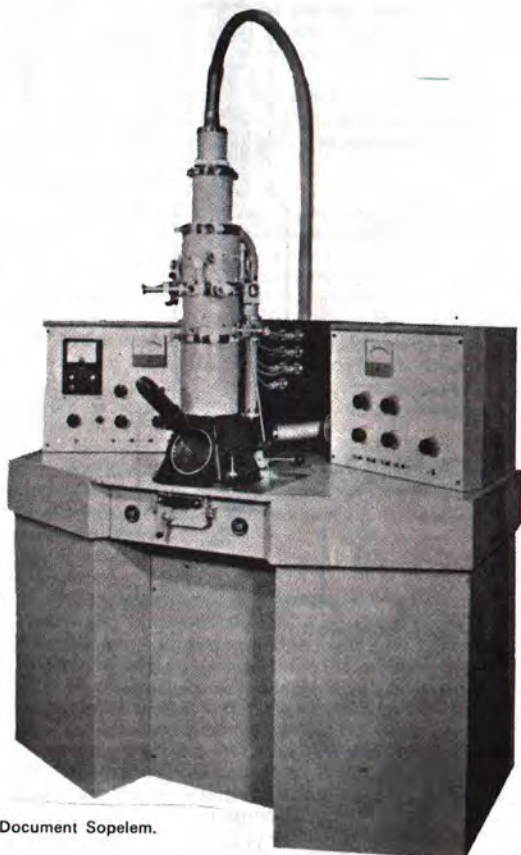


Fig. 20.

⁽¹⁾ Abréviation de Radio Detecting And Ranging.



Document Sopenem.

Microscope électronique

c. — Le microscope électronique.

Des dispositifs créateurs de champs électriques ou magnétiques spécialement calculés dévient les trajectoires d'électrons rapides comme une lentille optique dévie les rayons lumineux ; par suite, ils permettent de ramener en un point « image » les électrons d'un pinceau issu d'un point « objet ». Par analogie on donne à ces dispositifs le nom de « lentilles » électrostatiques ou de « lentilles » magnétiques et l'étude de leurs propriétés constitue l'Optique électronique.

L'une des applications les plus remarquables de cette nouvelle branche de la Physique est le microscope électronique, de plus en plus employé dans les labora-

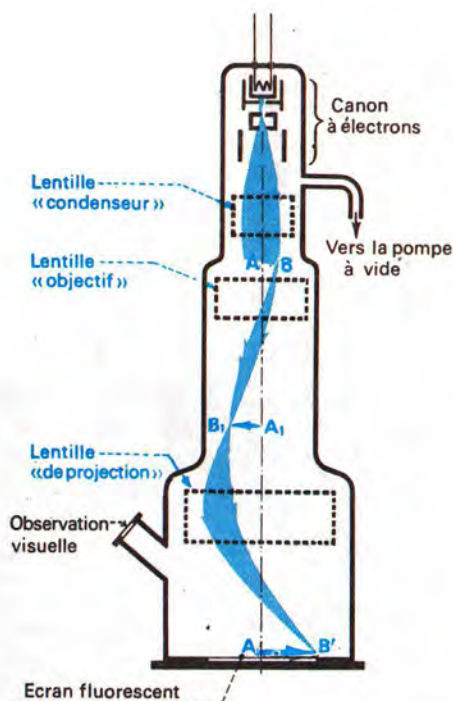


Fig. 21. — Le principe d'un microscope électronique à « lentilles » magnétiques.

Seul, a été figuré le pinceau électronique correspondant au point B de l'objet. Un vide suffisant est maintenu dans l'appareil grâce à un pompage continu.

toires de recherches physiques, chimiques et biologiques.

Un objet AB (fig. 21), qui est par exemple une pellicule extra-mince de collodion ou de carbone portant les particules à examiner (poudres métalliques, résidus d'évaporation de solutions ou de suspensions colloïdales, microbes, virus, etc...), est bombardé par un canon à électrons de très grande tension d'accélération (50 à 100 kilovolts).

A la traversée de cet objet, le faisceau électronique perd un plus ou moins grand nombre d'électrons suivant l'épaisseur de l'obstacle rencontré de sorte que de chaque point de l'objet part un pinceau d'électrons plus ou moins intense selon que ce point appartient au collodion seul ou à une particule.

L'intervention des deux « lentilles » électroniques fait correspondre à chacun de ces pinceaux un spot dont la brillance varie comme l'intensité du pinceau; aussi l'œil peut-il voir sur l'écran fluorescent une véritable « projection », très agrandie, de l'objet soumis à l'examen.

Le grandissement $\frac{A'B'}{AB}$ peut atteindre plusieurs dizaines de milliers, mais la supériorité du microscope électronique sur le microscope optique réside surtout dans son *pouvoir séparateur* : alors que la nature même de la lumière interdit au meilleur des microscopes optiques de distinguer deux points distants de moins de 0,2 micron, cette limite est abaissée au voisinage de 1 millimicron, d'où la possibilité d'examiner des objets une centaine de fois plus petits (¹).

d. — Le télescope électronique (ou convertisseur d'image).

Un objectif de lunette donne d'un objet AB, plus ou moins éloigné, une image A_1B_1 sur une cathode photo-émissive semi-transparente (fig. 22); de chaque point de celle-ci émane un pinceau d'électrons d'intensité d'autant plus grande qu'il correspond à un point plus éclairé de l'image.

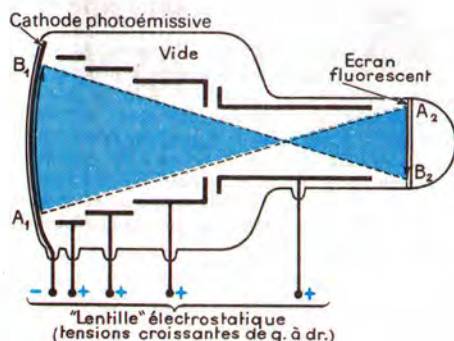


Fig. 22. — Le schéma d'un « télescope » électronique.

Une « lentille » électrostatique accélère et dévie ces pinceaux électroniques, faisant correspondre à chacun d'eux, sur l'écran fluorescent, un spot dont la brillance varie comme l'intensité du pinceau : il en résulte une image « électronique » A_2B_2 , reproduction de A_1B_1 , que l'on peut observer à l'œil nu ou aidé d'un oculaire.

Utilisés en lumière visible, certains de ces télescopes électroniques fournissent une image A_2B_2 de luminance très supérieure à celle de A_1B_1 ; ils fonctionnent, en quelque sorte, comme des amplificateurs de lumière qui peuvent être de précieux auxiliaires, par exemple dans certaines recherches astrophysiques.

Un autre intérêt de ces « convertisseurs d'images » est de rendre visible l'image d'un objet n'émettant que des radiations invisibles. Munis de cathodes photo-émissives sensibles à l'infrarouge, ils permettent par exemple d'observer certains objets la nuit ou à travers la brume.

(¹) 1 mμ = 10 Å; on ne peut donc pas voir encore les atomes (quelques Å) mais on voit déjà de grosses molécules.

contre, dès que U_G dépasse U_s , le champ antagoniste est suffisamment affaibli pour qu'un nombre croissant d'électrons parviennent à traverser la grille et à atteindre la plaque.

Remarquons que pour U_G positif, les deux champs sont de même sens : la grille joue alors le rôle d'une anode supplémentaire qui capte une fraction des électrons, d'où un *courant grille* (en FOGF), d'ailleurs généralement beaucoup plus faible que le courant plaque. Le plus souvent, la tension grille U_G est maintenue *néga-*
tive pour annuler ce courant du circuit grille.

L'intérêt de la triode vient surtout du fait que toute variation de la tension grille entraîne immédiatement une variation de même sens du courant plaque, ou même la suppression de ce courant si U_G devient inférieure à U_s .

Ainsi, *la tension grille commande le courant plaque et cette commande est instantanée, quelle que soit la rapidité des variations de la tension de grille.*

On exploite cette remarquable propriété des tubes thermo-électriques à trois électrodes dans l'*amplification* des courants variables, la *détection* des courants de haute fréquence et aussi leur *entretien*.

Des techniques très nombreuses (télécommunications et radiodiffusion, télévision, téléphone, radar, cinéma parlant, instruments de musique électroniques, lecteurs de disques phonographiques, etc...) ont beaucoup utilisé de tels tubes, dont l'industrie a construit des modèles variés et très perfectionnés; tous dérivent de la triode, mais dans nombre d'entre eux (tétrodes, pentodes,...), des électrodes supplémentaires en élargissent encore le très vaste domaine d'application.

Actuellement les *transistors*, fondés sur un tout autre principe que ces tubes thermoélectroniques à multiples électrodes, mais capables de jouer des rôles analogues, viennent de plus en plus les remplacer, surtout dans les dispositifs dont on veut réduire le plus possible les dimensions.

LES RAYONS X

Les rayons X furent découverts en 1895 par le physicien allemand *Röntgen*, au cours de recherches sur les phénomènes de luminescence provoqués par le fonctionnement d'un tube de Crookes :

Observant la luminescence du platinocyanure de baryum placé *hors* du tube et *derrière un écran de carton*, il dut admettre que le tube en fonctionnement émettait un rayonnement tout différent du rayonnement électronique, capable de traverser des corps opaques à tous les autres rayonnements connus.

Le nom de « rayons X », donné à ce nouveau rayonnement et qui lui est resté, vient de ce que sa nature demeura longtemps mystérieuse; ce n'est, en effet, que dix-sept ans plus tard qu'elle fut établie définitivement, grâce à des expériences qui prouvent de façon indiscutable que **les rayons X sont des ondes électromagnétiques de très courtes longueurs d'onde** ⁽¹⁾, généralement de l'ordre d'une fraction d'angström ($1 \text{ \AA} = 10^{-4} \mu$).

1. La production des rayons X.

Röntgen, le premier, montra que **l'on obtient des rayons X en bombardant une cible avec des électrons animés d'une très grande vitesse**.

a. — Pour les produire, on a d'abord utilisé un **tube de Crookes** (p. 272), dont l'anode, en métal peu fusible, joue le rôle de cible et est appelée, pour cette raison, l'*anticathode* (fig. 1).

(1) Voir la lecture, en fin de chapitre.

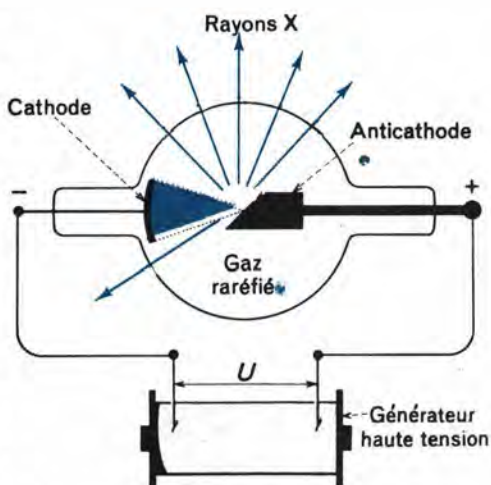


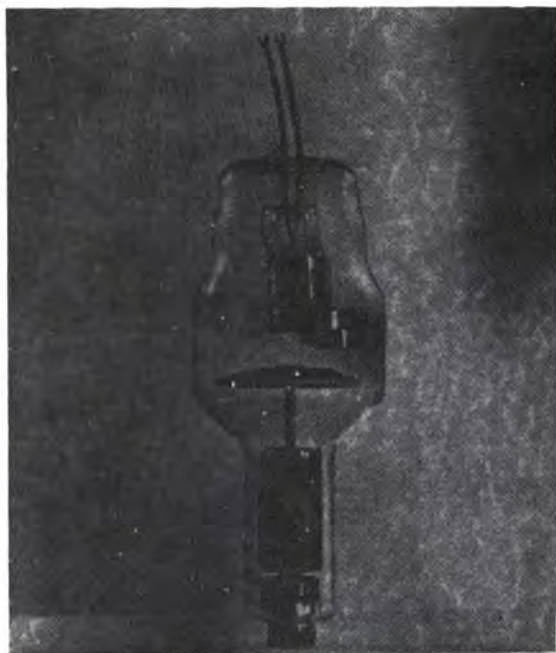
Fig. 1. — La production de rayons X dans un tube de Crookes.

La pression du gaz résiduel est de l'ordre de 1/100 de mm de mercure.

Une bobine d'induction produit une tension U de quelques kilovolts entre la cathode (—) et l'anticathode servant d'anode (+).

Ce tube, encore utilisé pour montrer les propriétés des rayons X, n'a plus guère qu'un intérêt pédagogique.

b. — Tous les appareils producteurs de rayons X que l'on construit actuellement, tant pour la recherche scientifique que pour les usages indus-



Tube producteur de rayons X utilisé pour les radiodiagnosics. Cliché Philips.

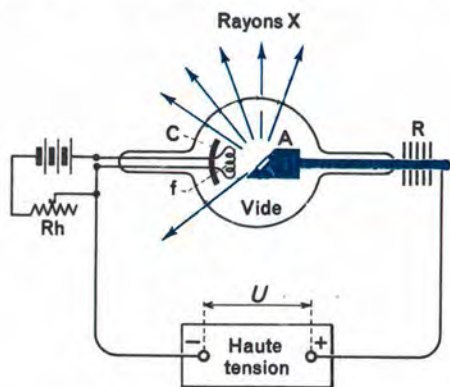


Fig. 2. — Le tube de Coolidge.

Il y règne un vide aussi parfait que possible. Les électrons sont émis par un filament de tungstène f porté à l'incandescence par effet Joule. L'anticathode A est généralement une pastille de tungstène encastrée dans un bloc de cuivre dont la partie extérieure R est munie d'ailettes de refroidissement. La cupule concave C , portée au même potentiel que le filament, fait converger les trajectoires des électrons au centre de l'anticathode.

On règle le nombre des électrons émis par unité de temps au moyen du rhéostat de chauffage Rh et leur vitesse en faisant varier la valeur de la haute tension.

triels et médicaux, sont du type **tube de Coolidge**.

Les électrons, produits par *effet thermoélectronique*, sont accélérés dans le vide par un champ électrique intense dû à l'application, entre l'anticathode A et la cathode C , d'une tension accélératrice de *plusieurs dizaines de kilovolts* (fig. 2).

2. Les propriétés des rayons X.

a. — Les rayons X excitent la luminescence de certains corps tels que le *platinocyanure de baryum*, le *tungstate de cadmium* et le *sulfure de zinc*. Par contre, ils ne provoquent pas la luminescence du verre.

Les rayons X impressionnent les émulsions photographiques.

Ces deux propriétés permettent de réaliser les récepteurs exigés par l'étude et l'utilisation des rayons X :

— **écrans luminescents** des appareils de **radioscopie**;

— **films photographiques**, fabriqués spécialement pour la **radiographie**; on abrège généralement le temps de pose en appliquant le film contre un écran luminescent.

b. — Les rayons X ionisent les gaz, ce qui explique qu'un électroscope électrisé se décharge très rapidement lorsqu'il est exposé au rayonnement X, quel que soit d'ailleurs le signe de sa charge (fig. 3).

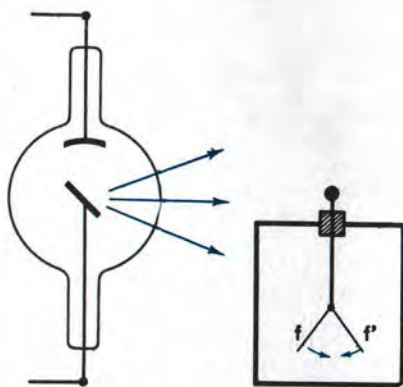


Fig. 3. — Les rayons X déchargent un électroscope. Irradiées par les rayons X, certaines molécules des gaz de l'air perdent des électrons et deviennent des *ions positifs*. Ces électrons sont captés par d'autres molécules qui deviennent des *ions négatifs*. Les ions de signe contraire à la charge de l'électroscope sont attirés par celui-ci et viennent le décharger, ce qui produit la retombée des feuilles f et f' .

L'action initiale des rayons X est d'extraire des électrons des atomes constituant certaines molécules du gaz irradié; ces électrons, expulsés avec une très grande vitesse, produisent ensuite une *ionisation par choc* de la masse gazeuse environnante.

c. — **Les rayons X se propagent en ligne droite à travers tous les corps**; ils ne sont pas *déviés* au passage d'un milieu dans un autre, mais ils sont plus ou moins *absorbés* par les substances qu'ils traversent. On le constate aisément en observant, sur un écran luminescent, les *ombres portées* fournies par divers objets placés entre l'écran et une source de rayons X de faible étendue (fig. 4).

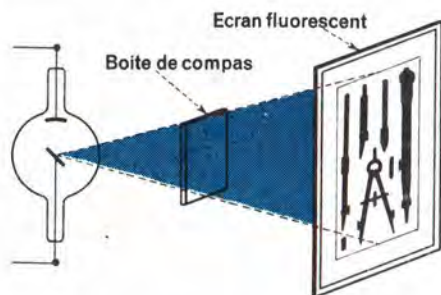


Fig. 4. — Ombres portées fournies par un faisceau de rayons X.

La forme et la grandeur des ombres sont celles que prévoit la propagation rectiligne des rayons X. Les contrastes sont d'autant meilleurs que l'intensité du faisceau X est plus grande et les ombres sont d'autant plus nettes que ce faisceau est mieux diaphragmé.

Les ombres les plus sombres correspondent aux corps qui absorbent le plus le rayonnement X : c'est ainsi que les objets métalliques donnent des ombres beaucoup plus accentuées que le bois, le carton ou les étoffes.

Si l'on interpose la main, les os, plus opaques, se distinguent de la chair, presque transparente.

L'absorption des rayons X par la matière a des caractères particuliers :

— Elle augmente très rapidement avec l'*épaisseur* de la substance traversée;

— Elle se présente comme une **propriété atomique**; que les atomes d'un élément chimique soient mélangés ou combinés à des atomes d'autres éléments, ils absorbent toujours les rayons X comme s'ils étaient *seuls*.

— L'absorption augmente très rapidement avec le **numéro atomique Z** de l'élément chimique considéré. C'est ainsi qu'en traversant des

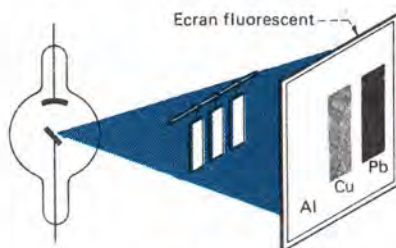


Fig. 5.

lames métalliques de même épaisseur (fig. 5), un faisceau de rayons X s'affaiblit beaucoup plus dans le *plomb* ($Z = 82$) que dans le *cuivre* ($Z = 29$) et dans le *cuivre* que dans l'*aluminium* ($Z = 13$).

— Enfin, **pour une substance et une épaisseur données, l'absorption augmente avec la longueur d'onde du faisceau X**.

Par exemple, alors que les rayons de longueur d'onde $\lambda \approx 0,02 \text{ \AA}$ peuvent traverser 10 cm de plomb, il suffit d'une épaisseur de plomb de quelques dixièmes de millimètres pour absorber complètement des rayons dont la longueur d'onde est de l'ordre de $1 \text{ \AA}$.

Les premiers, très pénétrants, sont appelés rayons « *durs* »; les seconds, facilement absorbés, sont des rayons « *mous* ».

3. Les principales applications des rayons X.

De ces propriétés de l'absorption des rayons X par la matière découlent d'importantes applications :

a. — L'exploration radioscopique ou radiographique du corps humain.

Elle utilise le fait que les différents tissus absorbent inégalement le rayonnement X. C'est

Radiographie d'une main.



ainsi que la peau, les muqueuses, les muscles, principalement constitués de *carbone* ($Z = 6$), d'*hydrogène* ($Z = 1$), d'*oxygène* ($Z = 8$) et d'*azote* ($Z = 7$) sont beaucoup moins absorbants que les os et les dents, qui contiennent du *phosphore* ($Z = 15$) et du *calcium* ($Z = 20$).

Les différences d'opacité que présentent les ombres des divers organes sur un écran radioscopique ou sur une radiographie permettent de déceler et de délimiter des lésions organiques, des altérations dentaires, des fractures osseuses, ou bien encore de localiser des corps étrangers.

L'ingestion d'un composé de *bismuth* ($Z = 83$) ou de *baryum* ($Z = 56$) rend possible l'examen du tube digestif; de même, l'absorption de composés du *brome* ($Z = 35$) ou de l'*iode* ($Z = 53$) facilite le diagnostic des maladies de l'appareil urinaire ou de la vésicule biliaire.

b. — La répression des fraudes.

On utilise les rayons X pour dépister des substances prohibées dans certains produits du commerce. De même, un simple examen radioscopique permet de distinguer le diamant (C) et les pierres précieuses (Al_2O_3) des imitations en verres au silicate de plomb.

c. — En métallurgie.

Les rayons X très durs sont devenus d'indispensables auxiliaires des métallurgistes : ils décèlent le moindre défaut d'homogénéité, la moindre « paille », la moindre « soufflure » dans les pièces métalliques et permettent en outre d'examiner la soudure de deux pièces l'une à l'autre. C'est par exemple de cette façon que l'on contrôle la soudure des tubes d'acier utilisés pour la construction des pipe-lines.

4. L'effet physiologique des rayons X ; la radiothérapie.

a. — A faible dose (¹), non répétée, les rayons X ne sont pas nocifs, mais leur action prolongée détruit des cellules. Ils provoquent à la fois une diminution dangereuse du nombre des globules rouges et de graves lésions, pouvant nécessiter des amputations et même entraîner la mort.

Il importe donc que les utilisateurs se protègent efficacement, à la fois contre les rayons X primaires provenant du tube producteur et contre les rayons X secondaires qu'émettent les corps soumis au rayonnement primaire.

Le tube producteur est généralement enfermé dans une enceinte garnie de plomb et munie

d'un jeu de diaphragmes permettant de délimiter étroitement le faisceau X utilisé; les parois des laboratoires de Radiothérapie sont souvent tapissées de matériaux opaques aux rayons X et vitrées de verre au silicate de plomb; les opérateurs portent des tabliers et des gants de caoutchouc chargé de plomb et des lunettes en verre contenant du silicate de plomb.

b. — La dose de rayons X qui détruit une cellule est d'autant moins forte que la cellule est moins différenciée : c'est dire que les cellules les plus sensibles sont les plus « jeunes », celles des tissus à prolifération rapide tels que les tissus embryonnaires et les tissus cancéreux.

Sur cette propriété est fondée une thérapeutique des tumeurs cancéreuses qui consiste à irradier une région bien délimitée avec des doses convenables de rayons *durs*, capables d'agir en profondeur; des filtres d'aluminium ou de cuivre débarrassent le rayonnement utile des rayons plus mous dont l'absorption par les tissus superficiels pourrait provoquer de douloureuses et graves radiodermes.

5. La diffraction des rayons X par un cristal.

Si l'on fait tomber un pinceau très délié de rayons X sur un cristal — par exemple un cristal de sulfate de cuivre ou de chlorure de sodium — la présence de taches régulièrement distribuées, sur la plaque photographique qui reçoit le pinceau émergent (fig. 6), montre que les rayons X subissent une *diffraction* à la traversée du cristal.

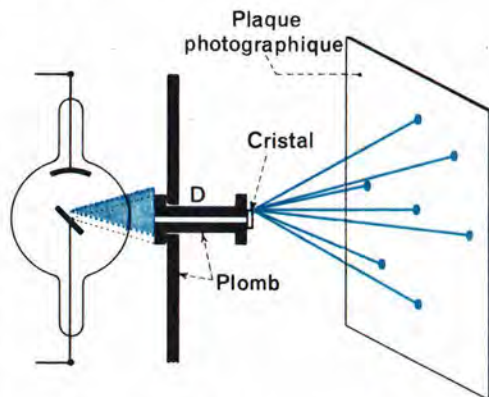


Fig. 6. — Le principe de la *diffraction* d'un pinceau de rayons X par un cristal. Le diaphragme D, en plomb, délimite un pinceau très délié.

(¹) Les « doses » de rayon X s'expriment en *röntgen*, qui correspond à un certain degré d'ionisation obtenu dans 1 cm³ d'air dans les conditions normales (la charge totale des ions des deux signes qui y apparaissent est $1/3 \times 10^{-9}$ coulomb).

L'interprétation de cette expérience est simple :

Un *cristal* est formé de particules — *atomes*, dans le cas du diamant ou du graphite; *ions*, dans le cas du chlorure de sodium et, plus généralement, des sels cristallisés; *molécules*, dans le cas de la glace, de l'iode... — régulièrement distribuées aux sommets d'un *réseau à trois dimensions*. Le réseau du chlorure de sodium, par exemple, est un réseau cubique simple (fig. 7).

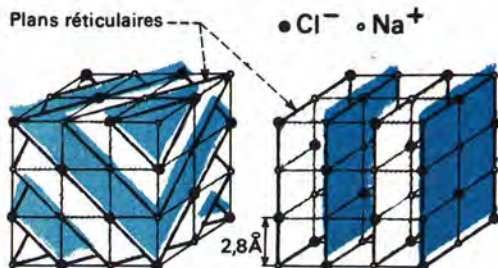


Fig. 7. — Le schéma de la structure d'un cristal de chlorure de sodium.

On peut grouper ces particules suivant des plans — dits **plans réticulaires** — dont les distances et les orientations relatives sont caractéristiques du corps cristallisé considéré.

Comme ces distances sont de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde des rayons X, un pinceau X qui pénètre dans un cristal subit une diffraction comparable à celle qu'un **réseau** de fentes équidistantes, très fines et rapprochées, inflige à un pinceau lumineux.

Les rayons sont diffractés dans certaines directions privilégiées dont l'inclinaison par rapport à la direction d'incidence est fonction à la fois de l'équidistance des plans réticulaires et de la longueur d'onde du pinceau X utilisé.

De la mesure des angles de diffraction on peut donc déduire, soit la longueur d'onde connaissant la structure du cristal, soit la structure du cristal connaissant la longueur d'onde.

Les diverses techniques de diffraction des rayons X par les cristaux ont ainsi permis :

— l'étude quantitative précise des **spectres de rayons X**;

— la détermination des **structures cristallines**.

Notons que tout échantillon de matière dont la structure présente une certaine *périodicité* a sur les rayons X une action analogue à celle des corps cristallisés. Aussi, l'emploi des rayons X

dans l'étude expérimentale des structures ne cesse-t-elle de gagner de nouveaux domaines chimiques; en particulier la chimie des *glucides*, des *corps gras*, des *fibres textiles*, des *élastomères* et des *matières plastiques* doit beaucoup à ce précieux moyen d'investigation.

6. Les photons X.

Comme pour la lumière (p. 279), les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement X ne peuvent s'interpréter correctement qu'en admettant que l'énergie transportée par un faisceau de rayon X est répartie en **photons**. L'énergie $h\nu$ d'un photon X est des milliers de fois plus grande que celle d'un photon lumineux puisque la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$ est des milliers de fois plus petite.

Cette hypothèse des photons X permet d'expliquer, en particulier, le *spectre continu* obtenu à l'émission et les phénomènes qui accompagnent l'absorption des rayons X par la matière.

a. — Le spectre continu.

Grâce au procédé de la diffraction par un cristal, on peut analyser un faisceau de rayons X et obtenir son **spectre** comme on obtient le spectre d'un faisceau lumineux en l'analysant au moyen d'un **réseau**. Le spectre X obtenu en analysant ainsi le faisceau de rayons X provenant d'un tube de Coolidge fait apparaître un fond continu — le *spectre continu* — auquel se superpose un spectre de raies dont les longueurs d'onde sont caractéristiques du métal de l'anticathode.

Le spectre continu présente, du côté des plus courtes longueurs d'onde, une limite très nette dont l'interprétation quantique est immédiate :

Considérons en effet une anticathode bombardée par des électrons lancés sous une tension U donnée, donc possédant une énergie cinétique bien déterminée :

$$W = eU \text{ (p. 271)}$$

Si, pour chacun des électrons « utiles », tout ou partie de W sert à l'émission d'un photon X, les photons les plus énergétiques auront l'énergie W , d'où l'explication d'une *limite inférieure de la longueur d'onde des rayons X émis*, satisfaisant à la relation, très bien vérifiée par l'expérience :

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} \leq W = eU$$

D'où l'on tire :

$$\lambda \geq \frac{hc}{eU}$$

On comprend ainsi que **les rayons X obtenus sont d'autant plus durs que la tension accélératrice U est plus élevée.**

Si l'on admet d'autre part que le pourcentage d'électrons « utiles » est en moyenne constant, on s'explique aussi que l'intensité du rayonnement X, proportionnelle au nombre de photons émis par seconde, varie comme l'intensité du flux d'électrons arrivant sur l'anticathode.

Quant à l'importante fraction de l'énergie des électrons incidents qui ne se retrouve pas dans les photons émis, *elle se transforme en chaleur*, d'où la nécessité de refroidir l'anticathode si le tube producteur fonctionne assez longtemps.

b. — Les phénomènes liés à l'absorption des rayons X : expulsion d'électrons et émission de rayons X secondaires.

L'étude expérimentale de l'absorption des rayons X par la matière a montré qu'elle s'accompagne généralement de la *production d'électrons* animés de grandes vitesses et de l'émission de *rayons X secondaires*, dont les longueurs d'onde sont caractéristiques des atomes contenus dans la matière irradiée.

Ces phénomènes s'interprètent aisément aussi dans la théorie des photons X :

Soit, dans un atome de la substance traversée par les rayons X, un électron dont l'extraction exige un certain travail W_0 , variable avec la nature de l'atome et la place qu'y occupe l'électron :

Si, parmi les photons X qui bombardent cet atome, il en arrive un dont le quantum $h\nu$ est supérieur à W_0 , son absorption pourra provoquer l'expulsion de l'électron avec une certaine énergie cinétique initiale, égale au maximum à celle que donne la *relation d'Einstein* de l'émission photoélectrique (p. 279) :

$$\frac{1}{2} m v^2 = h\nu - W_0$$

On admet en outre qu'après la perturbation profonde due à cette expulsion, l'atome reprend son état normal en émettant généralement plusieurs photons X, moins énergiques que le photon absorbé : c'est l'*explication de l'émission de rayons X secondaires*, signalée précédemment.

L'analyse spectrale des rayons secondaires émis par de nombreux éléments soumis au rayonnement X et la détermination des travaux d'extraction W_0 (par application de la relation d'Einstein) ont *efficacement contribué à préciser les idées actuelles sur la répartition des électrons à l'intérieur des atomes des divers éléments.*

EXERCICES

1. 1° Calculer la vitesse maximale des électrons qui bombardent l'anticathode d'un tube de Coolidge utilisé sous une tension accélératrice de 2 500 volts. 2° En déduire la limite inférieure de la longueur d'onde des rayons X fournis par ce tube.

Rép. : $v \approx 30\,000\text{ km/s}$; $\lambda \geq 5\text{ \AA}$.

2. Montrer que pour obtenir une radiation X dont la longueur d'onde est $0,01\text{ \AA}$ (radiation limite) il faut appliquer au tube de Coolidge une tension au moins égale à 1 200 kilovolts.

3. Calculer en électron-volt les énergies des photons X correspondant aux longueurs d'onde extrêmes :

$$\lambda = 200\text{ \AA} \quad \text{et} \quad \lambda = 0,01\text{ \AA}.$$

Rép. : 60 eV et $1,2 \times 10^5\text{ eV}$ (ou 1,2 MeV).

4. En Mécanique relativiste, où l'on tient compte de la variation de la masse en fonction de la vitesse, la relation $\frac{1}{2} m v^2 = eU$ (1) est remplacée par :

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) = eU$$

(où m_0 est la masse de l'électron au repos, c la célérité de la lumière dans le vide et β le rapport de la vitesse de l'électron à la constante c).

1° Montrer que cette relation équivaut pratiquement à la relation (1) tant que β est petit devant 1.

2° Calculer β dans le cas d'un électron lancé par une tension U de 1 200 kilovolts.

Rép. : $\beta \approx \frac{11}{12}$.

LECTURE

Les principaux faits expérimentaux qui ont permis d'établir la nature électromagnétique des rayons X.

Röntgen, le premier, établit que les rayons X ne sont pas formés de particules électrisées (électrons, protons, ions,...), puisque les champs électriques et magnétiques sont sans action sur eux. Très vite, il pensa qu'il s'agissait d'ondes analogues aux ondes lumineuses, mais toutes les tentatives qu'il fit pour reproduire avec les rayons X les expériences de réflexion, réfraction, interférences et diffraction auxquelles se prête la lumière (visible et invisible) échouèrent.

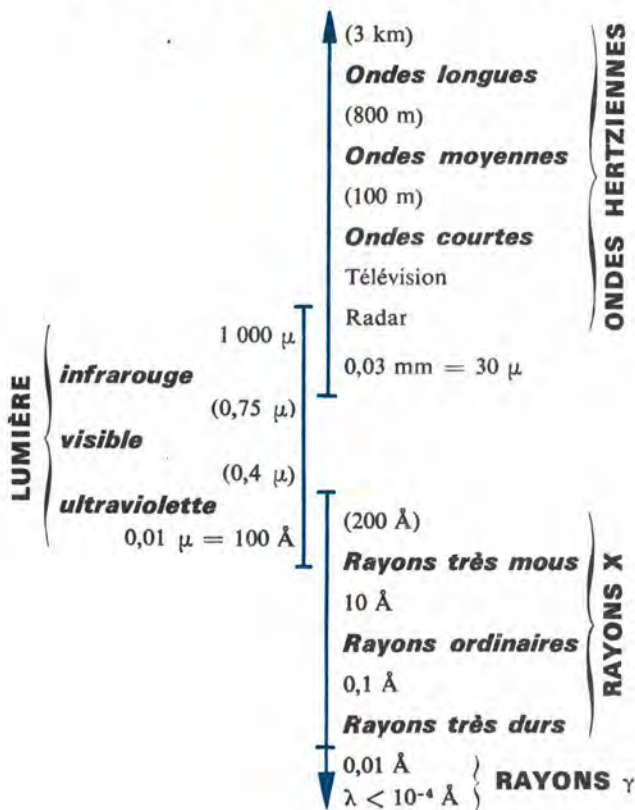
Ce n'est qu'en 1912 que deux Allemands, *Friedrich* et *Knipping* — à la demande de *von Laue*, un autre physicien allemand — réalisèrent avec succès la première expérience de *diffraction des rayons X* par un cristal de sulfate de cuivre, établissant ainsi, de façon indiscutable,

la *nature ondulatoire* de ce rayonnement et mettant en évidence la très faible valeur des longueurs d'onde X.

Plus récemment, on a pu répéter avec les rayons X des expériences d'Optique telles que la *réflexion totale* sur un dioptre air-verre (l'indice de l'air, pour les rayons X, est supérieur à celui du verre), la *déviati*on et la *dispersion* par un prisme en verre ou en métal, l'obtention de franges d'interférences, la diffraction par une fente, etc.

On a, d'autre part, mesuré leur vitesse de propagation et trouvé qu'elle était égale à celle de la lumière. Enfin, le Français *Fernand Holvek*, en montrant que des rayons X de grande longueur d'onde (de l'ordre de $100 \text{ \AA} = 0,01 \mu$) ont les mêmes propriétés que les radiations ultraviolettes les plus courtes, a prouvé qu'il n'y a pas de discontinuité entre la lumière et le rayonnement X et qu'il s'agit bien d'ondes ayant la même nature électromagnétique.

Le domaine des ondes électromagnétiques.



Le double aspect ondulatoire et corpusculaire du rayonnement électromagnétique.

L'étude des radiations conduit à les considérer successivement de deux points de vue très différents :

Pour expliquer les interférences lumineuses et la diffraction cristalline des rayons X, il faut admettre que ces radiations constituent des phénomènes vibratoires se propageant par ondes.

Mais l'interprétation de l'effet photoélectrique de la lumière et des rayons X, comme celle de l'émission de rayons X par bombardement électronique, ne sont possibles que si l'on admet que ces rayonnements sont formés de photons, corpuscules toujours animés de la vitesse limite c , célérité de la lumière, et transportant un quantum d'énergie $h\nu$.

Il est surprenant, a priori, que pour expliquer divers groupes de propriétés des mêmes radiations, on fasse appel tantôt à l'une, tantôt à l'autre des deux théories rivales, la théorie ondulatoire d'Huyghens-Fresnel et la théorie de l'émission corpusculaire de Newton, qui se sont si longtemps opposées. (Voir la lecture concernant la nature des vibrations lumineuses, p. 225.)

Pour les physiciens contemporains, cette opposition n'est pas fondée : l'aspect ondulatoire et l'aspect corpusculaire des radiations ne sont que deux représentations incomplètes et en quelque sorte complémentaires de la même réalité physique.

a. — L'un des aspects s'estompe quand l'autre s'accuse.

Quand on étudie la propagation des radiations et les phénomènes de réflexion, réfraction, diffraction... auxquels elle donne lieu, on n'envisage pas la transformation de l'énergie rayonnante mais seulement sa répartition globale en divers faisceaux; sa structure discontinue importe donc beaucoup moins que le caractère ondulatoire de sa propagation.

Au contraire, dans les échanges d'énergie entre atomes et rayonnement que constituent par exemple l'émission photoélectrique et la production des rayons X, on a affaire à une multitude de phénomènes individuels à l'échelle atomique, et la répartition de l'énergie rayonnante en photons devient le caractère essentiel des radiations.

b. — L'importance comparée des deux aspects varie avec la longueur d'onde.

1° L'aspect ondulatoire :

Revenons au phénomène de la diffraction; lorsque des radiations passent à travers des ouvertures dont les dimensions sont du même ordre de grandeur que les longueurs d'onde, le principe de la propagation rectiligne est infirmé : le rayonnement contourne les obstacles. Mais, tandis que ce phénomène est facilement observable avec les ondes hertziennes, la lumière et les rayons X « mous » et « moyens » (diffraction par les cristaux), on ne l'observe plus avec les rayons X durs, tant la longueur d'onde devient alors petite. On peut donc dire que le caractère ondulatoire du rayonnement se manifeste d'autant plus difficilement que la longueur d'onde est plus courte.

2° L'aspect quantique :

Si nous considérons d'autre part l'émission photoélectrique, l'expulsion de l'un des électrons d'un atome

exige l'absorption d'un quantum d'énergie $h\nu$ supérieur au travail d'extraction W_0 . Par suite, pour un atome donné, l'émission photoélectrique n'est possible que si la fréquence ν de la radiation électromagnétique

absorbée dépasse la valeur $\frac{W_0}{h}$, donc si la longueur

d'onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$ de cette radiation est inférieure $\frac{hc}{W_0}$: c'est

dire que l'émission photoélectrique ne s'observe qu'avec des radiations électromagnétiques de petites longueurs d'onde.

En définitive, l'aspect ondulatoire, seul intéressant dans le domaine des grandes longueurs d'onde, cède le pas à l'aspect quantique dans celui des longueurs d'onde les plus courtes.

La mécanique ondulatoire.

Cette théorie, due à M. Louis de Broglie, est venue à la fois préciser et généraliser le caractère complémentaire des deux aspects ondulatoire et quantique des radiations.

Dans cette théorie, de même qu'à toute onde lumineuse de fréquence ν doivent être associés des corpuscules (photons) de quantum $h\nu$, à tout corpuscule (électron, proton, ion,...) de masse m , animé d'une vitesse v , doit être associée une onde (1) de longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Les corpuscules, qu'il s'agisse de photons ou, par exemple, d'électrons, sont en quelque sorte guidés par une onde associée et les particularités de leurs mouvements se déduisent de l'application des lois de la Mécanique ondulatoire à la propagation de cette onde associée.

A notre échelle, tout corps mobile possède aussi une onde associée, mais le calcul montre qu'à cause de la grandeur de la masse, les lois de la Mécanique ondulatoire se ramènent à celles de la Mécanique classique. Il en va tout autrement à l'échelle atomique : seule, la Mécanique ondulatoire peut rendre compte des mouvements des électrons à l'intérieur des atomes.

D'autre part, appliquée à la propagation des flux de photons extrêmement nombreux que sont les faisceaux lumineux ordinaires, la Mécanique ondulatoire redonne les formules fondamentales de l'Optique physique, établies par Fresnel et conservées dans la théorie électromagnétique de Maxwell; c'est dire que cette théorie nouvelle, loin d'infirmer les théories anciennes, les englobe et les complète.

Sa justification réside dans le fait que les prévisions qu'on lui doit, par exemple en Physique atomique et en Optique électronique, sont bien vérifiées par l'expérience. En particulier, on utilise couramment aujourd'hui la diffraction d'un faisceau d'électrons par un cristal, phénomène comparable à la diffraction des rayons X par les cristaux et qui se calcule de la même manière à partir de l'onde associée aux électrons.

(1) Appelée onde de DE BROGLIE (ou onde « psi »); elle n'est pas de nature électromagnétique.

MASSE ET ÉNERGIE ; LA RELATION D'EINSTEIN LE DÉFAUT DE MASSE DES NOYAUX ATOMIQUES

A. NOTIONS DE MÉCANIQUE RELATIVISTE LA RELATION D'EINSTEIN

1. Les bases de la Mécanique classique (Newton).

a. — Toutes les lois de la Mécanique classique concernant les mouvements des systèmes matériels se déduisent de la relation fondamentale

$$\vec{F} = m\vec{\gamma},$$

qui traduit le principe fondamental de la Dynamique et définit la masse inerte m d'un point matériel comme une *constante* caractéristique de ce point matériel (chap. 4).

Grâce à ces lois, il est possible de prévoir par le calcul les mouvements de mobiles aussi divers que le sont une planète gravitant autour du Soleil, un projectile quelconque lancé dans le vide ou encore un électron soumis à un champ électrique accélérateur.

Nous avons déjà signalé que ces prévisions s'accordent parfaitement avec les observations et les résultats expérimentaux, au moins *tant que les vitesses des mobiles considérés restent très inférieures à la vitesse c de la lumière dans le vide* ($c \approx 3 \times 10^8$ m/s).

b. — Dans le cadre de la Mécanique classique, la *masse* et l'*énergie* apparaissent comme deux *grandeurs essentiellement distinctes* et toutes deux *conservatives*.

Par exemple, au cours d'une réaction chimique se produisant à l'intérieur d'une enceinte close, indéformable, opaque à tout rayonnement et imperméable à la chaleur,

— la masse totale des corps en présence

reste invariable, conformément à la *loi de Lavoisier*;

— l'énergie interne de l'ensemble ne change pas, conformément au *principe de la conservation de l'énergie*.

2. Idée de la Mécanique relativiste (Albert Einstein).

a. — La variation de la masse avec la vitesse.

Jusqu'au début du xx^e siècle, les vitesses des mobiles étudiés, tant en Mécanique terrestre qu'en Mécanique céleste, restaient faibles devant la vitesse c de la lumière dans le vide, de sorte que la Mécanique classique, dite newtonienne, demeurait pleinement satisfaisante. Cependant, le développement prodigieux de l'Électronique, puis les recherches de Physique nucléaire (qui comportent notamment le bombardement des atomes par des particules de plus en plus rapides) ont conduit les Physiciens à réaliser des accélérateurs de particules permettant d'imprimer à celles-ci des vitesses toujours plus considérables. Dans l'étude des mouvements de ces particules ultra-rapides, on a pu déterminer, d'une part la

force $\vec{F}$ s'exerçant sur une particule et, d'autre part, l'accélération $\vec{\gamma}$ que lui communique cette force; on a alors constaté, en faisant varier

l'intensité de la force, que le rapport $\frac{\vec{F}}{\vec{\gamma}}$ varie

avec la vitesse lorsque celle-ci prend des valeurs qui ne sont plus très petites devant la vitesse de lumière dans le vide.

Pour interpréter ce phénomène on a dû admettre, avec Einstein, que **la masse m d'une particule croît avec sa vitesse v** , conformément à la relation :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

m_0 étant la masse de la particule au repos et c la célérité de la lumière dans le vide.

b. — La relation fondamentale de la Dynamique relativiste.

Dans le calcul du mouvement d'une particule très rapide, on tient compte du fait que la masse ne peut plus être considérée comme une constante en écrivant la relation fondamentale de la Dynamique :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ avec } \vec{p} = m\vec{v} \quad (2)$$

Sous cette forme, elle exprime qu'à chaque instant la résultante $\vec{F}$ des forces qui s'exercent sur la particule est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement de la particule. Remarquons que les deux facteurs m et v de la quantité de mouvement sont ici des fonctions du temps puisque la masse est fonction de la vitesse, qui est elle-même fonction du temps.

D'après la relation (1), lorsque le module v de la vitesse tend vers c , la masse de la particule augmente indéfiniment. Considérons une particule de vitesse v voisine de c ; une variation finie de la vitesse qui la ferait passer de la valeur v à la valeur c entraînerait une variation infinie de la quantité de mouvement et, par suite, exigerait la mise en œuvre d'une force $\vec{F}$ infiniment grande.

Ceci montre que la vitesse c de la lumière dans le vide est une limite que nulle particule matérielle ne peut atteindre.

c. — L'expression relativiste de la variation de l'énergie cinétique d'une particule.

Lorsque la vitesse d'une particule passe de zéro à v , la résultante des forces qui s'exercent sur la particule effectue un travail W qui se transforme en énergie cinétique E_c ; le calcul de

ce travail, à partir des formules relativistes (1) et (2), conduit à l'expression :

$$W = E_c - 0 = (m - m_0) c^2 \quad (3)$$

Ainsi, en Mécanique relativiste, la variation de l'énergie cinétique est égale au produit de la variation de la masse par le carré de la vitesse de la lumière dans le vide.

Remarque.

— Si le module v de la vitesse d'un mobile est très petit devant c , le terme $\frac{v^2}{c^2}$ est négligeable devant 1 et l'on a :

1° Dans la relation (1) : $m \approx m_0$; on retrouve la constance de la masse.

2° Par suite, dans les relations (2) :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \vec{\gamma} ;$$

On retrouve la formule fondamentale de la Dynamique classique.

D'autre part, si v est assez faible devant c pour que le terme $\frac{v^2}{c^2}$ soit petit devant 1, la relation (1) donne :

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}\right)$$

D'où l'on tire :

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{c^2} ; \quad m - m_0 \approx \frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{c^2}$$

et, en portant dans (3) :

$$W = (m - m_0) c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

On retrouve l'expression classique du théorème de l'énergie cinétique appliqué à une particule de masse m_0 dont la vitesse croît de 0 à v .

La Mécanique relativiste apparaît donc comme une théorie plus générale que la Mécanique classique, mais qui se confond avec la Mécanique classique dans le cas des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière.

3. La relation d'Einstein. Le concept masse-énergie.

Nous venons de voir que si la vitesse d'une particule croît de zéro à v , sa masse augmente de $m - m_0 = \Delta m$ et, corrélativement, son énergie cinétique augmente de $\Delta m \cdot c^2$.

Einstein a généralisé ce résultat en admettant que :

1° Toute variation ΔU de l'énergie d'un système matériel — qu'elle soit due, comme ci-dessus, à une variation de vitesse ou à toute autre cause — est liée à une variation Δm de la masse de ce système ;

2° La variation de l'énergie d'un système

est égale au produit de la variation corrélative de sa masse par le carré de la célérité de la lumière dans le vide :

$$\Delta U = \Delta m \cdot c^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U \text{ en J;} \\ \Delta m \text{ en kg;} \\ c \text{ en m/s.} \end{array} \right.$$

Notons que cette relation est algébrique : les variations corrélatives de masse et d'énergie ont toujours le même signe. Si un système gagne de l'énergie, sa masse augmente; elle diminue au contraire si le système perd de l'énergie.

Ainsi, dans la théorie de la Relativité, la masse et l'énergie ne sont plus considérées comme deux grandeurs distinctes; elles apparaissent comme deux formes de la même grandeur. A toute masse m est liée une énergie $U = mc^2$; à toute énergie U est liée une masse (donc une *inertie*) $m = \frac{U}{c^2}$.

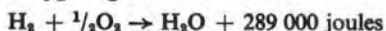
Du fait de la très grande valeur numérique du facteur c^2 ($= 9 \times 10^{16}$, en unités SI), à une masse relativement faible, égale à 1 g par exemple, correspond une très forte quantité d'énergie :

$$U = mc^2 = 10^{-3} \times 9 \times 10^{16} = 9 \times 10^{13} \text{ joules.}$$

C'est à peu près l'énergie que fournit la combustion de 3 000 tonnes de charbon!

4. L'application aux réactions chimiques.

Appliquons la relation d'Einstein à la synthèse d'une mole d'eau à partir de l'hydrogène et de l'oxygène gazeux :



Le système $\text{H}_2 + \frac{1}{2}\text{O}_2$, dont la masse est voisine de $2 + 16 = 18$ g, cède au milieu extérieur une énergie de 289 000 joules en se transformant en eau.

D'après la relation d'Einstein, la masse de l'eau obtenue est inférieure à celle du système $\text{H}_2 + \frac{1}{2}\text{O}_2$ de :

$$|\Delta m| = \frac{289\,000}{(3 \times 10^8)^2} \approx 32 \times 10^{-13} \text{ kg}$$

La variation relative de masse a donc pour valeur :

$$\frac{|\Delta m|}{m} = \frac{32 \times 10^{-13}}{18 \times 10^{-3}} = 1,8 \times 10^{-10}$$

Comme la précision des meilleures mesures de masse est de l'ordre de 10^{-7} , il n'est pas possible de déceler expérimentalement d'aussi faibles variations de masse.

Il est donc tout à fait légitime d'admettre, conformément à la loi de Lavoisier, que dans toute réaction chimique la masse totale se conserve.

5. L'application aux réactions nucléaires.

Il n'en est plus de même pour les transmutations spontanées des éléments radioactifs ou les transmutations artificielles au cours desquelles des noyaux d'atomes se transforment et donnent naissance à d'autres noyaux appartenant à des éléments chimiques différents (chap. suivant).

L'énergie libérée par ces réactions nucléaires, est, à égalité de masse mise en jeu, des millions de fois plus grande que l'énergie libérée par les réactions chimiques les plus exothermiques; il en résulte que la perte de masse accompagnant une réaction nucléaire peut dépasser le millième de la masse initiale.

Notons que cette variation Δm de la masse est accessible à l'expérience; en effet, on peut déterminer la masse des noyaux avant et après la transmutation avec une précision supérieure au dix-millième (¹).

En mesurant d'autre part l'énergie libérée au cours de la réaction nucléaire, on constate qu'elle est bien égale à $\Delta m \cdot c^2$, ce qui constitue une vérification expérimentale de la relation d'Einstein.

Dans ce domaine des transformations nucléaires, il n'est donc plus possible d'appliquer séparément le principe de la conservation de la masse et le principe de la conservation de l'énergie — comme on continue de le faire, très légitimement, dans l'étude des autres phénomènes physiques et chimiques —; on applique le **principe de conservation de la grandeur masse-énergie** :

Dans un système isolé, l'apparition d'une énergie ΔU s'accompagne nécessairement de la disparition d'une masse $\Delta m = \frac{\Delta U}{c^2}$.

(¹) Se reporter au premier chapitre du cours de Chimie.

B. LA STABILITÉ DES NOYAUX ATOMIQUES ET L'ÉNERGIE NUCLÉAIRE

6. Le rappel de la constitution des noyaux atomiques.

Une réaction chimique, quelle que soit la valeur de l'énergie qu'elle libère ou absorbe, modifie la couche électronique externe des atomes mis en jeu mais laisse leurs noyaux inchangés.

Par contre, les transformations radioactives et les transmutations provoquées intéressent essentiellement les noyaux : ce sont des **réactions nucléaires**. Il est possible d'interpréter simplement les faits fondamentaux de la Chimie nucléaire en admettant que les noyaux de tous les atomes sont des assemblages de particules — les **nucléons** — de deux sortes : les protons et les neutrons.

a. — Le proton et le neutron.

— Un **proton** est, à lui seul, le noyau d'un atome d'hydrogène : il s'identifie donc à l'ion H^+ , formé par un atome d'hydrogène ayant perdu son unique électron planétaire. Par suite, il porte une charge positive $+e$ et sa masse est pratiquement égale à celle de l'atome d'hydrogène.

En Chimie nucléaire, il est commode de choisir une unité de masse à l'échelle atomique; on utilise l'**unité de masse atomique** (u. m. a.), de valeur :

$$\frac{1 \text{ gramme}}{\text{Nombre d'Avogadro}} \approx \frac{1}{6,023 \times 10^{23}} \text{ g} \approx 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Avec cette unité, la masse du proton s'exprime par un nombre très voisin de 1 :

$$m \approx 1,00728 \text{ u. m. a.}$$

— Un **neutron** est une particule électriquement neutre, ayant une masse très légèrement supérieure à celle du proton :

$$m \approx 1,00867 \text{ u. m. a.}$$

Les neutrons n'existent que tout à fait exceptionnellement à l'état libre, dans une « pile » ou une bombe « atomique » par exemple; normalement, ils sont associés à des protons dans les noyaux atomiques.

b. — Le nombre de masse et le nombre de charge.

— Le **nombre de masse A** d'un noyau atomique est le nombre de ses nucléons, c'est-à-dire la somme des nombres de protons et de neutrons qu'il contient.

— Le **nombre des protons est égal au nu-**

méro atomique Z : nous avons vu en effet que, si l'atome possède Z électrons planétaires, la charge du noyau est nécessairement $+Ze$; comme les protons sont les seuls nucléons électrisés et que leur charge est $+e$, le noyau contient Z protons. Pour cette raison, le nombre Z est aussi appelé le **nombre de charge** du noyau.

Quant au **nombre des neutrons**, il est évidemment égal à $A - Z$. Dans l'écriture des équations de Chimie nucléaire, les deux nombres A et Z qui caractérisent un noyau atomique sont imprimés à gauche du symbole de l'élément chimique considéré, A étant placé en haut et Z en bas. Par exemple, le symbole



représente un noyau d'atome d'oxygène dont le nombre de masse est $A = 16$ le nombre de charge est $Z = 8$

Il possède donc $A = 16$ nucléons, répartis en $Z = 8$ protons et $A - Z = 16 - 8 = 8$ neutrons.

7. Le rappel de la définition des isotopes.

On appelle **isotopes**, des atomes dont les noyaux ont le même nombre de charge Z mais des nombres de masse A différents.

Comme ils ont aussi le même nombre Z d'électrons planétaires,

— ces atomes figurent dans la **même case du tableau périodique** (ce qui justifie leur nom d'**isotopes**); ils appartiennent au **même élément chimique**;

— **leurs propriétés chimiques sont les mêmes.**

Les noyaux des isotopes ont le même nombre Z de protons; **ils ne diffèrent donc que par le nombre de leurs neutrons et, par suite, les valeurs de leurs masses.**

La plupart des éléments chimiques trouvés dans la nature ou préparés par les méthodes habituelles de la Chimie sont des mélanges d'isotopes. Par exemple, le **chlore** préparé à partir des chlorures naturels est un mélange en proportions pratiquement constantes d'atomes dont les noyaux ont pour symboles $^{35}_{17}Cl$ et $^{37}_{17}Cl$.

Le cas particulier de l'**hydrogène** mérite d'être signalé; le gaz hydrogène tel qu'on le prépare au laboratoire ou dans l'industrie contient, à côté de l'hydrogène ordinaire, une faible propor-

tion (0,02 %) de deutérium D dont le noyau, de symbole ${}^2_1\text{H}$, contient un proton et un neutron et a, par suite, une masse environ deux fois plus forte que celle du noyau ordinaire ${}^1_1\text{H}$. La combinaison du deutérium avec l'oxygène donne de l'eau lourde, D_2O , utilisée dans certains réacteurs nucléaires.

La séparation des isotopes d'un même élément chimique soulève en général de grosses difficultés du fait que l'identité de leurs propriétés chimiques exclut l'emploi des procédés ordinaires de l'analyse chimique; il faut mettre en œuvre des méthodes fondées sur de petites différences de propriétés physiques liées à la différence des masses des atomes.

8. Le défaut de masse et la stabilité du noyau.

a. — Si, pour un atome quelconque, on compare la masse de son noyau avec la somme des masses des protons et des neutrons qu'il contient, on trouve que **la masse du noyau est toujours inférieure à la somme des masses de ses nucléons.**

Ainsi, le noyau de l'atome d'hélium ${}^4_2\text{He}$ a une masse de 4,0026 u.m.a., alors que la somme des masses de ses nucléons (2 protons et 2 neutrons) vaut :

$$1,00728 \times 2 + 1,00867 \times 2 = 4,0319 \text{ u.m.a.}$$

La différence, que l'on appelle le **défaut de masse** du noyau, a pour valeur :

$$4,0319 - 4,0026 = 0,0293 \text{ u.m.a.}$$

Ce qui représente environ 0,7 % en valeur relative.

b. — La relation d'Einstein, d'après laquelle une perte de masse Δm correspond à la libération d'une énergie :

$$W = \Delta m \cdot c^2,$$

fournit une interprétation immédiate du **défaut de masse** : il représente l'énergie qui serait *cédée* au milieu extérieur si l'on pouvait réaliser la synthèse du noyau à partir de ses nucléons, c'est-à-dire en assemblant Z protons et $A - Z$ neutrons initialement libres.

Une quantité équivalente d'énergie devrait être *fournie* au noyau pour *rompre la cohésion* de ses nucléons et parvenir à les séparer.

Remarquons que cette énergie, dite **énergie de cohésion**, est énorme. Par exemple, la masse totale des nucléons contenus dans les noyaux d'une mole d'hélium ($\text{He} \approx 4$) étant voisine de 4 grammes, la perte de masse qui accompagnerait la synthèse de tous ces noyaux à partir de leurs nucléons vaudrait :

$$\Delta m \approx 4 \times 0,7/100 = 0,028 \text{ g} = 28 \times 10^{-6} \text{ kg}$$

ce qui correspond à une **énergie de cohésion globale** :

$$W = \Delta m \cdot c^2 \approx 28 \times 10^{-6} \times 9 \times 10^{16} \approx 25 \times 10^{11} \text{ joules}$$

soit environ 2 500 milliards de joules!

c. — L'énergie de cohésion w qui correspond à un noyau atomique donné dépend du nombre A des nucléons contenus dans ce noyau

Le noyau est d'autant plus **stable** que l'**énergie de cohésion par nucléon**, $\frac{w}{A}$, est plus grande.

La plupart des atomes des éléments naturels ont des noyaux *stables*. Pour ces noyaux l'énergie de cohésion par nucléon est voisine de 8 MeV (¹).

Par contre, pour les noyaux instables des atomes *radioactifs*, w/A est inférieure à cette valeur. Deux cas particulièrement importants doivent être signalés :

— L'énergie de cohésion par nucléon des noyaux radioactifs très *lourds* de l'isotope ${}^{235}_{92}\text{U}$ de l'uranium et du plutonium ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ est inférieure à 7,5 MeV;

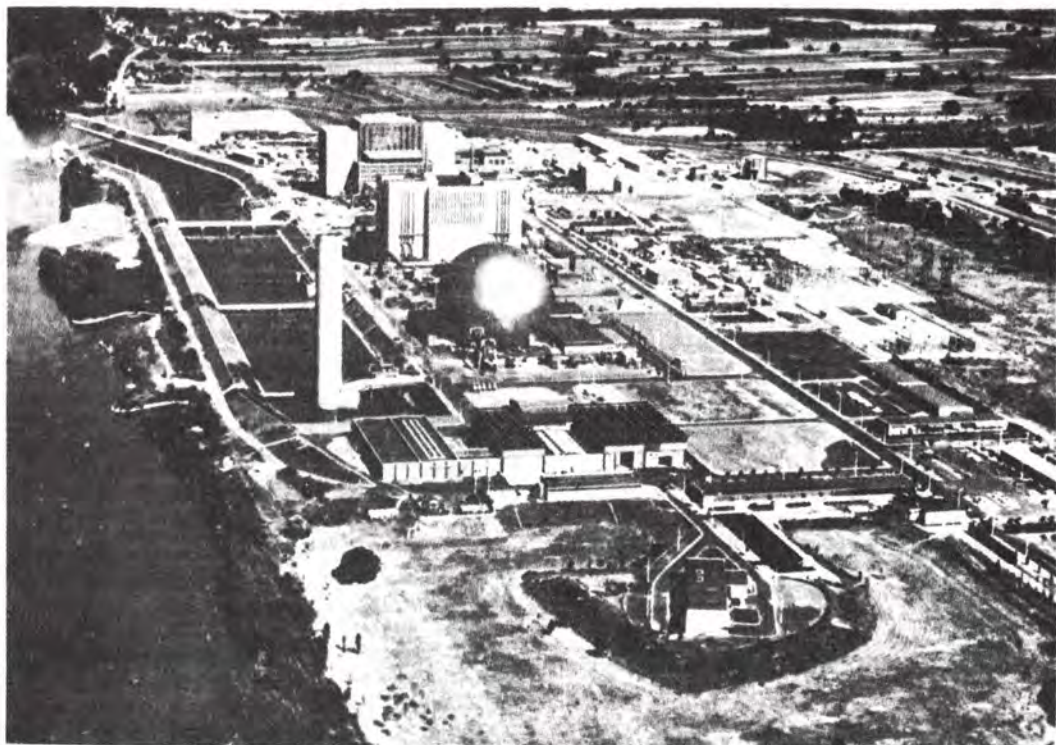
— Celle des noyaux très *légers* et instables des isotopes ${}^3_1\text{H}$ et ${}^2_1\text{H}$ de l'hydrogène est encore nettement plus faible.

Il en résulte que la **fission** des noyaux d'uranium 235 et de plutonium en deux noyaux de masses moyennes ou la **fusion** de noyaux d'isotopes de l'hydrogène en noyaux d'hélium s'accompagnent d'une **libération d'énergie nucléaire**.

Ces deux phénomènes sont utilisés, l'un dans la bombe « A » et les réacteurs nucléaires, l'autre dans la bombe « H ».

Signalons aussi que l'origine des quantités énormes d'énergie rayonnées par le Soleil et les étoiles est attribuée à la formation d'hélium à partir d'hydrogène.

(¹) 1 MeV $\approx 1,6 \times 10^{-13}$ joule (voir p. 271).



Les centrales nucléaires EDF₁, EDF₂, EDF₃ de Chinon. Photo Bernard Beaujard.

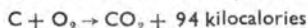
EXERCICES

1. Calculer la variation relative de masse d'une particule quand sa vitesse passe de zéro à 30 000 km/s.

Rép. : 5×10^{-3} .

2. Calculer l'énergie de cohésion par nucléon (en MeV) du noyau de l'atome d'hélium en utilisant les données du § 8.

3. Calculer la variation relative de masse accompagnant la synthèse d'une mole de dioxyde de carbone :



Rép. : $\frac{\Delta m}{m} \approx -10^{-10}$ (1 dix-milliardième).

4. En admettant que dans une bombe atomique les fissions des noyaux $^{235}_{92}\text{U}$ ou $^{239}_{94}\text{Pu}$ n'intéressent que 1/20 de la masse du « combustible » nucléaire, estimée à 10 kg, et que la perte relative de masse

($\Delta m/m$) accompagnant ces fissions soit 1/1000, calculer l'énergie nucléaire libérée et la masse d'explosif nitré qui pourrait fournir la même quantité d'énergie (à raison de 9 000 kilojoules par kilogramme).

5. En supposant que l'énergie rayonnée par le Soleil (évaluée à $12,5 \times 10^{30}$ kilojoules par an) a son origine dans des réactions nucléaires dont le bilan est une transformation d'hydrogène en hélium avec perte relative de masse d'environ 8/1000, calculer la masse d'hydrogène que perd le Soleil en 1 an. La masse du Soleil étant évaluée à 2×10^{27} t et comprenant 45% d'hydrogène, pendant combien de temps pourrait-il rayonner si l'on admet que les réactions nucléaires se poursuivent en libérant toujours la même puissance ?

Rép. : $1,75 \times 10^{16}$ tonnes ; 50 milliards d'années environ.

LA RADIOACTIVITÉ

En 1896, *Henri Becquerel* découvrit fortuitement la **radioactivité naturelle** en constatant qu'un sel d'uranium, posé sur une boîte de plaques photographiques, provoquait le « voilage » de ces plaques bien qu'elles fussent protégées par un emballage de papier noir. Il attribua cette propriété surprenante à l'émission, par les sels d'uranium, d'un **rayonnement** capable de traverser l'emballage et d'impressionner l'émulsion photographique.

Cette découverte ouvrit la voie à de très nombreuses recherches, dont les étapes les plus importantes furent :

— L'isolement, par *Pierre et Marie Curie*, en 1898 et 1899, de deux éléments beaucoup plus radioactifs que l'uranium : le **polonium** et le **radium** ;

— La réalisation par *Rutherford*, en 1919, de la **première transmutation artificielle**, lorsqu'il obtint des noyaux d'oxygène et d'hydrogène à partir de noyaux d'azote ;

— La découverte de la **radioactivité artificielle** par *Irène et Frédéric Joliot-Curie* en 1934, quand ils transformèrent des atomes d'aluminium en atomes d'un isotope radioactif du phosphore.

A. LES RAYONNEMENTS ÉMIS PAR LES CORPS RADIOACTIFS

1. La mise en évidence expérimentale.

Pour mettre en évidence le fait qu'un corps est **radioactif**, c'est-à-dire émet un rayonnement, on peut utiliser :

— L'impression d'une **émulsion photographique** ;

— L'excitation de la **luminescence** de certains corps : c'est ainsi qu'un écran au **sulfure de zinc**, placé à faible distance d'une quantité infime d'un corps radioactif tel qu'un composé du radium et observé à la loupe, prend un aspect **scintillant** du fait de l'apparition de points lumineux éphémères se succédant plus ou moins rapidement ;

— L'**ionisation des gaz**, qui explique l'expérience représentée par la figure 1, sur laquelle est fondé le principe des appareils couramment utilisés pour *déceler* la présence de corps radio-

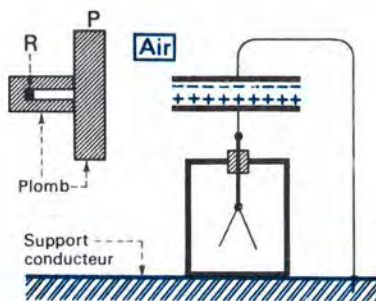


Fig. 1. — La décharge d'un condensateur par le rayonnement d'une substance radioactive. Dès que l'écran de plomb P est enlevé, on voit les feuilles de l'électroscope retomber, preuve que celui-ci se décharge par suite de l'ionisation de l'air due au rayonnement de la préparation radioactive R.



Un « compteur » de rayonnement.

La détection de la radioactivité. Photo C.E.A

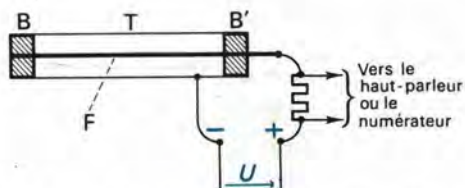


Fig. 2. — Le principe d'un « compteur » de rayonnement.

Un tube T à paroi métallique très mince, fermé aux extrémités par deux bouchons isolants B et B', contient un gaz raréfié mélangé à des traces de vapeur organique. Un fil métallique F le traverse de part en part ; on applique entre ce fil et la paroi une différence de potentiel U de l'ordre du kilovolt. Lorsqu'une particule ionisante pénètre à l'intérieur, il se produit une ionisation par choc dont l'effet est une « avalanche » d'électrons sur l'anode F ; la vapeur organique intervient pour étouffer cette multiplication des électrons et en limiter la durée à environ 1 microseconde.

Le courant très bref dû à chaque avalanche donne un « top » dans un haut-parleur, ou bien actionne un numérateur qui arrive à compter jusqu'à 100 avalanches par seconde.

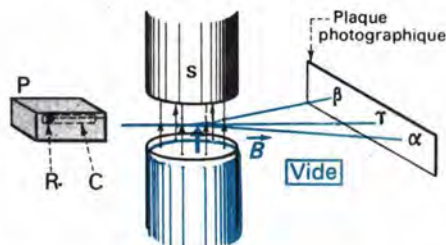
actifs et mesurer l'intensité des rayonnements émis (fig. 2).

2. L'analyse du rayonnement radioactif par déviations magnétique et électrique.

a. — La séparation des rayonnements émis par une substance radioactive naturelle.

Une préparation R contenant la substance radioactive est mise au fond d'un canal C, rectiligne et étroit, percé dans un bloc de plomb P. Celui-ci est placé dans une enceinte où l'on a fait le **vide**, avec une plaque photographique disposée perpendiculairement à l'axe du canal. Le pinceau de rayons émis par la préparation peut être soumis à l'action d'une **induction magnétique** $\vec{B}$, normale à sa direction initiale (fig. 3).

Fig. 3. — L'action d'un champ magnétique sur le rayonnement d'une substance radioactive.



En l'absence de champ magnétique, la plaque n'est impressionnée qu'en γ , dans l'axe du canal C. Lorsque le champ magnétique existe, l'impact du rayonnement sur la plaque photographique conduit généralement à la formation de *trois taches*, l'une encore en γ , une autre en α et la troisième en β .

Si l'on remplace le champ magnétique par un **champ électrique** $\vec{E}$ (fig. 4), on observe également trois taches sur la plaque photographique.

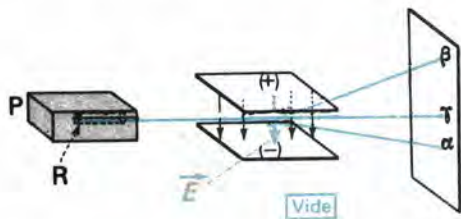


Fig. 4. — L'action d'un **champ électrique** sur le rayonnement d'une substance radioactive.

L'existence des taches α et β prouve que le rayonnement complexe émis par le corps radioactif comprend des *particules électrisées en mouvement*; le sens des déviations infligées à ces particules par l'induction $\vec{B}$ ou le champ $\vec{E}$ montre que la tache α est produite par des particules chargées *positivement* alors que la tache β est au contraire l'impact de particules chargées *négativement*.

En combinant les deux déviations électrique et magnétique, on peut mesurer la *charge massique* $\frac{Q}{m}$ de ces particules et, par suite, les identifier.

b. — La nature et les propriétés des rayons α , β et γ .

— Les **rayons α** sont des noyaux d'hélium (${}^4_2\text{He}$) en mouvement très rapide

Ces particules — que l'on appelle aussi des *héliions* — ont une charge $+2e$ et une masse voisine de 4 u. m. a. (soit plus de 7 000 fois la masse de l'électron). Leur vitesse d'émission, caractéristique du radioélément qui les émet, peut atteindre 20 000 km/s; par suite, leur

énergie cinétique est importante et ce sont d'*actifs agents d'ionisation*.

Toutefois, ils sont *peu pénétrants*; leur parcours dans l'air n'excède pas quelques centimètres et pour leur faire traverser une lame métallique, il faut réduire l'épaisseur de celle-ci à quelques microns.

— Les **rayons β** sont constitués par des *électrons* expulsés d'atomes radioactifs avec des vitesses qui peuvent être *extrêmement grandes*, atteignant 290 000 km/s, soit plus des neuf dixièmes de la vitesse de la lumière. Pour obtenir des vitesses de cet ordre, il faudrait des tensions accélératrices très supérieures à 1 million de volts, qu'il n'est pas possible de réaliser dans un canon à électrons.

Formés de particules beaucoup plus légères que les rayons α , les rayons β ont un pouvoir ionisant moindre. Par contre, ils sont *beaucoup plus pénétrants*; les plus rapides peuvent traverser des feuilles d'aluminium de plusieurs millimètres d'épaisseur.

— Les **rayons γ** , non déviés par un champ magnétique ou un champ électrique, présentent toutes les propriétés des rayons X très « durs », avec un *pouvoir de pénétration encore supérieur* puisque certains rayons γ traversent des plaques de plomb de 20 cm d'épaisseurs!

Ce sont, comme les rayons X, des **ondes électromagnétiques** de longueurs d'onde extrêmement courtes, comprises entre 10^{-2} et 10^{-4} Å. Ils constituent la partie biologiquement la plus active du rayonnement émis par les radioéléments et le personnel des centres de recherches nucléaires doit s'en préserver soigneusement.

c. — La radioactivité β^+ de certains radioéléments artificiels.

Des atomes stables, frappés par des particules très rapides, peuvent se transformer en atomes radioactifs. C'est ainsi qu'en soumettant des atomes d'aluminium aux rayons α du polonium, Irène et Frédéric Joliot-Curie obtinrent un radio-phosphore de symbole ${}^{30}_{15}\text{P}$, isotope *radioactif* du phosphore ordinaire ${}^{31}_{15}\text{P}$.

Certains radioéléments artificiels — le radio-phosphore ${}^{30}_{15}\text{P}$ en particulier — émettent des **rayons β^+** que ne produisent pas les éléments radioactifs naturels. Les propriétés de ce rayonnement β^+ sont comparables à celles du rayonnement β ordinaire (ou β^-); elles en diffèrent par le fait que les particules β^+ sont des électrons *positifs*, ou **positons**, de même masse que les électrons ordinaires mais de charge $+e$.

B. LES CARACTÈRES GÉNÉRAUX DE LA RADIOACTIVITÉ

3. Les propriétés caractéristiques des transformations radioactives.

Les mesures de l'intensité du rayonnement radioactif ont mis en évidence les caractères suivants :

1° *La radioactivité (naturelle ou artificielle) est un phénomène spontané sur lequel nous n'avons aucun moyen d'action.*

Les variations de température ou de pression, ou la mise en œuvre de tout autre facteur capable d'accélérer ou de ralentir une réaction chimique sont sans influence sur l'évolution d'une substance radioactive.

2° *La radioactivité est une propriété des noyaux atomiques.*

En effet :

a) Un radioélément conserve la même radioactivité quelle que soit la structure chimique dans laquelle ses atomes se trouvent liés. C'est ainsi que tous les composés naturels de l'uranium, par exemple, possèdent la même radioactivité que le métal pur extrait de ses minerais.

Cela tient à ce que les liaisons entre les atomes intéressent les électrons périphériques mais laissent les noyaux inchangés.

b) Si un élément comporte des isotopes radioactifs, les propriétés chimiques de ceux-ci sont identiques à celles des isotopes stables : c'est la preuve que le nombre et la répartition des électrons planétaires — des électrons de valence, en particulier — sont les mêmes dans les deux cas ; les atomes de ces isotopes radioactifs ne diffèrent donc des autres que par la *structure instable de leurs noyaux*.

On peut utiliser cette propriété pour préciser les structures chimiques dans lesquelles les atomes d'un même élément entrent successivement au cours d'une suite de réactions chimiques ; il suffit de mélanger cet élément à une faible quantité de l'un de ses isotopes radioactifs et de suivre ce *traceur* grâce au rayonnement qu'il émet.

C'est ainsi que de nombreux radioéléments artificiels (radiophosphore, radioiode, radiobrome, radiosodium, ...) sont couramment utilisés en technique chimique, en biologie et en médecine.

c) Contrairement à une réaction chimique — au cours de laquelle il y a toujours conservation des éléments mis en jeu —, *une transformation radioactive modifie la nature chimique du*

radioélément. Le polonium, par exemple, se transforme progressivement en un isotope stable du plomb ; le radium donne du radon, gaz radioactif du groupe des gaz inertes.

De telles *transmutations* ne peuvent être que des *réactions nucléaires*, au cours desquelles des noyaux atomiques se détruisent et donnent naissance à des noyaux de structure différente.

3° *Les transformations radioactives libèrent d'énormes quantités d'énergie.*

Si une masse m d'un radioélément disparaît au cours d'une transformation radioactive, l'énergie nucléaire libérée par cette transformation vaut environ *un million de fois* l'énergie que fournirait la combustion d'une même masse m du meilleur des combustibles.

4. La « demi-vie » d'un radioélément.

a. — La masse de radioélément contenue dans une préparation radioactive décroît suivant la loi *exponentielle* qu'illustre la courbe de la figure 5.

Du tracé de cette courbe se déduit la « *demi-vie* » T , caractéristique de l'élément radioactif étudié :

On appelle « demi-vie » d'un radioélément le temps au bout duquel la moitié des atomes de cet élément initialement présents dans une préparation s'est désintégrée.

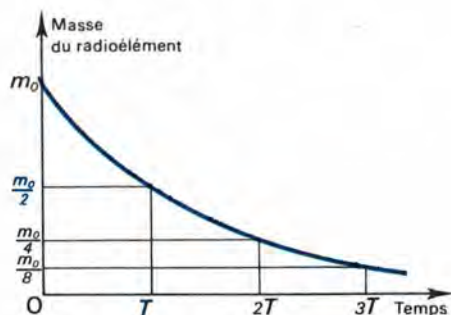


Fig. 5. — La loi de la décroissance de la masse d'un radioélément en fonction du temps.

Au temps T la masse des atomes restants est la moitié de la masse m_0 initiale ; au temps $2T$ elle n'en est plus que le $1/4$; au temps $3T$, le $1/8$;... ; au temps nT , le $1/2^n$. Ainsi, lorsque le temps croît en progression arithmétique, la masse des atomes encore intacts décroît en progression géométrique.

La « demi-vie » étant, par exemple, de 140 jours pour le polonium, une préparation qui contient aujourd'hui une masse m_0 de polonium n'en contiendra plus que

$$\frac{m_0}{2} \text{ dans 140 jours;}$$

$$\frac{m_0}{4} \text{ dans 280 jours;}$$

$$\frac{m_0}{8} \text{ dans 420 jours; etc.}$$

Les « demi-vies » sont très différentes d'un élément à l'autre; en voici quelques exemples :

Uranium ($^{238}_{92}\text{U}$) : $4,5 \times 10^9$ ans;

Radium ($^{226}_{88}\text{Ra}$) : 1 620 ans;

Radon ($^{222}_{86}\text{Rn}$) : 3,8 jours;

Radium C (ou $^{214}_{83}\text{Bi}$) : 19,7 minutes;

Radium C' (ou $^{214}_{84}\text{Po}$) : $1,5 \times 10^{-4}$ seconde.

b. — Pour un atome radioactif considéré *isolément*, la « demi-vie » T caractérise la probabilité de sa désintégration :

A un instant t quelconque, un atome de polonium, par exemple, a une chance sur deux de se désintégrer dans les 140 jours qui suivront et cette probabilité demeure inchangée jusqu'au moment de la désintégration; on peut dire que l'atome radioactif « ne vieillit pas », contrairement aux êtres vivants, dont on sait que les chances de mourir augmentent avec l'âge.

La date de la désintégration spontanée d'un atome radioactif est donc absolument *imprévisible*. Si l'expérience révèle qu'une masse finie de radioélément décroît *exponentiellement* en fonction du temps, c'est parce que cette masse contient un nombre extrêmement élevé d'atomes radioactifs; le phénomène observé, régulier et continu, est en fait le résultat de la superposition d'un très grand nombre de phénomènes individuels discontinus.

C. LE MÉCANISME NUCLÉAIRE DES TRANSFORMATIONS RADIOACTIVES

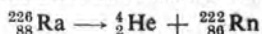
La désintégration d'un radioélément s'accompagne de la formation d'un noyau différent et de l'émission d'un rayonnement α , β^- ou β^+ ; à cette expulsion de particules électrisées s'ajoute éventuellement un rayonnement γ . Nous sommes donc amenés à étudier trois types de radioactivité.

5. La radioactivité α .

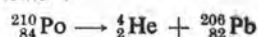
Dans ce type, la désintégration du noyau se manifeste par l'**expulsion d'un hélium ^4_2He** , formé de deux protons assemblés avec deux neutrons. Corrélativement, **le nombre de masse A du noyau diminue de 4 unités et son nombre de charge Z de 2 unités.**

Les noyaux qui présentent la radioactivité α sont des noyaux lourds; leurs nombres de masse A dépassent 200. En voici deux exemples :

1° Transmutation du radium en radon :



2° Transmutation du polonium en un isotope stable du plomb :

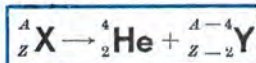


Observons qu'en raison de leur mécanisme, toutes les réactions nucléaires satisfont à deux principes de conservation :

— La **conservation du nombre des nucléons** : le nombre de masse du noyau père est égal à la somme des nombres de masse du noyau fils et de la particule émise;

— La **conservation de la charge électrique globale** : le nombre de charge du noyau père est égal à la somme algébrique des charges du noyau fils et de la particule émise;

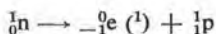
La radioactivité α se représente par le schéma général :



Comme le noyau fils Y a un nombre de charge inférieur de 2 unités à celui du père X, il appartient à un atome de numéro atomique $Z - 2$, donc à un élément chimique qui se place deux cases *avant* la case du père dans le tableau périodique des éléments (p. 312).

6. La radioactivité β^- .

La transformation β^- d'un noyau s'accompagne de l'expulsion d'un électron ordinaire (ou négaton). Comme le noyau d'un atome ne contient pas d'électron, celui qui est expulsé provient de la **transformation d'un neutron en un proton** :



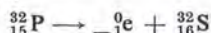
Corrélativement, **le nombre de masse A du noyau ne change pas et son nombre de charge Z augmente d'une unité.**

Exemples :

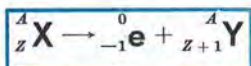
1° Transmutation du radium E (isotope du bismuth) en polonium :



2° Transmutation du radiophosphore artificiel ${}^{32}_{15}\text{P}$ en soufre :



Le schéma d'une transformation β^- est de la forme :



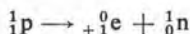
Le noyau fils appartient à un atome de numéro atomique $Z + 1$; il correspond donc à un élément chimique situé dans la case du tableau périodique qui *suit* immédiatement celle du père.

Remarque.

Les transformations radioactives α et β s'accompagnent généralement de l'émission de **photons** de très grande énergie $h\nu$. Ces photons constituent le **rayonnement** γ dont les propriétés ont été décrites précédemment. Les rayons γ ne correspondent donc pas à un autre type de radioactivité ; ils apparaissent comme un *effet secondaire* de la radioactivité α ou β .

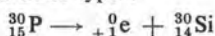
7. La radioactivité β^+ .

La transformation β^+ d'un noyau radioactif — qui ne s'observe qu'avec des radioéléments *artificiels* —, s'accompagne de l'expulsion d'un électron positif, ou *positon*. Comme un noyau ne contient pas de positon, celui qui est expulsé provient de la **transformation d'un proton en un neutron** :



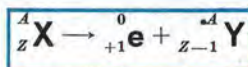
Corrélativement, **le nombre de masse A du noyau ne change pas et son nombre de charge Z diminue d'une unité.**

La transmutation du radiophosphore ${}^{30}_{15}\text{P}$, obtenu par I. et F. Joliot-Curie, en un isotope du silicium est de ce type :



(¹) ${}^0_{-1}\text{e}$ est le symbole utilisé en chimie nucléaire pour représenter l'électron.

D'une manière générale, la radioactivité β^+ peut se représenter par :



Le noyau fils appartient à un atome de numéro $Z - 1$; il correspond donc à un élément chimique situé dans la case du tableau périodique qui *précède* immédiatement celle du père.

Remarque.

Lorsqu'un même élément comporte plusieurs isotopes radioactifs — comme c'est le cas pour le phosphore ordinaire ${}^{31}_{15}\text{P}$ et les deux radiophosphores ${}^{32}_{15}\text{P}$ et ${}^{30}_{15}\text{P}$ — le radioisotope qui contient *plus* de neutrons que l'isotope stable présente la radioactivité β^- , alors que celui qui en contient *moins* présente la radioactivité β^+ .

8. Les familles radioactives.

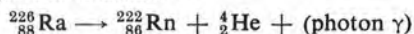
Si le nouveau noyau qui se forme par désintégration d'un noyau radioactif est lui-même instable, il se transmute à son tour et la suite des transformations radioactives ne s'arrête qu'avec la formation d'un noyau stable. L'ensemble des radioéléments qui proviennent ainsi du même père constitue une **famille radioactive** (fig. 6).

Il existe trois familles d'éléments radioactifs naturels dont les pères sont, respectivement, *l'uranium*, *l'actinium* et *le thorium*.

Remarquons qu'en raison de ces filiations, une préparation radioactive ordinaire — un sel de radium par exemple — contient toujours un mélange de radioéléments, de sorte que son rayonnement est *complexe* : il comprend à la fois des rayons α , β^- et γ (§ 2).

9. La détermination de l'énergie libérée au cours d'une transformation radioactive.

a. — Considérons par exemple la transmutation spontanée du *radium* en *radon*, conformément à l'équation nucléaire :



L'énergie nucléaire libérée se retrouve dans l'énergie cinétique des hélions expulsés et dans l'énergie $h\nu$ des photons γ dont l'émission accompagne la désintégration des noyaux de radium. On peut la mesurer dans un calorimètre dont la paroi arrête les particules α et absorbe les photons : on trouve ainsi qu'un *gramme de radium libère environ 140 calories par heure*.

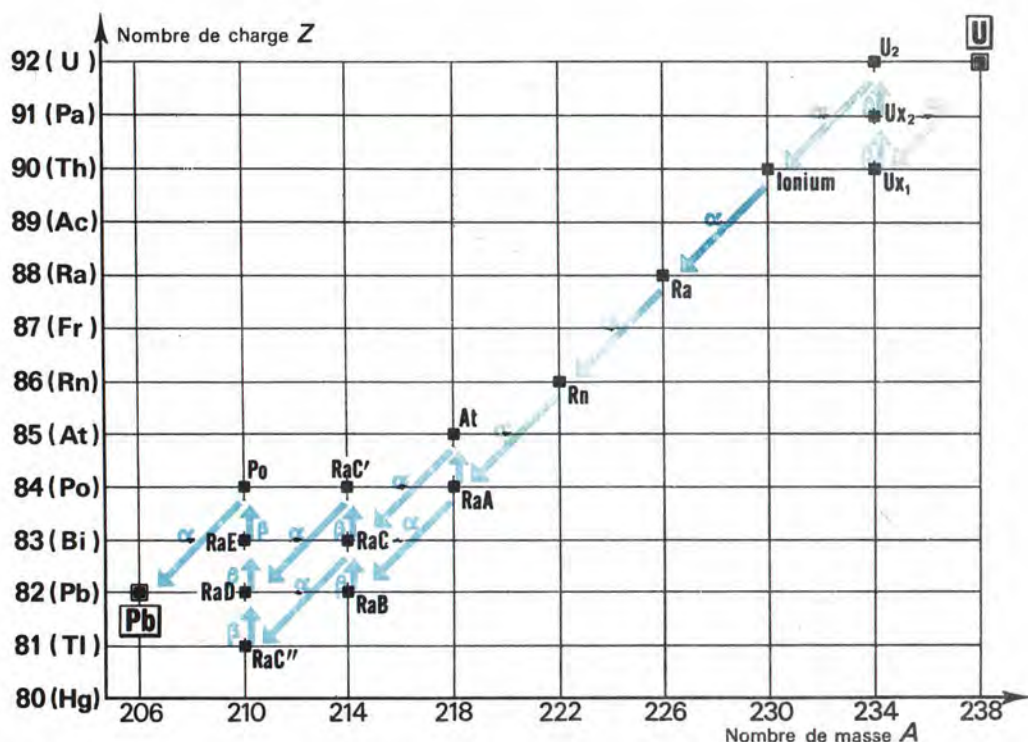


Fig. 6. — La famille radioactive de l'uranium.

Les symboles indiqués ci-dessus qui ne figurent pas dans le tableau périodique des éléments ⁽¹⁾ correspondent à des dénominations anciennes inexactes ; en réalité, les uraniums X_1 et X_2 sont des isotopes du thorium et du protactinium ; l'ionium est aussi un isotope du thorium. De même, seul $^{226}_{88}\text{Ra}$ est du radium ; les autres « radiums » A, B, ... sont des isotopes du polonium, du bismuth, du plomb ou du thallium.

Ce résultat paraît faible a priori ; cela tient à la lenteur de la transformation globale, puisqu'il faudrait plus de 1 600 ans pour que la moitié seulement des atomes de radium contenus actuellement dans la préparation radioactive se désintègre.

b. — On obtient immédiatement l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau, considéré *isolément*, en appliquant la relation d'Einstein :

$$W = \Delta m \cdot c^2$$

Dans le cas présent, la *perte de masse* Δm est

égale à la différence entre la masse du noyau de radium et la somme des masses du noyau de radon et du noyau d'hélium : $\Delta m =$

$$\text{masse } ^{226}_{88}\text{Ra} - (\text{masse } ^{222}_{86}\text{Rn} + \text{masse } ^4_2\text{He})$$

La perte relative de masse, $\frac{\Delta m}{m}$, est ici comprise entre 10^{-4} et 10^{-3} ; on en déduit que la désintégration de tous les atomes contenus dans un gramme de radium produirait environ 3 millions de kilocalories (12 milliards de joules!).

⁽¹⁾ Voir ce tableau et la liste des éléments p. 312 et 313.

EXERCICES

1. Calculer l'énergie cinétique initiale (en MeV et en joule) d'une particule α expulsée d'un noyau radioactif avec une vitesse de 20 000 km/s.

Rép. : $8,3 \text{ MeV} \approx 1,33 \times 10^{-12} \text{ joule}$.

2. En admettant que la fission en chaîne⁽¹⁾ de l'uranium « 235 » s'accompagne d'une perte relative de masse égale à 8×10^{-4} , calculer la consommation journalière en $^{235}_{92}\text{U}$ de la pile EL2 de Saclay lorsqu'elle débite une puissance de 2 200 kW. Si l'on admet que pour chaque noyau $^{235}_{92}\text{U}$ subissant la fission il se forme un noyau de $^{239}_{94}\text{Pu}$ aux dépens d'un noyau $^{238}_{92}\text{U}$, quelle est la masse de plutonium produite en un jour par cette pile atomique ? En déduire la puissance d'une pile atomique qui fournit 500 g de plutonium par jour.

3. On a placé un centième de milligramme de radium au centre d'une sphère de verre, de rayon intérieur 8 cm. Sur la paroi interne de la sphère, on a collé un petit écran en sulfure de zinc qu'on observe au microscope. On fait le vide dans la sphère. Le radium émet des particules dans toutes les directions et, chaque fois qu'une particule α atteint l'écran on aperçoit une scintillation.

Sur chaque élément d'écran de surface $0,01 \text{ mm}^2$, on observe ainsi 19 scintillations en 100 s.

⁽¹⁾ Voir la lecture de la page suivante.

1° Calculer le nombre de particules α émises par un milligramme de radium en 1 minute.

2° Les particules α portent une charge électrique positive. On reçoit sur l'armature d'un condensateur de capacité 10^{-11} farad la moitié des particules α émises dans le vide par un milligramme de radium, l'autre armature étant reliée au sol. Au bout de 1 minute, la différence de potentiel entre les armatures du condensateur, supposé sans fuites, est de 147 volts. Quelle est la charge d'une particule α ?

3° On a déterminé le volume total d'hélium dégagé en un an, par un milligramme de radium. On a trouvé $0,172 \text{ mm}^3$ (à 0° et sous la pression normale).

Déterminer, à 5 % près, le nombre d'Avogadro, c'est-à-dire le nombre d'atomes contenus dans une mole d'hélium, de masse très voisine de 4 g et de volume $22\,400 \text{ cm}^3$ dans les conditions normales.

Calculer la masse d'une particule α .

4° Un décigramme de radium, placé dans un calorimètre, dégage 14 calories par heure. En admettant que 90 % de cette chaleur provienne de l'énergie cinétique des particules α , déterminer la vitesse de ces particules.

(Bacc.).

Rép. : 1° $9,15 \times 10^8$ particules ;

2° $Q = 2e \approx 3,2 \times 10^{-19} \text{ coulomb}$;

3° $N = (6,3 \pm 0,3) 10^{23}$; $m \approx 0,63 \times 10^{-23} \text{ g}$;

4° $v \approx 17\,000 \text{ km/s}$.

Explosion d'une
bombe atomique.
Photo Keystone



LECTURE

Libération d'énergie nucléaire par fission en chaîne de noyaux $^{235}_{92}\text{U}$.

L'uranium naturel comprend deux isotopes, $^{238}_{92}\text{U}$ et $^{235}_{92}\text{U}$, dans les proportions très différentes de 99,3 % et 0,7 %.

Les noyaux de l'isotope rare « 235 », bombardés par des neutrons, ont la propriété de se scinder généralement en deux fragments (de nature variable) avec émission de deux ou trois neutrons et perte relative de masse de l'ordre du millième. Les neutrons « secondaires » produisent à leur tour la fission d'autres noyaux « 235 » de sorte que la réaction nucléaire, une fois amorcée, se propage de proche en proche : c'est la fameuse *réaction en chaîne* qui peut, en un temps extrêmement court, intéresser un nombre énorme d'atomes.

a. — Dans un réacteur nucléaire — appelé improprement « pile atomique » —, qui utilise généralement de l'uranium naturel, la fission en chaîne de $^{235}_{92}\text{U}$ est contrôlée et a un triple intérêt :

1° Elle provoque la transformation de l'uranium « 238 », beaucoup moins rare mais non fissile, en un nouvel élément, le plutonium ($^{239}_{94}\text{Pu}$), qui a des propriétés nucléaires comparables à celles de l'uranium « 235 » et peut, comme celui-ci, servir de « combustible nu-

cléaire » dans des *piles atomiques secondaires*, sources d'énergie nucléaire, ou dans des bombes atomiques (*bombes A*).

2° Elle permet de soumettre des éléments à un bombardement de neutrons et de les transformer, au moins partiellement, en *radioéléments artificiels*. C'est ainsi que les piles atomiques produisent le radiophosphore, le radioiode, le radiobrome, le radiosodium, le radiocobalt,... dont l'emploi se généralise de plus en plus dans les recherches chimiques, biologiques et médicales.

3° Elle libère l'énergie nucléaire correspondant à la perte de masse qui accompagne l'ensemble des fissions. Cette énergie peut être utilisée sous la forme calorifique, être transformée en énergie électrique ou encore servir à la propulsion de sous-marins et de bateaux.

b. — Dans une bombe « atomique » — ou bombe A —, qui contient de l'uranium « 235 » ou du plutonium, la réaction en chaîne est « explosive »; en un temps de l'ordre de quelques microsecondes elle intéresse les noyaux de dizaines de kilogrammes de matière fissile et fournit une énergie énorme, équivalente à celle que fournirait l'explosion de milliers de tonnes d'un explosif chimique puissant.

1 H																	2 He	
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne	
11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr	
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe	
55 Cs	56 Ba	57 à 71 Lanthanides (voir ci-dessous)		72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	89 et suivants Actinides (voir ci-dessous)																

Lanthanides
ou
Terres rares

57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Actinides

89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lw
----------	----------	----------	---------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Tableau périodique des éléments.

Le symbole permet de retrouver le nom et la masse atomique de l'élément dans le tableau de la page 313.

Les éléments « transuraniens », de numéros atomiques supérieurs à 92, sont des éléments artificiels qui ont été obtenus dans des réactions nucléaires provoquées ; leurs noms sont, dans l'ordre des numéros atomiques croissants :

Le neptunium, le plutonium, l'américium, le curium, le berkelium, le californium, l'einsteinium, le fermium, le mendelevium, le nobelium, le lawrentium.

LES SYMBOLES ET LES MASSES ATOMIQUES DES 92 PREMIERS ÉLÉMENTS (1961)

Actinium	Ac	= 227
Aluminium	Al	= 27,0
Antimoine	Sb	= 121,8
Argent	Ag	= 107,9
Argon	A	= 39,9
Arsenic	As	= 74,9
Astate	At	= 210
Azote	N	= 14,0
Baryum	Ba	= 137,3
Béryllium (ou Glucinium)	Be	= 9,0
Bismuth	Bi	= 209
Bore	B	= 10,8
Brome	Br	= 79,9
Cadmium	Cd	= 112,4
Calcium	Ca	= 40,1
Carbone	C	= 12,0
Cérium	Ce	= 140,1
Césium	Cs	= 132,9
Chlore	Cl	= 35,5
Chrome	Cr	= 52,0
Cobalt	Co	= 58,9
Cuivre	Cu	= 63,5
Dysprosium	Dy	= 162,5
Erbium	Er	= 167,3
Étain	Sn	= 118,7
Europium	Eu	= 152
Fer	Fe	= 55,8
Fluor	F	= 19,0
Francium	Fr	= 223
Gadolinium	Gd	= 157,3
Gallium	Ga	= 69,7
Germanium	Ge	= 72,6
Hafnium (ou Celtium)	Hf	= 178,5
Hélium	He	= 4,0
Holmium	Ho	= 164,9
Hydrogène	H	= 1,0
Indium	In	= 114,8
Iode	I	= 126,9
Iridium	Ir	= 192,2
Krypton	Kr	= 83,8
Lanthane	La	= 138,9
Lithium	Li	= 6,9
Lutécium	Lu	= 175,0
Magnésium	Mg	= 24,3
Manganèse	Mn	= 54,9
Mercure	Hg	= 200,6

Molybdène	Mo	= 95,9
Néodyme	Nd	= 144,2
Néon	Ne	= 20,2
Nickel	Ni	= 58,7
Niobium	Nb	= 92,9
Or	Au	= 197,0
Osmium	Os	= 190,2
Oxygène	O	= 16,0
Palladium	Pd	= 106,4
Phosphore	P	= 31,0
Platine	Pt	= 195,1
Plomb	Pb	= 207,2
Polonium	Po	= 210
Potassium	K	= 39,1
Praséodyme	Pr	= 140,9
Prométhium	Pm	= 145
Protactinium	Pa	= 231
Radium	Ra	= 226
Radon	Rn	= 222
Rhénium	Re	= 186,2
Rhodium	Rh	= 102,9
Rubidium	Rb	= 85,5
Ruthénium	Ru	= 101,1
Samarium	Sm	= 150,4
Scandium	Sc	= 45,0
Sélénium	Se	= 79,0
Silicium	Si	= 28,1
Sodium	Na	= 23,0
Soufre	S	= 32,1
Strontium	Sr	= 87,6
Tantale	Ta	= 180,9
Technétium	Tc	= 99
Tellure	Te	= 127,6
Terbium	Tb	= 158,9
Thallium	Tl	= 204,4
Thorium	Th	= 232,0
Thulium	Tm	= 168,9
Titane	Ti	= 47,9
Tungstène (ou Wolfram)	W	= 183,9
Uranium	U	= 238,0
Vanadium	V	= 50,9
Xénon	Xe	= 131,3
Ytterbium	Yb	= 173
Yttrium	Y	= 88,9
Zinc	Zn	= 65,4
Zirconium	Zr	= 91,2

PROBLÈMES D'EXAMEN ET DE CONCOURS

CHOIX DE PROBLÈMES PROPOSÉS AU BACCALAURÉAT

DYNAMIQUE

1. Une automobile pesant 600 kg aborde à la vitesse de 72 km à l'heure une côte dont la pente est de 4 % (on s'élève de 4 cm par mètre de route).

1° En supposant les frottements négligeables, quelle est la force supposée constante que devra exercer le moteur pour conserver la vitesse de 72 km à l'heure ?

2° Les résistances passives étant constantes et évaluées à 30 kgf par tonne, quelle est la puissance développée par le moteur pendant la montée à la vitesse constante de 72 km/h ?

3° A un moment donné le conducteur arrête son moteur sans serrer les freins. En supposant que les résistances passives demeurent constantes, quelle sera la distance parcourue par l'automobile avant de s'arrêter sur la rampe de 4 % ? Au bout de combien de temps après l'arrêt du moteur se produit l'arrêt du véhicule ?

4° Quelle serait alors la force de freinage constante qui permettrait un arrêt de la voiture sur une distance de 20 m ? Durée de ce freinage ?

On prendra $g \approx 10$ u. S.I.

2. 1° Un avion volant horizontalement à une altitude de 7 840 m avec une vitesse de 450 km à l'heure, laisse tomber une bombe en passant par la verticale d'un point A du sol.

a. Au bout de combien de temps l'éclatement se produira-t-il au contact du sol ?

b. Quelle distance l'avion aura-t-il parcourue à ce moment-là depuis l'instant où il a lâché la bombe ?

c. A quelle distance du point A se produira l'éclatement ?

2° En admettant que l'avion ne vole plus qu'à une altitude de 1 960 m, quelle vitesse devrait-il avoir au moment du déclenchement du projectile pour que ce dernier tombe dans un rayon de 200 m du point A ? Cette vitesse est-elle vraisemblable ?

3° La vitesse de l'avion étant de 360 km à l'heure, de quelle altitude devra être lâchée la bombe en vol piqué faisant avec la verticale un angle de 9°, pour que le projectile tombe dans un rayon du point A inférieur à 156 m ? (On prendra $g = 9,8$ m/s²; on admettra que la résistance de l'air est négligeable.)

3. Un train se compose de 10 voitures identiques dont chacune a une masse de 50 t, remorquées par une locomotive pesant 100 t. Il démarre sur une voie rectiligne et horizontale sous l'action d'une force F supposée constante et atteint en 3 minutes une vitesse de 108 km/h.

1° Calculer l'accélération du train, la force de traction F , développée par le moteur de la locomotive, la force de traction F_1 appliquée sur la première voiture et le chemin parcouru pour obtenir la vitesse en question, en supposant négligeables les résistances passives.

2° La dernière voiture est accrochée au reste du train par un dynamomètre; qu'indique l'appareil au cours du démarrage ? Montrer que les tensions transmises par les barres d'attelage qui relient les voitures croissent en progression arithmétique du dernier véhicule à la locomotive; calculer la raison de cette progression, en négligeant comme au paragraphe 1° les résistances passives.

3° Le train roulant sur une voie horizontale à la vitesse constante de 108 km/h, la locomotive développe dans ces conditions une puissance de 3 000 kilowatts; évaluer en newton par tonne de convoi la force horizontale opposée à la vitesse qui représente l'ensemble des résistances de frottement que l'on avait précédemment négligées.

4° Le train aborde à 108 km/h une courbe de rayon $R = 900$ m.

Calculer par sa tangente l'angle que doit faire le plan de la voie avec le plan horizontal (dévers de la voie) pour que soit compensée la force d'inertie centrifuge du train; quelle est la force totale exercée sur les rails par chaque voiture ?

5° Le train lancé à la vitesse précédente est arrêté en 30 secondes; les résistances propres au convoi étant supposées les mêmes qu'au 3° paragraphe, quelle doit être la force supplémentaire de freinage à exercer ? Sur quelle longueur aura lieu le freinage ? Que deviendra l'indication du dynamomètre ?

On prendra $g = 9,8$ u. S.I.

4. Une fusée a une masse totale de 15 tonnes au départ. La masse des produits réagissant dans le moteur est 8 tonnes. La fusée consomme ces produits en 40 secondes, le débit

étant constant. La poussée F exercée par le moteur est une force constante, égale à 2×10^5 N.

On appellera g l'accélération de la pesanteur au sol et l'on prendra g comme unité d'accélération.

1° Si la fusée était mobile horizontalement sans frottement (sur un chariot, par exemple), quelle serait l'accélération au départ ?

2° Dans le cas où il serait possible de maintenir un mouvement horizontal sans frottement (on suppose dans cette question que la résistance de l'air est négligeable), calculer l'accélération en fonction du temps et représenter graphiquement cette fonction.

Échelles du graphique : 1 cm pour 5 secondes et 3 cm pour g (on pourra utilement tracer un quadrillage de côtés parallèles aux axes de façon à pouvoir faire, si besoin est, une mesure d'aire approximative).

3° En utilisant le graphique précédent, calculer en kilomètres par heure une valeur approchée de la vitesse atteinte à la fin du fonctionnement du moteur, dans les conditions précédentes.

(Pour cette question, on prendra $g \approx 10$ m/s².)

4° La fusée part verticalement du sol. Des mesures directes montrent qu'au bout de 20 secondes l'accélération est 0,8 g . Calculer la résistance de l'air sur le mobile à cet instant, en supposant que l'accélération de la pesanteur n'a pas sensiblement varié avec l'altitude.

5° Dans le cas précédent, les accélérations sont mesurées à l'aide d'un ressort à boudin contenu dans un tube parallèle à l'axe de la fusée. Sur le ressort est fixée une masselote cylindrique munie d'un repère. Au repos, le poids du cylindre raccourcit le ressort de 1 cm.

Établir la relation qui lie le raccourcissement x du ressort à l'accélération γ de la fusée et dessiner en vraie grandeur la graduation de l'appareil.

5. Dans un puits de mine profond de 500 m se déplace une cage pesant vide 5 000 kg.

1° En négligeant les forces de frottement et la résistance de l'air, en supposant constante l'accélération de la pesanteur en tout point du puits $g = 10$ m/s², quelle serait la durée de chute de la cage si le câble se rompait au moment où elle est immobile à l'entrée du puits ? Quelle serait sa vitesse v à son arrivée au fond ?

2° Immobile au fond du puits, la cage pleine de charbon pèse 10 tonnes. On veut lui imprimer une vitesse d'ascension de 10 m/s par un mouvement uniformément accéléré durant

20 secondes. Quelle traction T le câble exercera-t-il sur la cage et quel sera le chemin parcouru pour atteindre cette vitesse ?

3° Après avoir subi le mouvement précédent, la cage pleine de charbon est animée d'un mouvement uniforme puis arrive sans vitesse au niveau du sol au terme d'un mouvement uni-

formément retardé d'accélération opposée à celle du départ. Quelle est la durée totale du parcours ?

6. Une cage d'ascenseur pesant 5 000 kg dessert un puits de mine de 900 m de profondeur. Pendant le mouvement, les résistances de frottements sont équivalentes à une force de 500 kgf parallèle au mouvement et indépendante de la vitesse.

1° La cage étant au fond du puits, on exerce une force de traction de 6 000 kgf vers le haut.

Au bout de 150 m de parcours, l'effort de traction est modifié de sorte que le mouvement devienne uniforme pendant 600 m. L'effort de traction est ensuite modifié de sorte que la cage arrive au sommet du puits avec une vitesse nulle, d'un mouvement uniformément retardé.

Étudier les diverses phases du mouvement et déterminer la durée totale de la montée (on prendra $g \approx 10$ u. SI).

Représenter en fonction du temps : a) l'espace parcouru ; b) la vitesse de la cage.

2° Calculer pendant les deuxième et troisième phases du mouvement la force de traction.

3° Un corps de 20 kg est suspendu à un dynamomètre placé dans la cage.

Quelles seront les indications de ce dynamomètre pendant les trois phases du mouvement ?

7. Le bâti d'un appareil analogue à la machine d'Atwood porte une règle verticale et une poulie à axe horizontal placé un peu au-dessus du sommet de la règle verticale. Sur la gorge de la poulie passe un fil de masse négligeable dont les extrémités peuvent être chargées par 8 masses marquées de 100 g chacune.

1° Dans une première expérience, les deux extrémités du fil sont chargées l'une de 500 g, l'autre de 300 g et le système est abandonné à lui-même sans vitesse initiale.

Calculer l'accélération du système, la hauteur parcourue et la vitesse acquise au bout de 1,2 seconde.

2° On fixe au bâti un plan incliné faisant un angle de 30° par rapport au plan horizontal, vers le bas, à partir de la poulie. La masse de 300 g soutenue par le fil peut glisser sur le plan sans frottement, le brin qui la supporte restant parallèle au plan, donc incliné de 30° vers le bas.

Que deviennent les valeurs de l'accélération des deux masses, du déplacement et de la vitesse 1,2 seconde après que le système a été abandonné sans vitesse initiale ?

3° On dispose alors le plan horizontalement de façon que le brin de fil tendu qui le longe soit lui aussi horizontal. Comment faudrait-il répartir la charge totale de 800 g entre les deux extrémités du fil, celle qui pend librement et celle qui glisse sur le plan, pour que l'accélération ne change pas ?

4° Calculer la tension du fil dans chacune de ces trois expériences, en négligeant la masse de la poulie.

L'accélération g de la pesanteur vaut $9,8 \text{ m/s}^2$.

8. Un cycliste pèse, avec sa machine, 100 kg. Les divers frottements ont le même effet qu'une force R_0 de même direction que le mouvement, de sens opposé à celui-ci et d'intensité 10 N, quelle que soit la vitesse.

1° La route est horizontale.

a. Le cycliste roule avec une vitesse constante de 18 km/h. Quelle est la force de traction qu'il exerce ? Quelle puissance développe-t-il ?

b. Un obstacle l'oblige à cesser de pédaler et à freiner, les freins développent une nouvelle force R_1 de sens contraire au mouvement, d'intensité 110 N. Quelle distance parcourt-il avant de s'arrêter ?

c. Cessant de freiner, il repart, exerçant une force de traction de 60 N. Combien de temps met-il pour atteindre à nouveau la vitesse de 18 km/h ?

2° a. Avec cette même vitesse de 18 km/h, il aborde une côte à 5,5 % (5,5 m de dénivellation pour 100 m de route).

Quelle est la force totale R_2 qui s'oppose à son mouvement ? Quelle distance parcourt-il avant de s'arrêter s'il cesse de pédaler à l'instant où il aborde la côte ?

b. Étant reparti sur cette même pente, il monte à la vitesse constante de 9 km/h. Quelle puissance développe-t-il ?

c. S'il redescendait cette même route, sans pédaler ni freiner,

quelle serait la force totale R_3 qui l'entraînerait ? Quelle serait, en kilomètre/heure, sa vitesse après 500 m de route ?

9. 1° A un axe vertical Y'Y est fixée rigidement une tige horizontale OX. Sur cette tige est enfilé un ressort à boudin R de longueur au repos $l_0 = 20$ cm. Une de ses extrémités est fixée à l'axe Y'Y, l'autre extrémité est attachée à une masse $m = 10$ g qui peut glisser sans frottement le long de la tige horizontale OX.

Le ressort s'allonge de 1 cm pour une force de traction égale à 0,125 N. On fait tourner l'ensemble autour de Y'Y avec une vitesse angulaire ω .

Établir la relation donnant l'allongement x du ressort en fonction de la vitesse angulaire ω , la masse m étant considérée comme ponctuelle.

Le ressort ne pouvant, sans déformation permanente, dépasser une longueur de 1 m, quelle est la plus grande vitesse de rotation permise ?

Tracer, à une échelle que l'on indiquera, la courbe représentative des variations de la fonction $x = f(\omega)$.

Pour tracer cette courbe on calculera en particulier les allongements pour des vitesses de rotation correspondant à 2 et 4 tours par seconde.

A l'aide du graphique, déterminer la vitesse de rotation correspondant à $x = 40$ cm.

2° Sur la tige OX est enfilé à la suite du ressort R un deuxième ressort R' identique au précédent. Une de ses extrémités est fixée à la masse m , dont la longueur est négligeable ; à l'autre extrémité est attachée une masse m' égale à m , qui glisse également sans frottement sur OX et peut être considérée comme ponctuelle.

L'ensemble tourne autour de Y'Y avec une vitesse angulaire ω .

Calculer les longueurs l_1 et l_2 des deux ressorts quand le système tourne avec une vitesse angulaire $\omega = 10$ radians par seconde.

On prendra $\pi^2 = 10$ et $g = 9,8$ u. SI.

10. Une barre rigide AB, de milieu O, pesant 125 g, longue de 60 cm, est solidaire d'un tambour cylindrique T, d'axe horizontal, de masse négligeable, de 3 cm de rayon ; l'axe du tambour est perpendiculaire en O à la barre ; l'ensemble admet pour axe de symétrie l'axe du tambour et peut tourner sans frottement autour de cet axe.

On fixe à chaque extrémité de la barre une masse supposée ponctuelle de 200 g. Le système S : barre-tambour-masses est mis en rotation grâce à une masse M de 50 g suspendue à un fil enroulé sur le tambour. Quand la masse M a parcouru 96 cm, le fil est coupé et la force motrice supprimée instantanément.

1° a. Étudier, sans calcul, les deux phases du mouvement du système S.

b. Calculer le moment d'inertie du système par rapport à son axe.

c. Quelles sont, pendant la 2° phase du mouvement, la vitesse angulaire du système S, la vitesse linéaire du point A, l'énergie cinétique du système S ?

d. Que deviendrait cette dernière quantité si l'on recommençait l'expérience en plaçant les deux masses de 200 g à 10 cm de O, de part et d'autre ?

2° En réalité, le système, effectivement lancé à la vitesse précédemment calculée, s'arrête après avoir fait 120 tours à partir du moment où la force motrice est supprimée. Calculer le moment du couple, supposé constant, auquel sont équivalentes les forces de frottement.

Moment d'inertie d'une barre de masse m , de longueur $2l$, par rapport à un axe perpendiculaire à la barre et passant par son milieu : $J = \frac{ml^2}{3}$.

On prendra $g \approx 10$ u. SI.

11. Un point matériel M de masse 100 g exécute un mouvement rectiligne sous l'action d'une force $\vec{f}$ qui l'attire vers un point fixe O de sa trajectoire et dont l'intensité est proportionnelle à la distance OM. Quand le mobile est à 1 cm du

point O, la force $\vec{f}$ a une intensité de $3,6 \times 10^{-3}$ N.

1° Déterminer la période du mouvement sinusoïdal ainsi produit.

2° On prendra comme origine des abscisses le point O. A la date zéro le mobile est en O animé d'une vitesse de 30 cm/s dans un sens que l'on adoptera comme sens positif sur la trajectoire. Écrire les équations qui donnent en fonction du temps l'abscisse x du mobile, sa vitesse v , son accélération γ et la mesure algébrique de la force f .

3° Calculer à quelle date le mobile passe pour la première fois par le point d'abscisse $x = -3$ cm en se mouvant dans le sens positif.

4° De combien diminuerait l'amplitude si la vitesse maximale venait à diminuer de $\frac{1}{100}$ de sa valeur ?

12. On enregistre par chronophotographie la chute d'un point brillant entraîné par une machine d'Atwood; l'appareil photographique a une distance focale de 15 cm, son objectif est à 1,65 m de la verticale du point qui se déplace et le système donne 7 images par seconde. Sur la plaque on obtient 6 images a, b, c, d, e, f telles que $ab = 19,6$ mm, $bc = 23,6$ mm, $cd = 27,6$ mm, $de = 31,6$ mm, $ef = 35,6$ mm.

1° La machine ayant été abandonnée sans vitesse initiale, combien aurait-on pu obtenir d'images avant a ? A quelle distance de a se trouve, sur la plaque, l'image w du point au repos? Quel temps s'est écoulé entre le départ et l'instant de la première image a ? Quelle est la distance wa ?

2° Quelle est l'accélération γ du système?

3° Les deux masses de la machine étant de 1 kg, quelle est la masse de la surcharge?

4° Quelle est la tension du fil?

On négligera partout la masse du fil et la masse de la poulie. $g \approx 9,80$ u. SI.

13. 1° Un ressort à boudin en acier R, parfaitement élastique, est fixé verticalement en O par son extrémité supérieure.

Si l'on applique à son extrémité inférieure une force $\vec{F}$, verticale dirigée de haut en bas, il prend un allongement proportionnel à la force ($F = k\ell$). En particulier, quand on lui accroche un corps A de 200 g, l'allongement à l'équilibre est $\ell_0 = 1$ cm. Calculer le coefficient k du ressort.

2° Le corps A, toujours accroché au ressort, est tiré légèrement vers le bas à partir de sa position d'équilibre, puis abandonné sans vitesse initiale à l'action de la force élastique du ressort. Montrer que A effectue un mouvement sinusoïdal de part et d'autre de sa position d'équilibre. Calculer la période T de ce mouvement.

3° Quelle est la masse Δm de la surcharge qui, ajoutée à A, modifierait la période T de 1 %?

4° La surcharge étant supprimée, le système « ressort R et corps A » est suspendu au plafond d'un ascenseur. L'ascenseur est mis en mouvement et accomplit, sans arrêt, un trajet vertical qui dure 14 secondes (le système est amorti de façon à éviter les oscillations). Pendant les 2 premières secondes l'allongement / du ressort est égal à 11 mm. Pendant les 10 secondes suivantes il reprend la valeur $\ell_0 = 10$ mm. Enfin, au cours des 2 dernières secondes, il se fixe à 9 mm. A quelle hauteur s'est élevé l'ascenseur?

On prendra $g = 9,80$ u. SI et $\pi = 3,14$.

14. 1° Un pendule dont la longueur est voisine de 25 cm est éclairé par un bref éclair toutes les 2 s. On constate qu'en 41 mn 20 s le pendule semble effectuer une oscillation apparente, le mouvement du pendule étant dans le même sens que le mouvement réel. Calculer la période du pendule; $g = 9,81$ u. SI.

2° Dans une autre expérience, le pendule étant éclairé de la même manière, on constate que son extrémité se déplace de 1,256 mm pendant l'intervalle de 51 éclairs successifs. L'amplitude des oscillations étant 5 mm, calculer la période (1,256 mm à partir de la position verticale).

3° Toutes les fois que le pendule passe par la verticale en allant vers la droite, on applique au pendule un choc qui diminue sa vitesse de 3,14 cm/s; calculer, en radian, les valeurs successives des élongations maximales; combien faut-il de chocs pour arrêter le pendule? (l'élongation maximale initiale sera prise égale à $1/10$ de radian).

4° Le pendule oscille avec l'amplitude angulaire de $1/10$ de radian. A l'instant où le pendule allant vers la droite passe par l'élongation $1/20$ de radian, on applique un choc qui multiplie la vitesse par $\sqrt{3}$. A quelle époque se produit le passage par le plus proche maximum d'élongation?

15. Un pendule que l'on peut considérer comme simple pèse 1 kg et bat exactement la seconde. On l'abandonne sous l'amplitude initiale de $\alpha = 6^\circ$.

1° Calculer sa vitesse lors du passage par la verticale.

2° A ce moment même, le pendule est freiné et sa vitesse est diminuée de $\frac{g}{120}$ cm/s. De quel angle α s'écartera-t-il de l'autre côté?

3° Indiquer quelle sera la tension du fil du pendule lors du premier passage par la verticale.

4° On compare le mouvement de ce pendule à celui du balancier d'une horloge déréglée qui retarde. L'intervalle entre deux coïncidences successives est 1 h 20 mn. En déduire le retard de l'horloge par jour.

On donne $g = 9,80$ u. SI.

16. Une sphère homogène de rayon $R = 20$ cm et de masse volumique 2 g/cm^3 est suspendue par un fil dont on peut négliger la masse. La distance du point de suspension au centre de la sphère est $a = 100$ cm.

1° Calculer, au dixième de seconde près, la période des petites oscillations du système, considéré d'abord comme un pendule simple de longueur a en un lieu où l'intensité de la pesanteur est $g = 9,80$ u. SI.

2° En réalité, le pendule ne peut être considéré comme simple et la mesure de la durée de 100 petites oscillations donne 202,3 s. Calculer, d'après cette donnée et au mm près, la longueur / du pendule simple synchrone de ce pendule en ce même lieu.

3° Le pendule est lancé de telle sorte que le fil décrive un cône de révolution d'axe vertical et de demi-angle au sommet égal à 60° . Calculer sa vitesse angulaire exprimée en radian par seconde et en tours par minute. Quelle est alors la tension du fil?

4° Le dispositif tourne enfin dans un plan vertical à la manière d'une fronde. Quelle doit être la vitesse linéaire v_0 du centre de la sphère au point le plus haut de sa course pour que la tension du fil soit alors nulle? Quelle est alors la vitesse linéaire v du centre de la sphère et la tension du fil au point le plus bas de sa course?

17. On admet que la variation de l'intensité de la pesanteur en fonction de l'altitude est donnée par la formule :

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2z}{R}\right),$$

où R est le rayon de la terre, g_0 l'intensité de la pesanteur à l'altitude 0 et g sa valeur à l'altitude z .

On donne $g_0 = 9,80$ u. SI et $R = 6400$ km.

1° A l'altitude 0, un pendule simple oscille avec une période

$T = \pi \sqrt{\frac{2}{g}}$ secondes. Quelle est la longueur / de ce pendule?

2° De combien doit-on modifier la longueur du pendule et dans quel sens pour qu'il conserve la même période à l'altitude $z = 6400$ m :

a. en supposant que le fil de suspension a un coefficient de dilatation linéaire négligeable;

b. en supposant son coefficient de dilatation $\lambda = 0,00002$ et que l'écart de température entre l'altitude $z = 6\,400$ et l'altitude 0 est $\Delta t = -30^\circ\text{C}$?

On calculera les variations de l au 1/100 de mm près.

18. Sur un disque horizontal, de centre O, de masse $M = 0,2\text{ kg}$, de rayon $R = 20\text{ cm}$, peuvent glisser, le long d'un diamètre AB, deux masses, supposées ponctuelles, identiques $m = m' = 100\text{ g}$. Ces masses se trouvent l'une sur OA, l'autre sur OB et sont à chaque instant équidistantes du point O ; $Om = Om' = d$. Le disque est suspendu, par son centre, à un fil vertical, de longueur 1,20 m, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe P. Laissant le fil vertical, on fait tourner le disque autour de son axe et on l'abandonne à lui-même. Il effectue des oscillations de torsion de période T .

1° Calculer le moment d'inertie du disque. On rappelle que ce moment d'inertie est donné par la formule $J = MR^2/2$.

2° On fait varier la distance d . Tracer la courbe $T = f(d)$. En déduire quelle serait la période T_0 du pendule si l'on enlevait les masses m et m' . Constante de torsion du fil $C = 10^{-3}\text{ mN/rad}$. On prendra $\pi^2 = 10$.

3° Les masses m et m' se trouvant à une distance $d = R/2$ du centre O, on fait tourner le disque de 1 radian à partir de sa position de repos et on l'abandonne à lui-même au temps $t = 0$. On demande :

- l'équation du mouvement ;
- l'expression de la vitesse instantanée ;
- l'accélération angulaire du système lorsque l'élongation angulaire est maximale.

4° On remonte le disque le long du fil vertical dont on attache l'extrémité inférieure à un deuxième point fixe, Q, et l'on enlève les masses m et m' . Calculer :

- la période du pendule pour $OM = 0,80\text{ m}$;
- la longueur OM pour que la période soit la plus grande possible.

N.-B. — La constante de torsion d'un fil est inversement proportionnelle à sa longueur.

19. Une bille d'acier, de 2 cm de diamètre, pesant 33,33 g, fixée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable, forme un pendule, que l'on assimilera à un pendule simple long de 1 m.

1° a. La durée de 100 oscillations, de faible amplitude, déterminée avec une incertitude de 2/5 s, est 200,6 s.

Quelle est la valeur de l'intensité de la pesanteur au lieu où l'on opère ? Avec quelle précision le résultat est-il obtenu, si la longueur du pendule simple synchrone est évaluée à 1 mm près ?

b. Le même pendule oscille, dans les mêmes conditions, au-dessus d'un électro-aimant excité par un courant continu. La durée de 100 oscillations est réduite à 195,6 s. Quelle est la force attractive subie par la bille ?

c. La précision des mesures effectuées permettrait-elle d'observer une variation de la période si le pendule, soustrait à l'action de l'électro-aimant, oscillait dans l'air, puis dans le vide ?

2° On astreint le pendule à décrire un cône de révolution en tournant d'un mouvement uniforme autour de l'axe vertical passant par son point de suspension.

a. Quelle relation existe-t-il entre la vitesse linéaire v de la bille et l'angle α que fait à chaque instant avec la verticale la direction du fil ? Calculer la vitesse correspondant à la valeur $\alpha = 60^\circ$.

b. Quelle est pour α la valeur maximale possible, compatible avec une résistance à la traction du fil limitée à 1 newton ?

c. Le pendule décrivant le cône de demi-angle $\alpha = 60^\circ$, la bille se voit opposer un obstacle plastique où elle pénètre de 2 cm. Quelle est la valeur moyenne approximative de la résistance opposée à sa pénétration ?

20. A. Dans une première expérience, un pendule P de période 0,5 seconde déclenche, chaque fois qu'il passe par la verticale, l'ouverture de l'obturateur d'un appareil photographique et cet obturateur reste ouvert pendant 1/25 de seconde. Devant l'appareil photographique, une petite bille est abandonnée en chute libre t secondes avant la première ouverture de l'obturateur.

Calculer l'espace parcouru par la bille pendant la n° ouverture de l'obturateur.

Montrer que les parties de la trajectoire qui sont photographiées ont des longueurs croissant en progression arithmétique. Trouver la raison de cette progression.

B. 1° Dans une deuxième expérience, on photographie, avec le même dispositif de déclenchement par le pendule P, des parties de la trajectoire d'un point brillant, solidaire d'un autre pendule P' de période 2 secondes.

L'amplitude du mouvement du point brillant est 5 cm. Le début de la première ouverture de l'obturateur se produit à un instant où la vitesse du point brillant est nulle.

a. Assimilant la trajectoire du point brillant à une droite, dessiner, en vraie grandeur, les parties de cette trajectoire parcourues pendant la première, la deuxième et la troisième ouvertures de l'obturateur. On s'aidera pour cela de ce qu'un mouvement sinusoïdal sur une droite peut être lié à un mouvement circulaire uniforme convenable. Expliquer la méthode.

b. Trouver par le calcul les longueurs de ces parties de la trajectoire.

2° On suppose maintenant que, dans cette même deuxième expérience, le pendule P a une période de $0,5 + \varepsilon$ seconde, avec ε petit devant 0,5.

Trouver, en fonction de ε , la position du début de la quatrième partie de la trajectoire du point brillant de P' photographiée.

Application. — Trouver ε , sachant que le début de cette quatrième partie se trouve à 8,715 cm du début de la première.

21. Un pendule oscille en un même lieu, avec une période $T_0 = 2\text{ s}$ dans le vide et une période T dans un gaz G.

1° Si l'on attribue la différence des deux périodes à la seule poussée d'Archimède, montrer que $T = T_0\sqrt{1 + r}$, r étant le rapport des masses volumiques du gaz G et de la substance du pendule. Calculer T quand la densité du gaz par rapport à l'air est 0,518 et celle du pendule 1,675 par rapport à l'eau.

2° Le pendule et un pendule identique oscillent dans deux plans parallèles. Démontrer que l'intervalle de temps qui sépare deux coïncidences consécutives est inversement proportionnel à r . (Les pendules oscillent l'un dans le vide, l'autre dans un gaz G.) (r est petit par rapport à un, ce qui permet d'utiliser les formules classiques d'approximation.) Calculer cet intervalle de temps relatif aux données numériques précédentes.

3° Le gaz G est obtenu en mélangeant dans les mêmes conditions des volumes égaux de deux gaz X et Y. Sachant que le mélange G renferme en masse 6,66 % du gaz X, calculer les masses molaires approchées de X et de Y. Quelles hypothèses peut-on formuler quant à la nature des gaz X et Y ?

4° 10 cm³ du gaz G sont introduits dans un eudiomètre avec la quantité d'oxygène strictement nécessaire à la combustion complète. Après explosion et refroidissement il ne reste que 10 cm³ du gaz entièrement absorbables par la potasse. Cette expérience permet-elle de lever l'incertitude qui planait sur la nature exacte des gaz X et Y ?

O = 16, H = 1, C = 12, N = 14.

Volume molaire normal : 22,4 litres ; masse correspondante d'air : 29 grammes.

22. Un métronome est constitué par deux masses M et m qu'on supposera concentrées en deux points respectifs A et a situés sur une tige de masse négligeable, de part et d'autre d'un axe de suspension O perpendiculaire à la tige. Calculer, en fonction des masses M et m et des distances $OA = A$ et $Oa = a$:

- La distance du centre de gravité du système au point O ;
- Son moment d'inertie par rapport à O ;
- La période de ses petites oscillations ;
- Sa vitesse angulaire lors du passage par la verticale, l'élongation angulaire initiale du système abandonné sans vitesse initiale étant α ;

5° La variation relative de période du métronome pour une élévation de température égale à t , le coefficient de dilatation linéaire du métal qui le constitue étant λ .

Application numérique :

$$M = 180 \text{ g} \quad m = 20 \text{ g} \quad A = 20 \text{ cm} \quad a = 20 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{1}{10} \text{ radian} \quad g = 9,80 \text{ u. SI} \quad t = 50^\circ \quad \lambda = 10^{-5}$$

23. A. Un barreau homogène BD long de 20 cm peut osciller horizontalement par la torsion d'un fil vertical AO fixé en A et dont l'axe passe par le centre O du barreau; la durée de 10 oscillations est de 100 secondes.

On surcharge le barreau à l'aide de deux petites masses m et m' de 6,4 g chacune, placées en B et D; la durée de 10 oscillations devient 105 secondes. Calculer :

1° le moment d'inertie J du barreau par rapport à l'axe AO et la constante de torsion C du fil;

2° la vitesse angulaire du barreau (sans les surcharges) quand il passe à sa position d'équilibre au cours d'oscillations d'amplitude égale à 1 radian;

B. Le barreau a une masse de 375 g, il est maintenant suspendu par son extrémité B et peut osciller comme un pendule pesant composé. Calculer :

1° la période des petites oscillations;

2° la vitesse angulaire du barreau quand il passe à sa position d'équilibre au cours d'oscillations d'amplitude égale à 90 degrés.

On donne : $g = 9,80 \text{ u. SI}$.

On exprimera les résultats avec trois chiffres significatifs exacts.

24. 1° Le balancier d'un réveil, fait en laiton de densité 8,62, a la forme d'un anneau dont le rayon moyen vaut 12 mm et dont la section méridienne est un rectangle de 1 mm (dans le sens radial) sur 2 mm (dans le sens axial). Il peut tourner autour d'un pivot qui coïncide avec son axe géométrique. Calculer son moment d'inertie par rapport à cet axe. (On supposera que toute la masse est concentrée à une même distance de l'axe égale au rayon moyen, et que les parties du balancier autres que l'anneau (pivot, bras, etc.) n'apportent aucune contribution au moment d'inertie.)

On associe au balancier un ressort spiral qui exerce un couple de $1,16 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{N}$ pour une rotation de 1 radian. Calculer la période des oscillations du système balancier-spiral.

2° Le couple de rappel diminue de 3×10^{-4} en valeur relative par degré d'élévation de température, et le coefficient de dilatation linéaire du laiton est de 2×10^{-5} . Calculer la variation relative de période pour un degré d'élévation de température : correspond-elle à une avance ou à un retard, et à combien se monte l'avance ou le retard au bout d'un jour ?

3° Par suite d'une imperfection de construction, le centre de gravité de l'anneau, au lieu d'être sur l'axe de rotation, en est éloigné de 0,02 mm. Quelle serait la période des oscillations du balancier autour de l'axe supposé horizontal, le spiral étant enlevé ?

Le spiral étant remis en place, calculer la variation de période produite par le défaut de position du centre de gravité, suivant que, dans la position d'équilibre du balancier (c'est-à-dire celle où la tension du spiral est nulle, l'axe étant toujours horizontal), son centre de gravité est au-dessus de l'axe, au-dessous ou au même niveau à droite ou à gauche.

On prendra : $g \approx 10 \text{ u. SI}$.

25. Un parachutiste se lance d'un ballon. Le parachute est complètement ouvert au bout d'une chute de 80 m. En supposant la résistance de l'air sur l'homme et sur le parachute négligeable pendant cette chute, calculer sa durée et la vitesse acquise.

Le parachute est construit de façon que la vitesse limite de descente soit 4 m/s. Sachant que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse, calculer l'accélération du parachutiste au moment où le parachute vient de s'ouvrir.

Calculer la force que le parachute exerce sur l'homme à ce moment.

Masse de l'homme : 89 kg; du parachute : 10 kg.
Accélération de la pesanteur : $9,8 \text{ m/s}^2$.

26. 1° Un corps A de masse 70 kg, de dimensions négligeables, est relié par un câble C à un parachute B pesant 20 kg. La résistance que l'air oppose au mouvement de B est de la forme $R = kSV^2$ (V est la vitesse de B; S , sa surface; a , la masse volumique de l'air dans les conditions de l'expérience; k , un coefficient dépendant de la forme du corps).

Sachant que la vitesse limite du système ABC tombant verticalement dans l'air est de 3 m par seconde, que la surface S du parachute est de 90 m², et que la masse du litre d'air est de 1,3 g, calculer la valeur de k dans le système SI.

2° A une altitude suffisante, on abandonne le système ABC sans vitesse initiale. Il tombe d'abord pendant 50 m sans que le parachute fonctionne, et de ce fait la résistance de l'air, pendant cette première phase, peut être considérée comme nulle. Ensuite, en 0,6 seconde, le parachute s'ouvre progressivement, et au bout de ce temps la vitesse limite se trouve pratiquement atteinte. Quelle est, pendant cette seconde phase, l'accélération moyenne du système, c'est-à-dire l'accélération qu'il aurait si la même modification de vitesse était obtenue par un mouvement uniformément varié ?

3° Quel effort le câble C doit-il pouvoir supporter pour ne pas se rompre pendant l'ouverture du parachute, si on suppose l'accélération du système égale à celle qui vient d'être calculée ?

On prendra $g \approx 10 \text{ u. SI}$.

27. Un parachute lesté, dont la projection horizontale a pour surface $S = 37,5 \text{ m}^2$, est abandonné sans vitesse initiale dans un air calme à une hauteur de 300 m au-dessus du sol. Sa masse totale est de 75 kg.

1° En supposant que le parachute s'ouvre 1 seconde après avoir été lâché, analyser son mouvement. Calculer la vitesse limite qu'il atteint. Tracer à l'échelle la courbe de sa vitesse v en fonction du temps (compté depuis le départ).

2° En supposant que le parachute s'ouvre plus vite (0,4 seconde après avoir été abandonné), tracer à l'échelle la nouvelle courbe de la vitesse en fonction du temps. La comparer à la première.

3° Entre les deux cas différents étudiés, n'existe-t-il pas un cas limite ? Calculer le temps θ au bout duquel le parachute devrait s'ouvrir pour que ce cas limite soit réalisé. Tracer la courbe correspondante.

Données : $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

S étant la surface de la projection horizontale du parachute mesurée en m², V sa vitesse mesurée en m/s, la résistance que l'air exerce sur lui a pour valeur : R (en N) $\approx 0,8 \text{ SV}^2$.

28. Pour construire un parachute, on admet que la résistance de l'air R est donnée, en fonction de la vitesse V et de la surface de base S de l'appareil déployé, par la formule :

$$R = KSV^2$$

En prenant comme unités le mètre, le newton et la seconde, on a : $K = 1,23$ lorsque l'air est à la pression atmosphérique normale (76 cm de mercure) et à 15° C. Pour des conditions différentes, on admet que K est proportionnel à la masse volumique de l'air.

1° Déterminer quelle doit être la surface S pour que le parachute prenne une vitesse limite de 3,50 m/s dans l'air à 15° C et sous la pression normale, le poids total (homme et appareil) étant de 950 N.

2° Le parachute ne s'ouvre qu'après une descente en chute libre de 30 m, pendant laquelle il ne subit de la part de l'air qu'une résistance négligeable. Le temps de l'ouverture est de 1,5 seconde et pendant ce temps l'accélération négative de l'appareil peut être regardée comme constante. Déterminer la tension du câble supportant la charge.

3° Calculer l'influence sur la vitesse limite d'une variation de pression de 1 mm de mercure et d'une variation de température de 1°, en supposant que l'air suive les lois des gaz parfaits.

On donne $g = 9,80 \text{ m/s}^2$.

ÉNERGÉTIQUE

29. La résistance que l'air oppose au mouvement d'une sphère est donnée par la formule $F = 0,85 R^2 V^2$, les unités étant le newton, le mètre et la seconde; R est le rayon et V la vitesse.

1° Calculer dans le système SI le coefficient k de la formule de la résistance de l'air pour une sphère $F = k \cdot SV^2$, S étant la surface d'un grand cercle et V la vitesse.

2° Calculer la vitesse limite d'une sphère d'aluminium de 2 cm de diamètre tombant dans l'air (densité de l'aluminium : 2,6).

3° Quelle serait la vitesse limite d'une sphère en fer de même diamètre (densité du fer : 7,8) ?

4° De quelle hauteur devrait tomber dans le vide la sphère d'aluminium pour acquérir une vitesse égale à la vitesse limite précédente ?

5° La sphère d'aluminium a été abandonnée dans l'air sans vitesse à 100 m de hauteur. Indiquer : a. les diverses formes d'énergie qui entrent en jeu dans cette chute; b. leurs transformations mutuelles, qualitativement et quantitativement.

On suppose que la sphère ne pénètre pas dans le sol et qu'elle ne rebondit pas.

$g = 9,8$ u. SI.

L'équivalent mécanique de la calorie vaut 4,2 joules.

30. Un ascenseur est constitué par une cabine pesant à vide 800 kg, soutenue par un câble qui passe sans glissement sur une poulie dont on négligera la masse; la poulie est mobile autour d'un axe horizontal, et l'autre extrémité du câble porte un contrepoids de 900 kg.

La cabine, dans laquelle est placée une charge de 400 kg, effectue en 8 secondes une ascension de 9 m. L'action du dispositif moteur est réglée de telle sorte que le mouvement est uniformément accéléré pendant une demi-seconde (le système partant du repos), puis uniforme pendant 7 secondes, enfin uniformément retardé pendant une demi-seconde pour arriver progressivement à l'arrêt de l'appareil.

1° Trouver l'accélération réalisée pendant la première phase du mouvement, et la vitesse réalisée pendant la deuxième.

2° Dire quelle est, pendant chacune des trois phases de l'ascension, la tension de la portion du câble qui soutient la cabine.

3° En supposant négligeables les pertes d'énergie par frottement et résistances passives pendant les deux premières phases, trouver les valeurs des énergies respectivement consommées.

Déterminer l'énergie totale absorbée pendant la troisième phase par les freins déterminant l'arrêt.

On donne $g = 9,80$ u. SI.

31. Un pendule composé est formé d'une tige, de masse négligeable, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal O qui lui est perpendiculaire, et sur laquelle sont fixées, de part et d'autre de O , des masses m et $M = 3m$, de dimensions négligeables, à des distances $Om = 2d$ et $OM = 3d$.

1° Calculer la période des petites oscillations de ce pendule pesant.

On donne $d = 10$ cm; accélération de la pesanteur $g = 9,8$ m/s².

2° On écarte ce pendule de 60° de sa position d'équilibre. Calculer la variation d'énergie potentielle pour ce déplacement dans le cas où $m = 20$ g.

3° Le pendule est abandonné à lui-même à partir de la position précédente. Quelle est la vitesse linéaire de la masse M quand elle passe par sa position d'équilibre ?

4° On remplace les deux masses précédentes m et M par une masse unique M' , placée sur la tige à une distance x de l'axe. Calculer cette distance pour que le pendule, écarté de 60° de sa position d'équilibre, passe par la verticale avec la même vitesse angulaire que le pendule précédent.

Quelle valeur doit avoir M' pour que l'énergie cinétique, à cet instant, soit aussi la même que celle du pendule précédent lorsqu'il passe par la position d'équilibre ?

32. Une masse de 800 grammes est suspendue à un point fixe par un fil de masse négligeable, formant ainsi un système que l'on peut assimiler à un pendule simple. On fait osciller la masse en l'écartant de 20 cm de sa position d'équilibre. On compte exactement 15 oscillations en une minute. On demande :

1° la longueur du pendule;

2° la loi du mouvement de la masse; les abscisses seront mesurées en centimètres à partir de la position d'équilibre; les temps seront comptés en seconde à partir d'un passage par la position d'équilibre;

3° la vitesse linéaire maximale de la masse;

4° l'énergie cinétique de cette masse, en joule, au temps 12 secondes; on suppose que l'amplitude a conservé la même valeur qu'au départ; l'origine des temps est la même qu'au 2°;

5° l'énergie potentielle de la masse pour l'un des points de vitesse nulle; on admettra que l'énergie potentielle est nulle au point le plus bas de la trajectoire;

6° l'altitude des points extrêmes de la trajectoire, par rapport au point le plus bas.

Les résultats devront être donnés avec trois chiffres significatifs. $g = 9,81$ u. SI.

33. Une sphère de masse $M = 1$ kg, de dimensions négligeables, est fixée à l'extrémité d'une tige T , de masse négligeable, articulée à sa partie supérieure sur un axe vertical A , auquel on imprime un mouvement de rotation uniforme.

1° Calculer la vitesse de rotation du système autour de l'axe A , quand la tige fait avec A un angle de 30°.

2° Calculer l'énergie cinétique de la masse M .

3° Calculer l'énergie totale qu'il a fallu fournir au système partant du repos pour lui communiquer son mouvement.

Longueur de la tige T : $l = 1$ m. Intensité de la pesanteur : $g = 10$ u. SI.

34. Une poulie mobile, autour d'un axe horizontal possède deux gorges dont les rayons valent respectivement 30 cm et 12 cm.

Un fil enroulé sur la grande gorge supporte une masse de 5 kg. Un autre fil enroulé sur la petite supporte une masse de 20 kg.

Les enroulements sont tels que les mouvements des deux masses s'effectuent en sens inverses.

Le moment d'inertie de la poulie est le même que si deux masses de 2 kg et de 1 kg étaient régulièrement réparties sur les gorges de rayons respectifs 30 cm et 12 cm.

L'intensité de la pesanteur est 9,8 u. SI.

1° Le système est abandonné sans vitesse. Quelle est son énergie cinétique lorsque la masse de 5 kg a une vitesse de 1 mètre par seconde.

2° Quelles sont alors la distance parcourue par cette masse, l'accélération du mouvement et la durée du trajet précédent ?

3° Quelles sont les tensions des fils pendant le mouvement ? Permettent-elles d'expliquer le mouvement de la poulie ?

35. Un volant, dont on supposera toute la masse répartie sur la circonférence extérieure, a pour rayon 2 m et pèse 1 tonne. Il fait 5 tours par seconde.

1° Calculer l'énergie qu'il a fallu lui fournir pour lui communiquer cette vitesse de rotation.

2° On arrête brusquement le volant au moyen d'un frein. Quelle est la quantité de chaleur dégagée sur le frein ?

3° La machine à laquelle est attelée le volant ayant eu à surmonter une résistance, la vitesse de rotation est diminuée de 1/5 de sa valeur. Quelle quantité d'énergie a fourni le volant ?

Si l'effort demandé à la machine a duré 10 secondes, quelle puissance supplémentaire aurait dû fournir le moteur pour vaincre la résistance ?

36. A. Un volant, dont on supposera toute la masse 7 kg concentrée sur une circonférence de diamètre $D = 50$ cm, a pour axe un cylindre de diamètre $d = 25$ mm disposé horizontalement et reposant sur des roulements à billes. En un point A de l'arbre, on attache un fil F de masse négligeable qu'on enroule autour de lui, et l'on suspend à l'extrémité du fil une masse m de 28 kg que l'on abandonne sans vitesse initiale.

- 1° Quelle est l'accélération du mouvement de m ?
 2° Quelle est la loi de variation de la vitesse angulaire du volant :

a. en fonction du temps ?

b. en fonction de la hauteur h de la masse m ?

B. Le volant est maintenant suspendu par deux fils enroulés autour de son arbre auquel ils sont fixés. On abandonne le volant à lui-même à partir du repos.

1° Quelle est l'énergie cinétique de rotation du volant quand il est descendu de 5 m ?

2° Quelle est, à ce moment, sa vitesse angulaire, en radian par seconde et en tour par seconde ?

3° Quelle est, à ce moment, la vitesse d'un point de la circonférence de diamètre D ?

4° Quel est le nombre de tours effectués depuis le début de la chute ?

5° Quel est le rapport entre l'énergie de translation et l'énergie de rotation ?

37. Un volant en fonte, de densité 7,8, peut être assimilé à un tore de section carrée, de côté 10 cm.

Les diamètres intérieur et extérieur sont, respectivement, 140 et 160 cm. On supposera toute la masse concentrée sur la circonférence moyenne.

1° Le volant étant immobile, on lui applique un couple constant qui lui communique, en une minute, la vitesse de 300 tours par minute qui demeure ensuite constante.

Quelle serait la valeur de ce couple si les frottements étaient négligeables ?

Quelle force faudrait-il appliquer tangentiellement au volant pour obtenir le même résultat ?

Calculer l'énergie acquise par le volant.

2° Lorsque le mouvement de rotation est devenu uniforme, on supprime le couple. Admettant que la quantité de chaleur dégagée par les frottements est, à chaque tour, de 48,7 calories, au bout de combien de temps l'arrêt se produira-t-il ?

3° On relance le volant dans les mêmes conditions qu'au début. Quand la vitesse de régime est atteinte on supprime le couple et on freine brusquement jusqu'à l'arrêt. Quelle sera la quantité de chaleur dégagée sous le frein ?

On jette sur celui-ci de l'eau à la température de 15° C en quantité telle que sa température atteigne 100° C : quelle sera la masse d'eau vaporisée ?

Quel travail pourrait-on produire si cette masse d'eau était vaporisée à l'intérieur d'un cylindre muni d'un piston sur lequel s'exercerait la pression atmosphérique normale ?

On prendra :

$\pi = 3,14$; $g = 9,8$ u. SI; $J = 4,2$ joules/cal
 Densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air : 0,63.
 Masse du litre d'air dans les conditions normales : 1,3 g.
 Chaleur latente de vaporisation de l'eau à 100° C : 540 kcal/kg.
 Densité du mercure : 13,6.

38. Un train (locomotive et wagons) pèse 500 tonnes. La résistance à l'avancement sur voie horizontale est évaluée à 80 newtons par tonne.

1° Au démarrage, la locomotive développe une force de traction constante de 8×10^4 N. Calculer :

a. l'accélération du train sur voie horizontale ;

b. le temps au bout duquel le train atteindra la vitesse de 72 km/h ;

c. la distance parcourue par le train pour atteindre cette vitesse.

2° Le train roulant à la vitesse de 72 km/h, on supprime la force motrice et on fait fonctionner les freins. Évaluer la quantité de chaleur dégagée dans les freins jusqu'à l'arrêt total du train.

39. Un train dont la masse totale, locomotive comprise, est de 300 tonnes, parcourt un trajet horizontal, à la vitesse de 90 km/h. La résistance due au roulement et à l'air est 25 000 newtons.

1° Quelle est la puissance développée par la locomotive ?

2° On supprime l'arrivée de la vapeur dans les cylindres à un moment donné ; calculer la longueur du parcours depuis ce

moment jusqu'à l'arrêt complet du train. On supposera que la résistance totale ne varie pas.

3° On veut arrêter le train sur une distance de 300 m, à partir du moment où l'on coupe la vapeur. Calculer la force de freinage, en newtons par tonne, en supposant que toutes les données précédentes subsistent.

4° Le train aborde une rampe de $\frac{1}{1000}$ à la vitesse de 90 km/h. Calculer la puissance que devra déployer la locomotive pour conserver la même vitesse.

40. Un train électrique se compose de deux motrices de 40 tonnes chacune et de deux remorques de 30 tonnes chacune. Chaque motrice comporte deux moteurs alimentés sous 550 V chacun (courant continu).

1° En palier, le train part d'une gare. Chaque moteur absorbe 250 A, et 85 % de l'énergie électrique sont transformés en énergie cinétique ; quelle sera, au bout de 30 secondes, la vitesse v du train (en km/h) ?

2° Au bout de ces 30 secondes, le courant est coupé. Le train aborde une courbe circulaire de 200 m de rayon avec une vitesse constante égale à la vitesse v trouvée au 1° ; de combien faut-il relever le rail extérieur pour qu'il ne subisse aucune poussée vers l'extérieur ?

3° A la sortie de la courbe, le train monte une rampe de 3 cm par mètre (suivant la pente). Le courant est rétabli de façon que la vitesse reste toujours égale à v . Calculer la nouvelle intensité du courant dans chaque moteur.

41. On communique à une voiture pesant 6 tonnes et partant du repos sur une voie horizontale une vitesse de 45 km à l'heure sous l'action d'une force motrice constante ; les diverses résistances passives qui agissent sur le véhicule équivalent à une force de 250 newtons et on admettra que ces résistances sont indépendantes de la vitesse.

1° Calculer la force motrice en supposant que la vitesse donnée est acquise en une minute.

2° Calculer le travail fourni au véhicule pendant cette période de démarrage.

3° On règle ensuite la force motrice de façon à maintenir constante cette vitesse de 45 km à l'heure. Quelle est alors la puissance fournie par le moteur ?

4° A un moment donné, la voiture aborde une pente de 1 cm par mètre et on supprime la force motrice. Quels sont le mouvement pris par la voiture et le chemin parcouru par elle sur la rampe avant de s'arrêter ?

5° Si on arrête brusquement la voiture, au moyen d'un frein, après un parcours de 100 m sur la pente, quel serait le travail absorbé par le frein ainsi que la chaleur dégagée ?

On prendra $g \approx 10$ u. SI et $j = 4,2$ joules/calorie.

42. Un tramway pesant 10 tonnes est actionné par un moteur électrique de résistance 1 ohm, mis en série avec un rhéostat de résistance variable. La tension continue de la ligne est de 500 volts.

1° Le tramway se déplace horizontalement. En régime permanent, le moteur est traversé par un courant de 20 ampères, la résistance du rhéostat étant alors de 9 ohms.

a. Quelle est, en kilowatt, la puissance électrique consommée ?

b. Quelle est, en kilocalorie, la chaleur dégagée par le moteur et le rhéostat pendant une seconde ?

c. Quelle est, en kilowatt, la puissance mécanique développée par le moteur ?

On supposera que l'énergie électrique est entièrement transformée en énergie calorifique par effet Joule et en énergie mécanique par le moteur.

2° En régime permanent, pour se déplacer horizontalement, le tramway doit vaincre une force constante qui vaut 0,03 fois son poids. En supposant que l'énergie mécanique fournie par le moteur est entièrement utilisée à la traction du tramway, calculer la vitesse de régime du tramway exprimée en kilomètre à l'heure.

Les roues étant ensuite bloquées, le tramway doit vaincre une force égale au dixième de son poids. Déterminer :

a. au bout de combien de temps le tramway s'arrêtera et le chemin parcouru jusqu'à l'arrêt ;

b. l'intensité du courant qui traverse le moteur si le courant n'est pas coupé.

43. Une automobile avec son conducteur a une masse de 1 000 kilogrammes. Pour simplifier, on admettra dans tout le problème que la somme de toutes les forces de frottement est constante, parallèle au déplacement et égale à 150 newtons.

1° Calculer la puissance que doit développer le moteur de cette automobile pour maintenir une vitesse de 72 kilomètres à l'heure sur une route horizontale.

2° A cette vitesse de 72 kilomètres à l'heure cette voiture aborde une courbe horizontale de 200 mètres de rayon. De quel angle doit être relevée la route pour qu'il n'y ait aucune force tendant à faire dériver ce véhicule ?

3° L'automobile monte une pente de 2%. Calculer la nouvelle puissance pour maintenir la même vitesse de 72 kilomètres à l'heure.

4° Au cours de cette montée, la voiture roulant à 72 kilomètres à l'heure, le chauffeur débraye (force motrice nulle). A quelle distance du point où a commencé le débrayage la voiture s'arrête-t-elle ?

5° Au cours de cette même montée et la voiture roulant toujours à 72 kilomètres à l'heure, le chauffeur débraye et freine en même temps. La voiture s'arrête après avoir parcouru le dixième de la distance trouvée ci-dessus. Calculer la force résistante due au freinage et le dégagement de chaleur qui en résulte.

44. Un volant en fonte de 2,02 m de diamètre extérieur est entraîné par un moteur qui, en régime normal, lui donne une vitesse constante de 300 tours par minute autour d'un axe horizontal situé à 1,50 m du sol. Toute la matière peut être considérée comme répartie sur une jante homogène de 10 cm de largeur comptée parallèlement à l'axe et de 2 cm d'épaisseur. (Masse volumique de la fonte : 7 700 kg/m³.)

1° Quelle est la vitesse angulaire du volant et son moment d'inertie par rapport à l'axe ? (Bien spécifier les unités employées.) Quelle est la variation relative de vitesse quand on demande un excès de travail de 1000 joules ?

2° A la suite d'une rupture, un fragment de fonte de 100 g se détache, alors qu'il se trouve à l'extrémité supérieure du diamètre vertical. A quelles forces est-il soumis à l'instant qui précède l'arrachage ? Quelles sont sa vitesse à ce moment et son énergie cinétique ?

3° En quel point du sol ira-t-il tomber s'il ne rencontre pas d'obstacle ? Quelle sera sa vitesse à l'arrivée et son énergie cinétique à ce moment (la résistance de l'air est négligeable) ?

4° Aussitôt après l'accident le volant est freiné par un couple constant et s'arrête après avoir tourné 50 tours. On demande le travail effectué par le frein ainsi que le couple de freinage.

45. 1° Un skieur part sans vitesse initiale d'un point A et descend une pente régulière AB de 10%, longue de 200 m. Quelle serait sa vitesse v en B si tous les frottements étaient négligeables ? ($g = 10$ u. SI.)

2° Animé de cette vitesse v , le skieur aborde une montée régulière BC de 5%. En supposant encore les frottements négligeables, quelle distance pourrait-il parcourir sur cette montée en profitant simplement de la vitesse qu'il possédait en B ? Quelle serait la durée de cette montée ?

3° Écrire l'équation qui permet de calculer le temps t , compté à partir du passage en B, au bout duquel le skieur, dans les mêmes conditions, aurait parcouru une distance e sur BC. Discuter cette équation. Application numérique : $e = 144$ m.

4° Les frottements n'étant pas négligeables, le skieur parti de A possède en réalité, en arrivant en B, une vitesse de 16 m/s. Calculez l'énergie qui a été absorbée par les divers frottements au cours de la descente. (Masse totale du skieur : 80 kg.)

5° Pour remonter BA, le skieur s'attache par un câble à un remonte-pente. Son mouvement, d'abord uniformément accéléré avec une accélération $\gamma = 0,5$ m/s², devient rapidement uniformes. Calculer la traction exercée par le câble sur le skieur pendant les deux phases de la montée. Pendant la deuxième phase, cette traction dépend-elle de la vitesse ?

46. 1° On accroche à un fil inextensible, de masse négligeable, une petite sphère S. En supposant ponctuelle la masse de S, quelle longueur l (à 1 mm près) doit-on donner au fil pour que le pendule ainsi constitué ait une période T de 2 secondes, pour des oscillations de très petite amplitude, en un lieu où g a pour valeur 9,8 u. SI ?

2° Quelle est la variation de g qui produirait, pour ce pendule, une modification de la période telle que l'on aurait deux oscillations complètes de plus par heure ? Quelle est la variation de longueur qui, pour la nouvelle valeur de g , redonnerait au pendule la période primitive de 2 secondes ? On désignera par ΔT , Δg , Δl les variations considérées.

3° Ce pendule étant écarté par rapport à la verticale d'un angle $\alpha = 45$ degrés, on l'abandonne sans vitesse initiale. Quelle est la vitesse de S à l'instant du passage à la position d'équilibre ? La masse M de S étant de 100 g, quelle est, à cet instant, son énergie cinétique ? On prendra pour g la valeur 9,8 u. SI et pour longueur la longueur l .

47. Un point matériel de masse $m = 100$ grammes exécute

un mouvement rectiligne sous l'action d'une force $\vec{f}$ qui l'attire vers un point fixe O de sa trajectoire et dont l'intensité est proportionnelle à la distance OM. Quand le mobile est à 1 cm du point O, la force $\vec{f}$ a une intensité de 0,05 newton.

1° Déterminer la période du mouvement sinusoïdal ainsi produit.

2° On prendra comme origine des abscisses le point O. A la date zéro le mobile est en O animé d'une vitesse de 30 cm/s dans un sens que l'on adoptera comme sens positif sur la trajectoire. Écrire les équations qui donnent en fonction du temps

l'abscisse x du mobile, sa vitesse v , son accélération γ et la mesure algébrique de la force f .

3° Calculer à quelle date le mobile passe par la première fois par le point d'abscisse $x = -3$ cm en se mouvant dans le sens positif. Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle que possède le système à cette date en admettant que l'énergie mécanique totale se conserve.

4° De combien diminueraient l'amplitude et l'énergie mécanique totale si la vitesse maximale venait à diminuer de $\frac{1}{100}$ de sa valeur.

48. L'extrémité supérieure d'un ressort à boudin est fixée à un point A ; à son extrémité inférieure on suspend deux masses M et m . L'étude de ce ressort montre qu'il subit des allongements proportionnels aux forces agissantes, le coefficient de proportionnalité étant k .

1° Quelle est la valeur de l'abscisse x de l'extrémité du ressort lorsqu'il est en équilibre sous l'action des masses $M + m$? On prend comme origine des abscisses la position de l'extrémité du ressort lorsqu'il n'est pas tendu, le sens positif étant de haut en bas.

On tire sur les masses en provoquant un allongement supplémentaire a et on abandonne le système à lui-même. Quelle est la nature du mouvement pris par l'extrémité libre du ressort en l'absence de tout frottement ? Établir la formule qui en donne la période ; donner l'équation horaire du mouvement en prenant comme origine des espaces le point correspondant à la position d'équilibre et comme origine des temps le moment où l'on abandonne le système à lui-même. Calculer la valeur de l'énergie cinétique du système lorsqu'il passe par sa position d'équilibre et la valeur de l'énergie potentielle lorsqu'il passe par la position d'élongation maximale.

2° La masse m se décroche lorsqu'elle est à sa position la plus basse. Donner la nouvelle position d'équilibre, l'équation horaire du mouvement en prenant comme origine des temps l'instant où la masse s'est décrochée et comme origine des espaces la nouvelle position d'équilibre. Comparer l'énergie cinétique à celle qui a été trouvée dans la question précédente et montrer que la différence est égale à la variation d'énergie potentielle correspondant aux deux positions d'élongation maximale.

49. 1° On place sur le plateau d'un dynamomètre une charge de $M = 1\,000\text{ g}$; en admettant que les allongements soient proportionnels aux charges, montrer qu'en tirant légèrement sur le ressort dans le sens vertical, puis en l'abandonnant, la charge M effectue des oscillations sinusoïdales de période T . Calculer T si l'allongement au repos est de 5 cm .

2° On place sur le plateau une surcharge m qui modifie la période de 1% ; déterminer m .

3° M étant au repos, on amène la surcharge m juste à son contact, puis on l'abandonne sans vitesse initiale. Quel est l'effort maximal supporté par le ressort du dynamomètre au cours des oscillations consécutives à cette opération?

4° La charge M étant à nouveau au repos, on lâche sur elle d'une hauteur $h = 10\text{ cm}$ la masse m ; celle-ci rebondit à une hauteur $h/5$ et l'effort maximal supporté par le ressort au cours des oscillations consécutives au choc est de 11 newtons . Quelle est la quantité de chaleur dégagée au moment du choc? Quelle serait la valeur de l'effort maximal supporté par le ressort pour un échauffement nul?

5° Les déformations des constructions métalliques (charpentes, ponts, etc.) pouvant être considérées comme élastiques, quelles réflexions vous suggèrent les résultats précédents?

50. 1° En face du balancier d'une horloge battant la seconde, on fait osciller un pendule simple P , de période plus faible et qui porte à sa partie inférieure une petite masse égale à 50 g . On constate qu'entre deux passages simultanés par la verticale, dans le même sens, il s'écoule 180 secondes .

Calculer la période et la longueur du pendule.

L'intensité de la pesanteur est prise égale à $9,81\text{ u. SI}$.

2° Le pendule étant au repos, on l'écarte de sa position d'équilibre d'un angle égal à un cinquième de radian puis on l'abandonne sans vitesse initiale. Calculer la vitesse de l'extrémité du pendule quand il repasse par sa position d'équilibre.

3° Le pendule continuant à osciller, les oscillations s'amortissent lentement par suite des frottements. Au bout de 100 oscillations complètes, l'amplitude est diminuée d'un tiers.

Calculer, en joule et par période, la valeur moyenne du travail de frottement.

4° Calculer la quantité de chaleur dissipée dans le milieu ambiant depuis le départ du pendule jusqu'au moment où il est devenu complètement immobile et a repris sa température initiale.

51. Une balle pesant 100 g est lancée verticalement de bas en haut, sans rotation, avec une vitesse initiale de 20 m/s . L'accélération de la pesanteur vaut $g = 10\text{ m/s}^2$.

1° Calculer : a. la hauteur maximale que peut atteindre la balle;

b. le temps qu'elle met pour parvenir à cette hauteur maximale;

c. l'énergie mécanique de cette balle.

2° Quand la balle retombe sur le sol, elle rebondit instantanément en perdant la moitié de l'énergie qu'elle possédait avant le choc.

a. Quelle est, en calories, la quantité de chaleur dégagée pendant le choc? (L'équivalent mécanique de la calorie est $4,18\text{ joules}$.)

b. A quelle hauteur la balle peut-elle remonter après le choc?

3° Sachant que la balle perd ainsi la moitié de son énergie chaque fois qu'elle rebondit, déterminer la suite des valeurs successives de la hauteur maximale atteinte par la balle après chaque rebondissement.

4° Montrer qu'au bout d'un temps fini t la balle s'immobilise rigoureusement. Calculer ce temps t .

52. Une sphère pesant 10 kg , formée d'une substance dont la chaleur massique est égale à $0,1\text{ cal/(g}\cdot^\circ\text{C)}$ est lâchée sans vitesse à une hauteur de $19,6\text{ m}$ au-dessus d'un plan horizontal P . Elle vient frapper ce plan et rebondit à une hauteur n fois plus faible que celle de sa position initiale. On admet que le plan P demeure immobile et ne s'échauffe pas au moment du choc.

Calculer l'énergie cinétique acquise par la sphère lorsqu'elle atteint le plan P .

La sphère s'échauffe par suite du choc. L'élévation de température dépend-elle de sa masse? Exprimer cette élévation de température en fonction de n . De quoi dépend la valeur de n ? Calculer la valeur maximale de l'élévation de température et la valeur correspondant à $n = 9$.

Accélération de la pesanteur : $g = 9,81\text{ u. SI}$.

53. Un pendule, qui peut être considéré comme simple, est constitué par une sphère métallique de rayon $r = 1\text{ cm}$ suspendue à un point fixe O par un fil très fin de longueur L .

sa période est $T = \frac{2\pi}{3}\text{ s}$ pour une faible amplitude, en un lieu où l'intensité de la pesanteur est g .

1° Par une impulsion convenable, on le fait tourner avec une vitesse constante autour de l'axe vertical passant par son point d'attache O , le fil décrivant une surface conique dont l'angle générateur $\alpha = 60^\circ$. Calculer le nombre de tours par minute.

2° Pour maintenir constant ce nombre de tours, quelle puissance faut-il développer afin de vaincre la résistance de l'air s'exerçant sur la sphère qui est de la forme $R = 0,3\text{ SV}^2$?

3° A un certain moment le fil se rompt. Déterminer la position de la sphère dans le plan vertical passant par le vecteur vitesse au moment de la rupture du fil, lorsque la sphère se trouve à une distance verticale $2L$ du point d'attache O , en supposant que le mouvement est le même que s'il s'effectuait dans le vide.

4° Si à cette distance la sphère rencontre un plan horizontal, et si au moment du choc toute son énergie cinétique était transformée en chaleur et servait uniquement à l'échauffer, quelle serait son élévation de température?

Intensité de la pesanteur : $g = 9,8\text{ u. SI}$.

$J = 4,2\text{ joules par calorie}$.

Chaleur massique du métal constituant la sphère :

$0,1\text{ cal/(g}\cdot^\circ\text{C)}$

54. 1° Un wagon de 20 tonnes est lâché sans vitesse initiale sur une voie dont la pente est 2% . En négligeant les frottements et la résistance de l'air, écrire l'équation du mouvement du wagon le long de la voie. Calculer, en kilomètres à l'heure, la vitesse acquise à 500 mètres du point de départ.

2° Le wagon ayant ainsi parcouru 500 mètres , les freins sont serrés; leur action équivaut à une force opposée au vecteur vitesse et égale au $1/10$ du poids du wagon.

Quel est, à partir de cet instant, le chemin parcouru par le wagon jusqu'à l'arrêt complet?

Quel est le dégagement de chaleur qui résulte du freinage?

3° Une masse ponctuelle est suspendue par un fil au toit du wagon. On admet que, dans chaque phase du mouvement, cette masse atteint une position d'équilibre et que le pendule ainsi formé est immobile par rapport aux parois du wagon.

Calculer, en degrés et minutes, l'angle que fait le fil avec la verticale dans les phases 1 et 2 du mouvement.

N.-B. — On suppose connues du candidat les valeurs numériques des constantes usuelles.

55. Un marteau-pilon de 5 tonnes est soulevé par un piston de 25 cm de diamètre mobile dans un cylindre à axe vertical. La partie supérieure du cylindre est ouverte à l'air libre; dans la partie inférieure on fait arriver de la vapeur à une pression déterminée. On demande :

1° Quelle doit être la valeur de cette pression pour que le marteau-pilon soit soulevé;

2° Quelle est l'énergie du coup de marteau qui correspond à une course du piston égale à $1,50\text{ m}$, sachant qu'une fois le piston au sommet de sa course on met la partie inférieure du cylindre en communication avec un condenseur où la pression est de $1/10$ d'atmosphère;

3° Quelle est la vitesse du marteau au moment du choc, les frottements étant supposés négligeables;

4° Quelle est la quantité de chaleur libérée chaque fois au moment du choc?

(Une atmosphère $\approx 10^5\text{ Pa}$.)

56. 1° Un pendule simple, de longueur l , est écarté de sa position d'équilibre d'un angle α_m . Calculer la vitesse v de ce pendule quand il passe par sa position d'équilibre.

2° Calculer le rapport entre la tension du fil quand le pendule passe par la position d'équilibre (poids apparent du pendule) et son poids réel.

Application numérique pour ces 2 questions :

$$l = 2,45 \text{ m}; \alpha_m = 60^\circ; g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

3° Lorsque l'angle α_m est assez petit pour qu'on puisse appliquer la formule d'approximation :

$$\cos \alpha_m \approx 1 - \frac{\alpha_m^2}{2}$$

et confondre l'arc s_m avec un segment de droite horizontale, exprimer v en fonction de s_m .

Application numérique :

$$l = 2,45 \text{ m}; s_m = 20 \text{ cm}; g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

4° Pour mesurer la vitesse V d'un projectile de masse m , on réalise l'expérience suivante :

Le projectile est tiré horizontalement sur un gros pendule, de masse M (le fil est assez long pour que le pendule puisse être considéré comme un pendule simple de longueur l). Le projectile vient s'incruster dans la masse du pendule, dont le centre de gravité s'écarte de sa position d'équilibre, après le choc, d'une distance d (sensiblement horizontale).

En appliquant le théorème de la conservation de la quantité de mouvement, calculer V en fonction de M, m, d, l .

Application numérique :

$$M = 18 \text{ kg}; m = 12 \text{ g}; l = 2,45 \text{ m}; d = 20 \text{ cm}; g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

5° Dans l'expérience précédente, calculer la perte d'énergie cinétique de l'ensemble projectile-pendule, à la suite du choc. Qu'est devenue l'énergie ainsi disparue ?

57. Sur la gorge d'une poulie, de masse négligeable, mobile sans frottements autour d'un axe horizontal, passe un fil fin inextensible et de masse négligeable, dont les extrémités supportent deux corps, A et B, de masses M_A et M_B .

1° Dans une première expérience, les deux brins de fil sont verticaux; $M_A = 0,539$ kilogramme et $M_B = 0,441$ kilogramme. Calculer :

a. l'accélération du système ;

b. l'espace parcouru par chaque corps; la vitesse et l'énergie cinétique de chaque corps, 3 secondes après avoir abandonné le système à lui-même.

2° Dans une deuxième expérience, le brin de fil supportant B est parallèle à la ligne de plus grande pente d'un plan incliné (sur lequel B peut glisser sans frottements) formant un angle de 30° avec le plan horizontal.

a. Quelles valeurs doit-on donner à M_A et M_B — dont la somme a toujours la même valeur 0,980 kilogramme — pour que la vitesse du système, 3 secondes après l'avoir abandonné à lui-même, soit la même que précédemment, le corps B remontant le plan ?

b. Quelle est la tension du fil au cours du mouvement ?

3° Dans la deuxième expérience, à l'instant $t = 3$ secondes, le fil se casse. Quel est le mouvement pris par le corps B ? Trouver la position et la vitesse du corps B, 1,2 seconde après la rupture du fil.

On prendra $g = 9,80$ mètres par seconde, par seconde.

58. 1° Un pendule de torsion est constitué au moyen d'une tige de longueur $l = 60$ cm et de masse $m = 100$ g, fixée au milieu d'un fil de torsion de longueur L , dont les extrémités sont liées à un support fixe. Le centre de gravité de la tige est sur l'axe du fil. Cette tige oscillera dans un plan vertical, le fil de torsion étant horizontal.

a. Déterminer la constante de torsion du fil quand la période de ce pendule est $T_1 = 1,256$ s.

On rappelle que le moment d'inertie d'une tige par rapport à un axe médiateur est donné par la relation $J_u = ml^2/12$, l étant la longueur de la tige et m sa masse. On prendra $\pi = 3,14$.

b. On écarte cette tige de sa position d'équilibre en la faisant tourner d'un angle $\pi/2$ rad autour de l'axe constitué par

le fil. On l'abandonne ensuite. Déterminer sa vitesse angulaire et son énergie cinétique au passage par la position d'équilibre.

2° Une tige identique à la précédente est parfaitement mobile autour d'un axe horizontal passant par une de ses extrémités. Elle prend alors une position d'équilibre stable, la tige étant verticale. On l'écarte légèrement de cette position d'équilibre puis on l'abandonne.

a. Calculer la période T_2 des oscillations de faible amplitude, $g = 10$ u. SI.

b. La tige est ensuite écartée de la position d'équilibre stable et fait un angle de $\pi/2$ rad avec la verticale. On l'abandonne. Déterminer sa vitesse angulaire et son énergie cinétique quand elle repasse par la position d'équilibre.

3° On réalise un troisième pendule en fixant la même tige par une de ses extrémités au milieu du fil de torsion étudié au 1°. Le fil est horizontal et la tige verticale, quand la torsion est nulle.

Calculer la période T_3 des petites oscillations de ce pendule.

4° Au cours des diverses expériences étudiées plus haut, la température était 0° C. On opère maintenant à 20° C. Calculer, dans les trois cas, la variation relative de la période.

Le coefficient de dilatation linéaire de la tige est $\lambda = 2,10 \cdot 10^{-6}$.

On admettra que la variation de température ne modifie pas la constante de torsion du fil.

59. Un cylindre B, mobile autour de son axe de révolution horizontal, présente une section droite circulaire de rayon R et un moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation. Un fil inextensible, de masse négligeable, régulièrement enroulé sur le cylindre, supporte à l'extrémité libre un corps A de masse M ; les frottements sont négligeables.

Lorsque le cylindre tourne, le centre de gravité de A se déplace sur l'axe vertical OZ orienté vers le bas, à partir de la position initiale O du centre de gravité de A.

1° La tension du fil sera désignée par T , en module. Quelle est la nature de la force de tension pour le système (A, B) ? Montrer que le travail de cette force est constamment nul : on envisagera, par exemple, un déplacement élémentaire ΔZ de A, correspondant à une rotation élémentaire $\Delta \theta$ de B.

2° Le corps A étant abandonné sans vitesse initiale, calculer sa vitesse v après une chute de hauteur $z = h$, en appliquant directement le théorème de l'énergie cinétique au système (A, B). Vérifier que l'expression obtenue est bien homogène à une vitesse et qu'on peut la mettre sous la forme

$$v = k \sqrt{h} = k \sqrt{z} = k z^{\frac{1}{2}},$$

k étant une constante, que l'on explicitera.

3° En appliquant les relations fondamentales de la dynamique relatives au solide en translation et au solide en rotation, montrer que A est animé d'un mouvement uniformément accéléré, d'accélération γ , que l'on calculera en fonction de M, J, R et de l'accélération g de la pesanteur.

Est-il possible de prévoir la nature du mouvement à partir de la relation précédemment trouvée $v = k \sqrt{z}$?

4° Application numérique : On donne, en unités SI,

$$M = 50, R = 0,10, J = 2,5 \text{ et } g = 10.$$

Calculer pour $h = 10$ (unités SI), la vitesse du corps A, son accélération γ et la vitesse angulaire du cylindre B, en précisant bien les unités.

60. 1° Un ressort de masse négligeable est fixé par une extrémité et soutient à l'autre extrémité une masse de 5 kg. On écarte la masse de sa position d'équilibre selon la verticale, puis on l'abandonne. Son centre de gravité prend un mouvement sinusoïdal dont 10 oscillations durent 8,4 s. Calculer la force qui allonge le ressort de 1 cm. L'intensité de la pesanteur étant $g = 9,8$ N/kg, calculer l'allongement du ressort en équilibre sous l'action des 5 kg.

2° Deux masses $m = 5$ kg et $m' = 10$ kg sont reliées par une corde légère passant sur une poulie de masse négligeable. La masse m est attachée à l'une des extrémités du ressort précédent dont l'autre extrémité est fixée au sol. Quand le système est en équilibre le ressort est vertical. On écarte le système de sa position d'équilibre en déplaçant légèrement

l'une des masses selon la verticale puis on l'abandonne à lui-même. En supposant les frottements négligeables, étudier le mouvement que prend le système et calculer sa période.

3° Le ressort dont une extrémité est fixée au sol a son autre extrémité fixée à une sangle passant sur l'arbre d'un moteur tournant à raison de 5 tours par seconde. L'autre extrémité de la sangle est fixée une masse de 5 kg; le rayon de l'arbre est 3 cm. La longueur du ressort dans cette expérience surpasse de 28 cm la longueur qu'il possède lorsqu'il n'est soumis à aucune force. Calculer la puissance du moteur. Quel serait l'allongement si le moteur tournait à la même vitesse en sens inverse?

4° L'arbre du moteur est refroidi par un courant d'eau. Calculer le débit d'eau nécessaire pour que l'élévation de température de cette eau soit 2°.

61. 1° Une automobile de masse 800 kg démarre sur une route droite horizontale et atteint la vitesse de 72 km à l'heure en 50 secondes. Quelle est la valeur de la force résultante supposée constante qui a produit le mouvement?

2° Cette automobile se déplaçant en terrain plat à la vitesse constante de 108 km à l'heure, quelle est la puissance absorbée par la résistance de l'air, sachant que la surface du maître couple vaut 1,50 m² et que la résistance de l'air est donnée par la formule $R = kC_xSV^2$, k étant un facteur qui dépend uniquement des unités choisies et qui vaut 0,8 dans le système SI, C_x étant un coefficient de forme valant 0,50 pour cette voiture?

3° Sachant que la vitesse de 108 km/h est la vitesse limite de cette voiture en terrain plat, quelle est la puissance maximale du moteur, sachant qu'à la résistance de l'air s'ajoute une résistance due au frottement de roulement, proportionnelle à la vitesse, $R' = k'V$? $k' = 8$ dans le cas actuel et dans le système SI.

62. On utilise dans un moteur à explosion à 4 temps un carburant contenant des masses égales de benzène et d'alcool éthylique.

1° Calculer le volume d'air (mesuré à 0° et 76 cm de mercure) qu'exige la combustion complète de 1 g de carburant (on admettra que l'air contient 20 % d'oxygène en volume).

2° Calculer la quantité de chaleur dégagée par cette combustion à volume constant, sachant que :

1 mole de benzène dégage en brûlant 740 kilocalories.

1 mole d'alcool dégage en brûlant 325 kilocalories.

Calculer l'équivalent en joule de cette quantité de chaleur.

3° Le moteur à explosion, d'une puissance effective de 40 ch à pleine puissance, fonctionne avec un rendement industriel de 25 %. Quel est le travail produit dans le moteur par la combustion d'un kilogramme de carburant? Quelle est la consommation horaire en litre?

(Masse volumique du carburant = 0,8 g/cm³.)

Ce moteur met un véhicule en palier, en lui communiquant une vitesse de 108 km à l'heure à pleine puissance.

Quelle est la consommation en litre par 100 km?

4° Sachant que le moteur tourne à ce moment à la vitesse de 3 600 tours/minute, calculer le volume total du mélange explosif (air + carburant volatilisé) absorbé par heure et en déduire la cylindrée nécessaire (volume total utile des cylindres).

Température d'admission dans les cylindres : 150° C.

1
Coefficient de dilatation des gaz : $\frac{1}{273}$

Assimiler l'air et la vapeur de carburant à des gaz parfaits.

VIBRATIONS ET ACOUSTIQUE

63. Une lame vibrante en acier exécute 100 oscillations par seconde.

1° La lame est munie d'un stylet qui détermine en un point S_1 de la surface d'une nappe d'eau une perturbation transversale, périodique, sinusoïdale, de même période, d'amplitude 1 mm, se propageant dans toutes les directions à la surface du liquide à la vitesse uniforme de 37 cm/s.

a. Écrire l'équation du mouvement de S_1 en fonction du temps, puis l'équation du mouvement d'un point M situé à la distance d_1 de S_1 . (On supposera dans tout le problème qu'on peut négliger la variation d'amplitude sur le faible espace où l'on opère.)

Représenter graphiquement les résultats obtenus en prenant pour valeur particulière $d_1 = 14,8$ mm.

b. Quel est l'aspect de la surface de l'eau à un instant quelconque?

Représenter graphiquement cet aspect le long d'un rayon S_1x quelconque à l'instant $t = 0,06$ s, puis $t = 0,065$ s. (Origine des temps : instant où la perturbation débute en S_1 , le point S_1 allant vers le haut.)

2° La lame est maintenant munie d'une fourche dont les deux branches, égales, sont distantes de 2 cm et déterminent en deux points S_1 et S_2 de la surface de l'eau deux perturbations synchrones, analogues à celle produite dans le 1°.

a. Quelle est l'équation du mouvement, en fonction du temps, d'un point M situé à des distances d_1 et d_2 de S_1 et S_2 ?

b. Déterminer et représenter sur un schéma les lieux des points M où l'amplitude est, soit maximale (en traits pleins), soit minimale (en traits pointillés).

c. Lieux des points M dans lesquels les oscillations sont en phase avec les deux sources S_1 et S_2 .

64. Une onde progressive se propage dans un milieu dont les particules sont animées d'un mouvement périodique représenté par l'équation :

$$y = 4 \sin \left(\frac{2\pi t}{6} + \varphi \right)$$

dans laquelle le temps t est exprimé en seconde et l'élongation y en centimètre.

1° Calculer la vitesse de propagation du mouvement vibratoire, sachant que la longueur d'onde est égale à 240 cm.

2° Calculer la différence des phases correspondant à deux positions occupées par la même particule à 1 s d'intervalle.

3° Calculer, à un instant donné, la différence des phases correspondant à deux particules séparées par une distance de 210 cm dans la direction de propagation.

4° L'élongation à un instant donné d'une certaine particule est égale à 3 cm. Quelle sera l'élongation de la même particule 2 s plus tard? Interpréter, à l'aide d'un diagramme, les deux solutions obtenues.

65. 1° Pour régler à la valeur convenable la vitesse de rotation d'un tourne-disques on pose sur son plateau un disque en carton portant 77 rayons équidistants et on l'examine à la lumière d'un tube à gaz luminescent s'éclairant 100 fois par seconde. Le plateau partant du repos, la vitesse de rotation croît, et à un moment donné, pour la première fois, les rayons semblent immobiles; interpréter l'expérience et en déduire à ce moment la vitesse du plateau exprimée en tours/minute.

2° On remplace le carton par un disque enregistré; l'ensemble tournant à 78 tr/mn, l'appareil rend pendant un certain temps un son dont la fréquence est égale à celle du son fondamental émis par un tuyau sonore ouvert aux deux bouts, long de 66 cm et contenant de l'air à 20 °C; quelle est la fréquence du son émis? L'aiguille du « lecteur de son » se trouvant à 10 cm de l'axe de rotation quelle est en mm la longueur occupée sur le sillon du disque par une oscillation complète?

Célérité du son dans l'air à 0° C : 331 m/s.

3° Par suite d'un mauvais contact, le moteur électrique qui entraîne le disque est privé de courant pendant 1 seconde; montrer que durant cet intervalle de temps les fréquences des sons émis baissent toutes dans le même rapport; le moment d'inertie de l'ensemble disque-plateau étant de 5×10^{-3} kg.m² et les divers frottements absorbant une puissance moyenne de 0,5 watt pendant la durée de l'interruption, calculer en savants la diminution générale de hauteur à la fin de la coupure.

4° L'audition terminée, un dispositif de freinage automatique entre en action et joue le rôle d'une force tangentielle de 10 N agissant à 2 cm de l'axe; combien de tours fera le disque entre le moment du début du freinage et l'arrêt?

66. 1° Une lame L, en acier, élastique, a une de ses extrémités M pincée dans un étai. Elle est d'abord disposée verticalement. L'extrémité libre porte un stylet qui appuie légèrement en O contre une plaque enfumée également verticale et perpendiculaire au plan de la lame supposée mince.

On met la lame en vibration et on laisse tomber la plaque, guidée dans sa chute par des glissières verticales. Le stylet inscrit une courbe rapportée à un axe vertical Oy et qui passe par O pour $t = 0$.

a. Dessiner l'allure de la courbe en négligeant l'amortissement.

b. Soient A, B, C, D..., des points de la courbe pris sur Oy, qui comprennent entre eux le même nombre k de demi-sinusoïdes. Montrer que les espaces AB, BC, CD..., croissent en progression arithmétique dont on calculera la raison r .

Application : $k = 6$; fréquence de la lame $N_0 = 100$ Hz; $g = 9,8$ u. SI.

c. Pourrait-on déduire g de la mesure de r ? Avec quelle incertitude absolue devraient être mesurés les segments AB, BC, CD..., pour que l'incertitude relative sur g soit inférieure à $1/1\,000$, N_0 étant connue sans erreur?

2° La lame est disposée horizontalement à plat. On fixe à son extrémité libre un petit miroir m plan et très léger. Par réflexion sur m , on forme d'une source S très petite, située dans le plan horizontal de la lame, une image S' sur la surface d'un cylindre enregistreur F vertical; m est à 80 cm de S'. Quand la lame, longue de 12,8 cm, vibre, la hauteur des sinusoïdes sur F est de 5,2 cm. Quelle est l'amplitude a de l'extrémité libre de la lame?

67. 1° On observe les vibrations d'une corde à travers un disque stroboscopique tournant, percé de quatre fentes symétriquement disposées par rapport à l'axe, suivant deux diamètres rectangulaires.

La corde, tendue par une masse $M = 5$ kg, vibre entre les deux chevalets fixes A et B d'un sonomètre distants d'une longueur $l = 1$ m en donnant la vibration fondamentale.

a. Calculer le nombre maximal de tours par minute que fait le disque tournant quand la corde semble s'immobiliser en toute position, sachant que la masse de la partie vibrante AB, correspondant à cette tension, est de 3,92 g. On prendra pour valeur de l'intensité de la pesanteur $g = 9,80$ N/kg.

b. On maintient constante la vitesse du disque et l'on quadruple la tension : la corde s'allonge mais reste cylindrique. Calculer l'allongement pour cent produit par l'accroissement de la tension, sachant que la corde effectue 120 vibrations apparentes par minute quand elle vibre en un seul fuseau.

2° On considère la même corde, tendue encore par une masse $M = 5$ kg, mais on l'immobilise pour l'empêcher de vibrer.

Au milieu O de AB on fixe un corps, de petite dimension, de masse $m = 50$ g, vis-à-vis de laquelle on négligera la masse propre du segment AB.

Calculer l'affaissement $OO' = x$ que fera subir la masse m au milieu O de AB.

Dans le cas où le rapport $\frac{m}{M}$ reste petit, établir la relation approchée, très simple, qui donne x en fonction de m , M et l .

68. Une lampe formée de deux électrodes placées dans un gaz rare (néon) et soumise à une différence de potentiel alternative s'illumine pendant un temps très court à chaque alternance au moment où la différence de potentiel est voisine du maximum; elle peut servir à des expériences de stroboscopie.

1° On a peint un trait blanc suivant un rayon sur un disque fixé sur l'arbre d'un moteur. Le disque étant éclairé par la lampe au néon, on fait croître progressivement la vitesse. Décrire ce qu'on observe. A un certain moment, on voit sur le disque deux traits blancs opposés qui paraissent immobiles; un compte-tours montre alors que le moteur fait 3 000 tours par minute; en déduire la fréquence du courant alternatif. Qu'observera-t-on pour une vitesse du moteur de 3 030 tours par minute?

2° On éclaire ensuite avec la lampe au néon une corde vibrant en un seul fuseau; sa longueur est 1 m et sa masse 2 g. On tend progressivement la corde jusqu'à ce qu'elle paraisse

immobile; quelle est alors sa tension? Qu'observera-t-on, si, sans changer la valeur de la tension, on réduit la longueur de la corde à 99 cm?

69. Par temps de brouillard, une station côtière émet simultanément un signal sonore aérien (vitesse de propagation dans l'air : $V = 340$ m par seconde) et un signal sonore transmis par l'eau (vitesse de propagation dans l'eau : $V' = 1\,500$ m par seconde). Sur un navire qui se trouve à la distance x de cette station, on observe, à l'aide d'appareils convenables, le temps t seconde qui s'écoule entre les auditions des deux sons.

1° Calculer x connaissant t .

2° Quelle erreur commet-on sur x en mesurant t à 0,1 seconde près?

3° Pour diminuer cette erreur, on se propose de remplacer un des signaux sonores par un signal de télégraphie sans fil; lequel des deux signaux sonores convient-il de remplacer et que devient l'erreur sur x si t est encore connu à 0,1 seconde près?

70. 1° Un tuyau sonore S actionné par une soufflerie émet un son continu. Il est placé à une vingtaine de mètres d'un grand mur vertical M.

Un observateur qui se déplace entre la source sonore et le mur, le long de la droite SM normale au mur, constate l'existence de zones où l'intensité du son perçu par l'oreille est alternativement forte et faible. Expliquez ce phénomène.

En remplaçant l'oreille par une petite capsule munie d'une membrane en caoutchouc, on transmet les vibrations de l'air à un appareil enregistreur. On peut ainsi mesurer le long de SM la distance exacte entre deux zones successives où l'intensité vibratoire passe par un minimum et l'on trouve qu'elle est égale à 17,4 cm.

Calculer la longueur d'onde du son et sa fréquence, sachant que la température de l'air au moment de l'expérience est de 27,3 °C.

2° On sait que l'amplitude de la vibration d'une onde sphérique qui se propage est inversement proportionnelle à la distance à la source émettrice. Soit O le milieu entre la source et le mur. On désignera par a l'amplitude de vibration au point O de l'onde incidente issue de S. Calculer en fonction de a l'amplitude de l'onde réfléchie par le mur et repassant par O.

3° Calculer en fonction de a l'amplitude produite par la superposition des deux ondes au voisinage du point O, dans une zone où elle est minimale et dans une zone où elle est maximale. Quel est le rapport des amplitudes de ces deux zones? Quel est le rapport correspondant des intensités sonores?

Vitesse du son dans l'air à 0° C : 330 m/s.

71. On considère deux sources synchrones A et B, de même amplitude a , de même fréquence $f = 85$ Hz, distantes de d .

1° Si on admet pour date zéro un instant où les deux sources passent par leur position d'équilibre, quelle est leur élongation y_0 à la date t ?

2° Quelle est la longueur d'onde, si la vitesse de propagation est de 340 m/s?

3° Quelles sont, à la date t , les élongations des deux mouvements qui arrivent en un point M situé sur la droite BA, à 100 m de A?

4° Déterminer, en utilisant la construction de Fresnel, le mouvement qui en résulte pour M dans les 3 cas suivants :

a) $d = 4$ m; b) $d = 2$ m; c) $d = 1$ m.

72. Une tige de laiton de longueur AB = 95 cm est solidement encastrée en son milieu M. L'extrémité A est engagée dans un tube de verre et porte un petit piston P, qui ne touche pas les parois du tube. Celui-ci est fermé à l'autre extrémité par un piston P' dont on peut régler la position à volonté; il contient de l'air sec à 20° C et une mince couche de poudre de liège régulièrement répartie. On frotte longitudinalement la partie MB de la tige de laiton; celle-ci vibre en rendant un son de fréquence f et l'on observe que la poudre sautille fortement et se rassemble en tas (nœuds de vibration).

1° Expliquer le phénomène observé. Montrer qu'il est net pour certaines positions de P'. Préciser la position des points où la poudre se rassemble.

2° La distance PP' est alors égale à 48,7 cm et l'on compte 8 tas de poudre, y compris ceux adjacents à P et à P'. Calculer la fréquence f de la tige.

3° Sachant que PP' est mesuré à 1 mm près et que la température est connue à 0,5 près, calculer l'incertitude relative sur f .

4° Sachant que l'état vibratoire de la tige AB est un système d'ondes stationnaires présentant un nœud en M et un ventre à chaque extrémité, calculer la vitesse de propagation à 20° du son dans le lait de la tige. Précision de cette détermination si AB est connu aussi à 1 mm près.

5° L'air du tube est remplacé par un mélange d'hydrogène et d'oxygène à la même température de 20°. Le phénomène est net lorsque PP' = 53,9 cm et l'on compte alors 6 tas de poudre. Calculer la célérité du son à 20° dans le gaz du tube. En déduire la composition du mélange en volumes.

Données : célérité du son dans l'air à 0° : 331,4 m/s, avec une erreur négligeable; volume molaire normal : 22,4 litres; Masse volumique normale de l'air : 1,293 g/l.

73. 1° On inscrit sur le même cylindre enregistreur les vibrations d'un diapason et les passages à la verticale, transmis électriquement, d'un pendule synchrone d'un pendule simple de 196 cm de longueur; 299 vibrations complètes du diapason s'inscrivent entre deux passages consécutifs. Calculer la fréquence du diapason.

2° Ce même diapason vibre devant l'extrémité ouverte d'un tuyau sonore fermé à l'autre bout par une paroi mobile dont la distance à l'orifice ne peut dépasser 1 m. Trouver la longueur à donner au tuyau pour qu'il entre en résonance avec le diapason.

Intensité de la pesanture : $g = 9,80 \text{ N/kg}$.

Vitesse du son dans l'air : 340 m/s.

74. Deux pendules voisins A et B qu'on peut assimiler à des pendules simples sont constitués chacun par une masse de 2 kg suspendue à un fil d'acier de 3/10 de millimètre de diamètre, en un lieu où l'intensité de la pesanture est de 9,81 N/kg.

La longueur du pendule A est de 109 cm. Le pendule B, dont la durée d'oscillation est légèrement moindre, entre en coïncidence avec A toutes les 5 minutes. Calculer le rapport des longueurs des deux pendules.

Les pendules étant immobilisés, on fait vibrer transversalement les deux fils d'acier. Calculer l'intervalle des deux sons émis et le nombre des battements perçus par minute. Densité de l'acier : 7,7.

75. 1° Une corde verticale de masse négligeable, de longueur l , est tendue par un poids. En son milieu est fixée une masse m . Celle-ci, écartée horizontalement de sa position d'équilibre d'une faible valeur x , tend à y revenir sous l'action d'une force de rappel proportionnelle à x due aux deux tensions égales et opposées, chacune de valeur F , que la corde exerce sur m . Évaluer la force de rappel en fonction de l , de F et de x , et en déduire la fréquence f du mouvement périodique que peut exécuter la masse m de part et d'autre de sa position d'équilibre.

2° La longueur et le poids tenseur restant invariables, on suppose la même masse m répartie uniformément sur toute la longueur de la corde. Écrire l'expression de la nouvelle fréquence f' du mouvement vibratoire de la corde lorsqu'elle vibre transversalement en un seul fuseau. Montrer que le rapport f'/f est indépendant de l , de F et de m , et calculer sa valeur.

3° On donne : longueur de la corde = 50 cm, masse $m = 3 \text{ g}$, poids tenseur = 9 kgf, intensité de la pesanture $g = 9,80 \text{ N/kg}$. Calculer la longueur d'un tuyau plein d'air, fermé à un bout, ouvert à l'autre et dont le son fondamental est à l'unisson de la corde dans le 2° cas. Vitesse du son dans l'air à la température de l'expérience : 340 m/s.

4° En immergeant complètement dans l'eau le poids tens-

seur en plomb de densité 11,3, on détruit l'unisson. Pour le rétablir il faut remplacer l'air du tuyau par un mélange à la même température d'air et de gaz carbonique. En admettant dans ce cas que la densité du mélange gazeux influe seule sur la vitesse du son, calculer cette densité, et en tirer la composition en volume du mélange.

76. Un disque percé de 10 trous équidistants sur une circonférence voisine de la périphérie est animé d'un mouvement de rotation uniforme de 2 325 tours par minute. Une source lumineuse, placée convenablement derrière le disque, se trouve ainsi démasquée périodiquement. Elle éclaire une corde en acier (densité : 7,8) de 1 m de longueur et de 0,5 mm de diamètre, tendue sur un sonomètre. La corde, qui vibre en trois fuseaux et émet un son de fréquence comprise entre 260 et 520 Hz, apparaît absolument immobile quand on l'examine dans ces conditions.

1° Quelle est la tension de la corde ?

2° Quelle est la vitesse de propagation des vibrations transversales le long de la corde ?

3° Quelles sont les fréquences des sons donnés par la même corde vibrant en un fuseau, puis en deux fuseaux ?

4° La vitesse du disque est ramenée à 2 319 tours par minute. Calculer la période θ du mouvement apparent de la corde vibrant en trois fuseaux et éclairée à travers le disque. Représenter par des courbes les aspects de la corde aux instants t , $t + \theta/4$, $t + \theta/2$, $t + 3\theta/4$, $t + \theta$, en admettant qu'à l'instant t l'élongation des divers points soit maximale.

77. Un fil d'aluminium (densité environ 2,5), dont le diamètre est de 2 millimètres, est monté sur un sonomètre de manière à constituer une corde vibrante de un mètre de long dont le troisième harmonique est excité au moyen d'un archet. On observe ce fil à travers des ouvertures régulièrement réparties à la périphérie d'un disque porté par un moteur qui l'entraîne à la vitesse constante de 1 500 tours par minute. Le nombre des ouvertures périphériques est de 12. On accroît progressivement la tension du fil jusqu'à ce que ce dernier apparaisse immobile à travers les ouvertures.

1° Quelle est à ce moment la tension du fil ?

2° Quelle est la vitesse de propagation des vibrations transversales le long de ce fil ?

3° On réduit la tension du fil au quart de la tension P . Représenter schématiquement l'apparence observée à travers le disque.

78. 1° Un moteur électrique porte sur son axe un disque percé de cinq trous régulièrement espacés sur une circonférence. À l'aide d'un ajutage disposé convenablement en face du disque on dirige sur ces trous un courant d'air comprimé. Déterminer la fréquence du son obtenu quand le moteur tourne à raison de 1 800 tours à la minute. Quelle est la longueur d'onde de ce son dans l'air à 20° C ? Que deviendrait, à la même température, cette longueur d'onde dans un gaz formé, en volumes, de 50 % de méthane, 30 % d'éthylène et 20 % d'acétylène ?

On rappelle que la vitesse du son dans l'air à 0° C est 331 m/s.

2° Le disque, peint en blanc, porte un rayon tracé en noir. À l'aide d'un dispositif approprié, que le candidat devra représenter schématiquement, on illumine le disque, à intervalles de temps réguliers, par des éclairs très brefs, à raison de 30 éclairs par seconde. À l'aide d'un rhéostat, on modifie légèrement la vitesse de rotation du moteur et l'on constate que le rayon noir paraît tourner en sens inverse de son mouvement réel à raison d'un tour en 10 secondes. Calculer, dans ces conditions, la vitesse du moteur.

Dans une deuxième expérience, on règle cette vitesse de manière à voir le disque immobile avec trois rayons noirs décalés de 120° l'un par rapport à l'autre. Quelle est alors la vitesse du moteur ?

3° Le moteur tournant de nouveau à 1 800 tours à la minute, on place à côté de l'appareil un fil de fer (densité : 7,8) de 25 cm de longueur et de 1 mm² de section, tendu entre deux points fixes. Au moyen d'un électro-aimant parcouru par un courant alternatif on fait vibrer ce fil et on le tend jusqu'à ce que l'on obtienne l'amplitude maximum. L'audition simul-

tanée des sons émis par la sirène et le fil donne alors des battements de fréquence 4 qui disparaissent si l'on accroît légèrement la vitesse du disque. Dédurre de cette expérience la fréquence et la tension du fil.

OPTIQUE

79. Deux prismes identiques d'angle A égal à 20 minutes et d'indice $n = 1,5$, sont accolés par leurs bases supposées rigoureusement parallèles à leurs arêtes, la distance de l'arête à la base étant pour chacun des prismes de 1 cm. Une source lumineuse ponctuelle monochromatique S , émettant de la lumière de longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu$, est placée sur l'axe du système (intersection du plan de base des deux prismes et du plan P perpendiculaire au milieu de leurs arêtes) à une distance $d = 50$ cm des prismes. Montrer que ce système permet d'observer des franges d'interférence. Figurer le trajet des faisceaux lumineux dans le plan P . En supposant que l'on observe des franges sur un écran E perpendiculaire à l'axe et placé à une distance $D = 2$ m des deux prismes, calculer la largeur $2u$ de la région dans laquelle on peut observer des franges. Calculer l'intervalle i entre deux franges consécutives et le nombre total N des franges observées.

80. On réalise l'expérience classique d'Young en utilisant un écran E percé de deux trous rapprochés et un écran d'observation E' parallèle au premier. La source lumineuse ponctuelle qui éclaire les deux trous est blanche; on repère alors sur E la position de la frange brillante centrale (frange de retard nul.)

^{1°} On couvre alternativement les deux trous à l'aide d'une lame transparente mince L : la frange brillante centrale s'observe alors alternativement en deux positions distinctes P, P' , que l'on marque sur l'écran. On enlève L et l'on remplace la source blanche par une source monochromatique, de longueur d'onde $0,589$ micron, placée au même point que la source blanche précédemment. On observe alors que la longueur PP' précédente renferme exactement 75 interférences (distance entre les milieux de deux franges brillantes consécutives). Quel est l'indice de réfraction de la lame, sachant que son épaisseur est de $0,05$ mm?

^{2°} La longueur PP' est égale à 5 cm, la distance des deux écrans E, E' , à 1 m. Quelle est la distance entre les deux trous?

^{3°} Sans rien changer au dernier dispositif, on place tout l'appareil dans l'eau (indice $4/3$). Que devient l'interfrange?

81. On reproduit l'expérience d'Young avec deux fentes très fines A et B parallèles, à 1 mm l'une de l'autre. La source éclairante S a la forme d'un filament très fin, parallèle aux deux fentes, à 1 m de chacune d'elles. Les franges sont observées sur un écran E parallèle aux fentes A et B , à 2 m de celles-ci.

^{1°} Quelle est la distance de deux franges brillantes consécutives, si la longueur d'onde de la lumière émise par la source S est $0,5 \mu$?

^{2°} La source est déplacée de 1 cm parallèlement à elle-même et dans un plan parallèle à celui des fentes A et B . Comment le système de franges est-il modifié?

^{3°} S étant dans sa position primitive, pourrait-on avoir le même phénomène en plaçant devant l'une des fentes une mince lame de verre à faces parallèles, d'indice $1,5$? Calculer l'épaisseur de la lame.

^{4°} S dans sa position primitive (la lame de verre étant supprimée) donne maintenant de la lumière blanche.

On place à 2 cm du centre du phénomène et parallèlement aux franges la fente très fine d'un spectroscopie. On aperçoit à travers celui-ci un spectre sillonné de raies noires.

Expliquer le phénomène. Indiquer le nombre de raies noires et les longueurs d'onde des radiations éteintes.

Les longueurs d'onde des radiations constituant la lumière blanche varient de $0,8 \mu$ à $0,4 \mu$.

82. Un point lumineux S émet une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu$; il est situé sur l'axe principal d'une lentille mince convergente de 4 cm de diamètre d'ouverture et de 20 cm de distance focale pour la radiation considérée.

La distance de S au centre optique de la lentille est $SO = 30$ cm. On coupe la lentille en deux moitiés par un plan passant par son axe, et on écarte les deux moitiés de $0,5$ mm de part et d'autre du centre optique et perpendiculairement à la coupure. A une distance D de la lentille on reçoit le faisceau réfracté sur un écran normal à l'axe principal.

^{1°} A partir de quelle valeur de D observe-t-on les franges d'interférence sur l'écran?

^{2°} Comment varie l'interfrange (distance qui sépare les milieux de deux raies brillantes consécutives) avec D ? Quelle est sa valeur pour $D = 1,60$ m?

^{3°} Quelle est, pour $D = 1,60$ m, la largeur i du système de franges? Quel est le nombre n de franges qu'il contient? Dans quel sens varie i et n quand D augmente?

^{4°} Si on mesurait à l'aide d'un oculaire micrométrique, à $0,1$ mm près, la largeur couverte par 50 interférences afin de déterminer i , quelle erreur relative commettrait-on de ce fait sur la valeur de λ ?

83. ^{1°} Une fente verticale F , éclairée par une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu$, est placée sur l'axe d'une lentille mince convergente L de distance focale 50 cm, à une distance $p = 75$ cm de celle-ci. Le diamètre d'ouverture de la lentille est de 6 cm.

a. Calculer la distance p' de l'image F' qu'elle donne de la fente.

b. La lentille L , sciée suivant un diamètre vertical, se compose de deux demi-lentilles L_1 et L_2 ; on écarte horizontalement ces deux demi-lentilles l'une de l'autre de $0,5$ mm de part et d'autre du centre optique O . Quel est l'écartement des deux images F'_1 et F'_2 , fournies par les deux demi-lentilles?

^{2°} On place un écran normalement au faisceau transmis par la bilentille, à une distance x de cette bilentille. A partir de quelle valeur x_0 de la distance x observe-t-on des franges d'interférence sur l'écran?

^{3°} Quelle est, pour $x = 3$ m :

a. la distance i de deux franges brillantes consécutives?

b. la largeur totale l du système de franges obtenu sur l'écran?

c. le nombre total de franges noires qu'il contient?

^{4°} Comment le système de franges est-il modifié lorsqu'on place devant l'image F'_1 , une lame transparente d'épaisseur $e = 4 \mu$ et d'indice $n = 1,5$?

84. Une fente lumineuse fine F est disposée sur l'axe principal d'une lentille convergente de 5 dioptries, à 40 cm en avant de la lentille. Celle-ci est sciée en deux moitiés, le plan de la section contenant l'axe principal; les deux moitiés sont légèrement écartées l'une de l'autre suivant une direction perpendiculaire à la fois à l'axe principal et à la fente F .

^{1°} Montrer que l'on obtient de la sorte deux images de la fente, identiques, parallèles entre elles, et égales à la fente source.

^{2°} La distance F_1F_2 de ces images valant 1 mm, quel est l'écartement O_1O_2 des centres optiques des deux demi-lentilles?

^{3°} Dans un plan E perpendiculaire à l'axe primitif et situé à 140 cm en arrière de la lentille on observe le phénomène d'interférences : expliquer sa formation et, sachant que l'interfrange vaut $0,6$ mm, calculer la longueur d'onde de la lumière éclairante.

^{4°} La fente F étant maintenue éclairée en lumière blanche, on porte son attention sur un point A de l'écran situé à 4 mm de la frange centrale : qu'y voit-on? Calculer les longueurs d'onde pour lesquelles l'intensité est nulle en ce point dans le spectre visible (on admettra pour ses limites $0,38$ et $0,75$ micron). Comment pourrait-on vérifier expérimentalement ce dernier résultat?

85. Pour mesurer la longueur d'onde λ d'une radiation, on réalise l'expérience suivante :

Une lentille mince convergente, de distance focale 12 cm, est coupée en deux parties égales par un plan passant par l'axe $X'X$ de la lentille. Les deux moitiés peuvent être légèrement écartées l'une de l'autre, les deux bords de la coupure restant parallèles et symétriquement placés par rapport à $X'X$.

Une fente fine S , parallèle à la coupure, est placée sur l'axe $X'X$, à 80 cm de la lentille qui en donne deux images S_1 et S_2 .

1° De combien doit-on écarter les deux moitiés de la lentille pour que la distance S_1S_2 soit de 2 millimètres ?

2° On place normalement à $X'X$ et en arrière de la lentille un écran E situé à une distance $D = 2,50$ m des sources S_1 et S_2 ; on observe sur cet écran des franges d'interférences lorsqu'on éclaire S par une radiation monochromatique de longueur d'onde λ ; la distance d du milieu de la 1^{re} frange brillante au milieu de la 11^e est 8,63 mm.

a. Indiquer sur un schéma dans quelle région on peut observer les franges.

b. Calculer la longueur d'onde λ .

c. Montrer avec quelle précision celle-ci est déterminée sachant qu'on mesure la distance S_1S_2 , ainsi que d , celle des franges, à $\frac{5}{100}$ de millimètre près et la distance D à 5 millimètres près.

3° On éclaire maintenant la fente en lumière blanche et on place devant S_1 seulement une lame d'épaisseur 30 microns, d'indice inconnu (le même pour toutes les radiations). Elle provoque un déplacement de 25 millimètres de la frange centrale blanche; dans quel sens? Quel est l'indice de la lame?

86. On produit des phénomènes d'interférences à l'aide de deux sources lumineuses, ponctuelles et synchrones S_1 , S_2 . On observe les franges sur un écran E disposé perpendiculairement en A à la médiatrice du segment S_1S_2 . La lumière utilisée est monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu$.

1° Décrire brièvement un dispositif expérimental permettant de réaliser les deux sources synchrones S_1 , S_2 .

2° Sachant que l'angle sous lequel on voit, du point A , le segment S_1S_2 vaut 0,001 radian, calculer la distance séparant les milieux de deux franges brillantes consécutives.

3° Les deux sources émettent simultanément deux radiations monochromatiques de longueurs d'onde

$$\lambda = 0,5 \mu \text{ et } \lambda = 0,530 \mu.$$

Qu'observe-t-on sur l'écran? A quelle distance de A , comptée perpendiculairement aux franges, se produit la première coïncidence entre les deux systèmes de franges?

4° Les deux sources synchrones émettent maintenant de la lumière blanche.

a. Décrire le phénomène observé sur l'écran E .

b. Quelles sont les longueurs d'onde des radiations visibles qui, si elles étaient seules, donneraient une frange noire en un point P de l'écran E situé à une distance de 4 mm de A , sur une droite perpendiculaire aux franges et passant par A ?

87. On utilise le dispositif des trous de Young pour produire des franges d'interférence. On suppose d'abord que les deux trous S_1 et S_2 , distants de 2 mm, sont éclairés par une source monochromatique S de longueur d'onde λ . L'écran d'observation E est disposé perpendiculairement à la droite SO , de façon que la distance de O (O, milieu de S_1S_2) à l'écran E soit égale à D mm.

1° On demande de décrire le phénomène observé et de calculer la distance $O'P = x$ pour laquelle on observe la frange brillante d'ordre 4. (O' , intersection de SO prolongée et de E .)

2° On remplace la source S de longueur d'onde λ par une autre source monochromatique de longueur d'onde λ' . Calculer la longueur d'onde λ' pour que, en ce même point P , on observe une frange noire d'ordre 4.

3° La source S devient une source de lumière blanche. Quelles sont les radiations du spectre visible (supposées comprises entre $0,4 \mu$ et $0,8 \mu$) qui donnent en P des franges noires?

4° On dispose en P , au lieu de l'écran, la fente d'un spectroscope disposée parallèlement aux franges. Quel sera l'aspect du spectre observé?

Application numérique pour les quatre questions :

$$2l = 0,4 \text{ mm}, D = 1 \text{ m}, \lambda = 0,5 \mu.$$

88. Deux miroirs plans de forme rectangulaire M_1 et M_2 , sont accolés par un côté et forment un dièdre dont l'arête O

est verticale et dont l'angle vaut $(\pi - \alpha)$, α étant très petit (miroirs de Fresnel).

Une fente lumineuse très fine S , verticale, éclaire les deux miroirs; les deux faisceaux réfléchis semblent provenir des deux images virtuelles S_1 et S_2 de la source dans les deux miroirs.

Un écran vertical E parallèle au plan des images S_1S_2 est placé à la distance $AO = D$ de ce plan.

1° On éclaire la fente S avec une lumière monochromatique de longueur d'onde λ . Montrer que l'on observe sur l'écran E un système de franges d'interférences. Préciser la direction de ces franges et la position de la frange centrale.

2° Exprimer l'interfrange en fonction de la distance S_1S_2 et de la distance D . Appliquer au cas : $D = 2900$ mm; $S_1S_2 = 1,85$ mm; $\lambda = 0,64 \mu$.

3° Avec la valeur précédente de S_1S_2 , calculer l'angle α (très petit) en radian. On posera $OS = L = 100$ mm.

4° Une lumière de longueur d'onde inconnue x est superposée à la précédente de longueur d'onde $\lambda = 0,64 \mu$. On constate que la première coïncidence entre les deux systèmes de franges superposés se produit pour la 5^e frange brillante de λ et la 6^e frange brillante de x . La frange centrale est numérotée zéro. Calculer la longueur d'onde x .

89. Deux miroirs plans rectangulaires OM_1 et OM_2 sont accolés par un côté. Le dièdre ainsi formé a pour valeur $(\pi - \alpha)$ radians et son arête est horizontale. Une fente lumineuse F très fine, horizontale, est placée à hauteur suffisante pour qu'aucun rayon réfléchi par OM_1 n'atteigne OM_2 . Soient F_1 et F_2 les images de F données respectivement par OM_1 et OM_2 . La dimension OM_2 est supposée assez grande pour que la direction F_2M_2 ne rencontre aucun des rayons réfléchis par OM_1 . De même la dimension OM_1 est telle que la direction F_1M_1 ne rencontre aucun des rayons réfléchis par OM_2 .

A. On demande de faire la figure en indiquant les limites de l'espace où l'on peut, en y plaçant un écran, observer des franges d'interférence, l'écran étant parallèle à F_1F_2 et perpendiculaire au plan de la figure.

B. On opère en lumière monochromatique de longueur d'onde λ . On pose $FO = d_1$ et on appelle d_2 la distance de O à l'écran. Calculer en fonction de α , d_1 , d_2 et λ :

1° l'interfrange, c'est-à-dire la distance séparant deux maximums consécutifs de lumière sur l'écran (ou deux minimums consécutifs);

2° la largeur $2l$ de l'écran sur laquelle on observe des franges;

3° le nombre n d'interfranges.

4° Établir la relation très simple entre d_1 et d_2 pour laquelle n est maximal quand on fait varier d_1 et d_2 de façon que

$$d_1 + d_2 = D$$

reste constant.

5° Calculer la valeur de n et celle de l'interfrange dans le cas où $d_1 = d_2 = 1$ m, $\lambda = 0,5$ micron et où α prend successivement les valeurs $\frac{1}{1000}$ radian et $\frac{5}{1000}$ radian.

6° Trouver l'expression de la limite vers laquelle tend la valeur de n quand, avec d_1 donné, on fait croître d_2 indéfiniment. Déterminer la valeur de α pour que cette limite de n soit égale à 2 quand $d_1 = 1$ mètre et $\lambda = 0,5$ micron.

C. On suppose maintenant que OM_2 restant en place, le miroir OM_1 subit une translation dans son plan l'amenant en O_1M_1' telle que la distance $O_1O = \epsilon$ est petite par rapport à d_1 et à d_2 .

Les autres indications figurant avant le titre A ne sont pas modifiées.

1° On demande de refaire une figure analogue à celle du titre A en choisissant ϵ de telle façon que la largeur de l'écran sur laquelle on peut observer des franges ne soit que la moitié de celle que l'on aurait avec ϵ nul.

2° Calculer en fonction de d_1 , d_2 , α et $\sin \beta$

$$(\text{avec } \beta = FOM_1')$$

la valeur de ϵ qui donne ce résultat.

Application numérique :

$$d_1 = d_2 = 1 \text{ m}; \alpha = \frac{1}{1000} \text{ radian}; \beta = 30^\circ.$$

N. B. — Dans le calcul demandé, on désignera par γ l'angle O_1FO_2 et, dans la relation entre côtés et angles du triangle O_1FO_2 , on tiendra compte du fait que cet angle est petit.

ÉLECTRICITÉ

90. Une spire circulaire de rayon $r = 3 \text{ cm}$ peut tourner autour d'un diamètre vertical, dans un champ magnétique horizontal d'induction $B = 0,5 \text{ tesla}$, supposé uniforme. La vitesse de rotation est maintenue constante égale à $N = 40$ tours par seconde.

1° Donner l'expression de la f.é.m. induite en fonction du temps (on suppose l'induction perpendiculaire au plan de la spire à l'origine des temps);

2° Calculer la valeur efficace de l'intensité du courant produit dans la spire, si celle-ci est faite d'un fil de cuivre de diamètre 1 mm ; la résistivité du cuivre est $1,6 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

3° Calculer la puissance dissipée en chaleur;

4° Quelle est la valeur moyenne du couple qui fait tourner la spire?

5° On dispose une deuxième spire identique à la première, perpendiculaire à celle-ci et tournant avec la même vitesse autour du diamètre vertical commun. Quels flux reçoivent-elles à chaque instant? De quelle f. é. m. induite chacune d'elles est-elle le siège? Si les deux spires sont associées en un seul circuit par coupure et jonction convenable de leurs parties inférieures, quelles expressions obtient-on pour la f. é. m. résultante?

(A l'origine des temps l'une des spires est perpendiculaire à l'induction magnétique). Les deux expressions possibles du courant fourni par des deux spires conduisent à une valeur efficace unique qu'on donnera. Si on ne s'intéresse qu'au dégagement de chaleur fourni par les deux spires, gagne-t-on à les associer?

91. 1° Une bobine circulaire allongée B à axe horizontal porte 20 tours de fil par centimètre. Elle est traversée par un courant de 10 ampères. Quelle est la direction et l'intensité de l'induction magnétique au centre de la bobine?

2° Au centre de B et perpendiculairement à son axe on place une petite bobine b formée de 10 spires de fil. Chaque spire a une surface de 100 cm^2 . Quel est le flux d'induction qui traverse la bobine b ?

Que devient ce flux quand la normale à b fait un angle α avec l'axe de B ?

3° Que se produit-il dans la bobine b quand on la fait tourner autour d'un axe vertical d'un mouvement uniforme avec une vitesse de 40 tr/s ?

92. 1° Un condensateur est constitué par des feuilles de mica, de $0,2 \text{ mm}$ d'épaisseur, argentées sur les deux faces et assemblées de manière à réaliser une surface totale de $2,5 \text{ m}^2$. Calculer, en microfarad, la capacité de ce condensateur, sachant que la constante diélectrique du mica est égale à 8.

2° On charge ce condensateur en reliant ses armatures aux bornes d'un générateur de tension constante : $U = 120 \text{ volts}$. Calculer la charge des armatures et l'énergie emmagasinée dans le condensateur.

3° Les armatures, séparées du générateur, sont alors réunies à celles d'un autre condensateur analogue non chargé, dont la capacité est double de celle du premier. Calculer la différence de potentiel qui s'établit entre les deux groupes d'armatures.

93. 1° Une bobine d'une résistance de 300 ohms est placée dans un calorimètre dont la valeur en eau est de 400 g . On maintient aux bornes de la bobine une différence de potentiel sinusoïdale de 120 volts efficaces. Au bout de 139 s , la température de l'eau du calorimètre s'est élevée d'un degré.

On demande : l'intensité efficace et l'intensité maximale du courant qui parcourt la bobine;

2° Quelle est, en henry, l'inductance de la bobine, sachant que la fréquence du courant alternatif est de 50 périodes par seconde?

Quelle serait la capacité, en microfarad, qu'il faudrait placer en série avec la bobine pour que l'intensité du courant soit la plus grande possible?

Quelle serait, dans ces nouvelles conditions, l'élévation de température de l'eau du calorimètre à l'intérieur duquel la bobine se trouve immergée, au bout de 139 s de passage de courant, la différence de potentiel appliquée aux bornes de l'ensemble bobine-condensateur étant toujours de 120 volts efficaces?

94. Une bobine plate de 5 spires a une section de 20 cm^2 . Elle tourne à raison de 3000 tr/mn dans un champ magnétique d'induction $B = 1 \text{ tesla}$, normale à l'axe de rotation. Calculer :

1° la valeur efficace de la f. é. m. induite;

2° l'expression du courant instantané produit par cette f. é. m. dans un solénoïde fixe ayant une résistance $R = 0,157 \text{ ohm}$ et une inductance $L = 0,5 \text{ millihenry}$;

3° à partir de l'instant où la f. é. m. est nulle, les temps au bout desquels, au cours de la période suivante, ce courant aura une valeur instantanée numériquement égale à sa valeur efficace;

4° la quantité de chaleur dégagée par minute dans le solénoïde;

5° le nombre de spires du solénoïde dont la section moyenne est 12 cm^2 et la longueur 6 cm ;

6° la valeur de la capacité d'un condensateur placé en série dans le circuit du solénoïde de telle sorte que la différence de potentiel efficace aux bornes du condensateur soit 100 fois plus grande que la différence de potentiel efficace aux bornes du solénoïde.

95. L'intensité d'un courant alternatif est donnée à chaque instant par l'expression $i = 22 \sin(314 t)$. Ce courant parcourt un circuit comprenant une résistance $R = 25 \text{ ohms}$ et une bobine d'inductance $L = 0,016 \text{ henry}$.

1° Calculer la différence de potentiel aux bornes du circuit à chaque instant. Calculer les valeurs efficaces de la différence de potentiel aux bornes et de l'intensité. Calculer la fréquence du courant.

2° On introduit dans le circuit un condensateur. Quelle doit être sa capacité pour que l'intensité du courant soit en phase avec la différence de potentiel aux bornes?

3° Si l'intensité est toujours $i = 22 \sin(314 t)$, quelle est alors l'expression de la différence de potentiel aux bornes du circuit? Quelles sont les valeurs efficaces de la différence de potentiel U_r aux bornes de la résistance, de la différence de potentiel U_L aux bornes de la bobine et de la différence de potentiel U_C aux bornes du condensateur? Si la différence de potentiel aux bornes du circuit était constante, quelles seraient les valeurs U_r , U_L et U_C ? Quelle serait alors la charge du condensateur?

96. On dispose d'une tension alternative sinusoïdale de 110 volts efficaces dont on veut tout d'abord déterminer la fréquence.

1° On la ferme sur un électro-aimant dont le noyau est un cylindre de fer d'axe horizontal. On tend un fil métallique horizontal normalement à cet axe de façon que son milieu soit près de l'une des extrémités du noyau dans un plan de symétrie de l'électro-aimant. L'un des bouts du fil est fixe; l'autre extrémité passe sur une poulie et peut être chargée de masses marquées. La masse du fil est $\mu = 0,848 \text{ g par mètre}$; sa longueur du point fixe à la poulie est $l = 90 \text{ cm}$. On le fait parcourir par un courant continu. L'on constate que pour une charge de 700 g il vibre en un seul fuseau et l'amplitude de cette vibration est maximale. En déduire la fréquence.

2° Pour quelle charge le fil vibrerait-il en trois fuseaux?

3° L'électro-aimant a une inductance $L = 0,1 \text{ henry}$ et une résistance $R = 20 \text{ ohms}$. Quelle est l'intensité efficace qui le traverse?

97. 1. La tension aux bornes d'un secteur alternatif est donnée par la formule $u = 155,4 \sin 314,16 t$.

Un voltmètre thermique de résistance 990 ohms et un ampèremètre thermique de résistance négligeable, reliés en série, sont disposés aux bornes de ce secteur.

En dérivation sur les bornes du voltmètre se trouve une lampe à incandescence dont la résistance actuelle est R . L'ampèremètre marque 0,94 ampère. On demande :

- 1° la fréquence du courant alternatif;
- 2° la différence de potentiel marquée par le voltmètre;
- 3° la résistance actuelle de la lampe;
- 4° la puissance consommée dans cette lampe.

II. On fait plonger la lampe dans un calorimètre contenant 1 200 g d'eau; les accessoires de ce calorimètre sont en laiton de chaleur massique 0,094 cal/(g° C) et pèsent 100 g. Au bout de 4 minutes 20 secondes, l'élévation de température marquée par le thermomètre du calorimètre est 4,72° C. On demande de déterminer d'après cette expérience l'équivalent mécanique de la calorie. On négligera les capacités calorifiques du thermomètre, du calorimètre et du verre de l'ampoule de la lampe.

98. Deux bornes présentent une différence de potentiel sinusoïdale efficace de 120 volts et de fréquence $140/\pi$ Hz.

Entre ces bornes on monte en série une bobine, d'inductance L et de résistance 12,4 ohms, et une lampe à incandescence sans inductance et dont la résistance est de 83,6 ohms dans les conditions de l'expérience.

Cette lampe est plongée dans un calorimètre à circulation d'eau. On règle le débit de sorte que la différence de température entre l'eau qui arrive au fond du calorimètre et celle qui se déverse par le haut soit 2 degrés exactement. Le débit est alors égal à 864 cm³ par minute.

Calculer :

- 1° l'intensité efficace du courant;
- 2° l'intensité instantanée, en fonction du temps;
- 3° l'impédance de l'ensemble : bobine et lampe;
- 4° le facteur de puissance de l'ensemble;
- 5° la différence de potentiel efficace aux bornes de la lampe;
- 6° la différence de potentiel instantanée aux bornes de la lampe;
- 7° l'impédance de la bobine.

99. Entre deux points A et B existe une différence de potentiel alternative $u = U_m \sin \omega t$, de fréquence 2 000 Hz.

1° L'intensité efficace dans une résistance $R_1 = 100$ ohms est de 1 ampère.

Quelle est l'expression de la différence de potentiel u ? Quelle est la puissance dépensée dans R_1 ?

2° Une bobine L de résistance négligeable, placée directement entre A et B, laisse passer également un courant d'intensité efficace 1 ampère.

Quelle est l'inductance de la bobine?

Sachant qu'elle est constituée par des spires circulaires régulièrement distribuées dont la section est de 40 cm², que sa longueur est 1 m et qu'elle possède les propriétés du solénoïde théorique, calculer le nombre de spires.

3° La bobine et la résistance sont placées en série entre A et B. Quelle est l'expression de l'intensité du courant i dans le circuit? Quelle est la puissance dépensée entre A et B?

4° En série avec la bobine et la résistance, on place un condensateur de capacité C . Quelle doit être la valeur de C pour que l'intensité efficace du courant soit de nouveau 1 ampère?

Quelles sont alors les expressions des différences de potentiel aux bornes de la résistance, de la bobine, du condensateur?

Quelle est la puissance dépensée dans le circuit? Expliquer ce résultat.

100. Un petit alternateur est constitué par un cadre carré de 10 cm de côté, formé de 100 tours de fil, tournant d'un mouvement uniforme autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre. Ce cadre est placé dans un champ d'induction uniforme de 0,1 tesla et l'axe de rotation est perpendiculaire à l'induction. Les extrémités de l'enroulement

aboutissent à deux bagues, isolées l'une de l'autre, portées par l'axe, et sur lesquelles frottent deux balais permettant de relier l'alternateur à un circuit extérieur.

1° Dans une première expérience le courant passe dans un fil en cuivre de longueur 0,81 m, tendu par le poids d'une masse de 4 kg, et ayant, dans ces conditions, une masse de 6 g par mètre de longueur; le milieu du fil est placé entre les pôles d'un aimant en U. Le fil entre en résonance et l'on constate qu'il présente un seul ventre de vibration en son milieu. En déduire la fréquence du courant alternatif qui passe dans le fil, ainsi que le nombre de tours effectués par seconde par le cadre tournant.

On prendra $g = 9,8$ u. SI.

2° On demande de calculer la valeur efficace de la force électromotrice développée dans le cadre tournant.

Dans la suite du problème, on admettra que la résistance et l'inductance du cadre sont négligeables et que, par suite, la différence de potentiel aux bornes de l'alternateur se confond avec sa force électromotrice.

3° Dans une nouvelle expérience, les balais sont réunis aux extrémités d'une résistance pure, plongée dans l'eau d'un calorimètre.

On constate que la chaleur dégagée élève de 4,25° C en une heure la température du calorimètre dont la valeur totale en eau est 1 000 g. On demande la valeur de cette résistance ainsi que celle de l'intensité efficace du courant qui la traverse.

4° Dans une dernière expérience, on dispose en série entre les deux balais la résistance précédente et une bobine dont la résistance est négligeable.

On constate que la chaleur dégagée dans le calorimètre est quatre fois plus faible que dans l'expérience précédente. On demande :

- a. La nouvelle valeur de l'intensité efficace;
- b. Le facteur de puissance du circuit;
- c. L'inductance de la bobine.

101. 1° Un aimant permanent NS placé au centre d'une bobine plate horizontale tourne à 3 000 tr/mn autour d'un axe horizontal. Le flux d'induction qu'il envoie à travers la bobine varie d'une façon sensiblement sinusoïdale en fonction du temps entre les limites $\pm 5 \times 10^{-3}$ weber. Calculer la pulsation et la valeur efficace de la force électromotrice qui apparaît aux bornes de la bobine.

2° La bobine est réunie à un générateur de fréquence 50 Hz; le courant qui la traverse crée dans toute la région où tourne l'aimant un champ d'induction sinusoïdale verticale B_1 d'intensité efficace 5×10^{-3} tesla. A l'aide d'une autre bobine,

on crée dans la même région un champ d'induction B_2 , de même intensité et de même fréquence, mais de direction horizontale et en quadrature avec B_1 . Montrer que la résultante de B_1 et B_2 est une induction magnétique B d'intensité constante, dont la direction tourne autour d'un axe $x'x$ avec une vitesse angulaire constante.

3° On suppose que B et l'aimant tournent tous deux dans le même sens autour de l'axe $x'x$. Montrer que B exerce sur l'aimant un couple dont l'intensité reste constante dans le temps si l'aimant tourne d'un mouvement de rotation uniforme avec la vitesse indiquée plus haut. Ce couple dépend de

l'angle α que fait B avec NS; montrer qu'il peut être moteur ou résistant et calculer sa valeur maximale. Le moment magnétique de l'aimant est 1 unité SI.

4° Dans le cas où le dispositif constitue un moteur électrique, calculer l'angle α , sachant que la puissance mécanique fournie est 10 W. On néglige les frottements.

102. Un fil de fer cylindrique AB, de 1 mm² de section et de 80 cm de longueur, est tendu par un poids P .

1° Évaluer P sachant que la fréquence du son fondamental rendu par ce fil en vibrant transversalement est $f = 25$ Hz.

2° On tend le fil par un poids $4P$; on présente en face de son point C (tel que $AC = AB/4$) un pôle d'un petit électroaimant alimenté par un courant alternatif; le fil vibre intensément en se partageant en 2 fuseaux identiques. Expliquer cette expérience et calculer la fréquence du courant.

3° La résistance de la bobine de l'électro est $R = 12$ ohms; le courant qui la traverse a pour intensité efficace 4 ampères; la différence de potentiel efficace entre ses bornes est 80 volts. Calculer l'impédance et l'inductance de cette bobine.

4° Calculer la quantité de chaleur produite par minute dans la bobine.

5° Calculer le facteur de puissance.

6° En prenant pour origine des temps un instant où la tension aux bornes de la bobine s'annule, écrire les expressions, en fonction du temps :

a. de la tension aux bornes de la bobine;

b. de l'intensité du courant dans la bobine.

7° Calculer la valeur de l'intensité au moment où la tension est nulle et tracer les courbes qui représentent, en fonction du temps, la tension et l'intensité.

8° Calculer la capacité du condensateur qu'il faudrait mettre en série avec la bobine pour que l'intensité du courant soit en phase avec la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble. On prendra 4,2 joules pour équivalent mécanique de la calorie;

Masse volumique du fer : $7,7 \text{ g/cm}^3$.

103. 1° Une bobine ayant une résistance de 120 ohms est placée, en série avec un ampèremètre thermique de résistance négligeable, aux bornes d'un secteur de courant alternatif sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz et de 120 volts de différence de potentiel efficace. L'ampèremètre indique 0,5 ampère. Calculer l'impédance de la bobine et le déphasage entre l'intensité du courant et la différence de potentiel aux bornes de la bobine.

2° Un condensateur est placé, en série avec l'ampèremètre, aux bornes du même secteur. L'ampèremètre indique 0,5 ampère. Quelle est la capacité du condensateur et quel est le déphasage entre l'intensité du courant et la différence de potentiel aux bornes du condensateur?

3° La bobine, le condensateur et l'ampèremètre précédents sont placés en série aux bornes du même secteur. Quelle est l'indication de l'ampèremètre?

4° La bobine et le condensateur précédents sont montés en parallèle et cet ensemble est monté en série avec l'ampèremètre aux bornes du même secteur. Sachant que la valeur instantanée de l'intensité totale du courant i fourni par le générateur est la somme des valeurs instantanées des intensités dérivées, construire suivant la règle de Fresnel les vecteurs représentant : i_1 , intensité traversant la bobine; i_2 , intensité traversant le condensateur, et i , intensité totale traversant l'ampèremètre. En déduire le déphasage entre l'intensité totale i du courant et la différence de potentiel aux bornes du secteur. Quelle est l'indication de l'ampèremètre? Écrire la fonction sinusoïdale liant l'intensité totale exprimée en ampère et le temps exprimé en seconde.

104. 1° Un solénoïde mesure 2 m de long, 4 cm de diamètre. Il porte 1 600 tours de fil de cuivre de 1 mm de diamètre. Quelles sont l'inductance et la résistance de ce solénoïde? La résistivité du cuivre est égale à $1,7 \times 10^{-8}$ ohm-mètre.

2° On forme un condensateur en collant en regard, sur les deux faces d'une lame de verre de 1,2 mm d'épaisseur, deux feuilles carrées de papier d'aluminium, mesurant 50 cm de côté. Quelle est la capacité du condensateur ainsi formé? En admettant que la lame de verre résiste à une tension de 10 000 volts au maximum, quelle énergie maximale peut emmagasiner ce condensateur?

Constante diélectrique du verre : $\epsilon = 5$.

3° Pour quelle fréquence f l'intensité du courant traversant le circuit formé du solénoïde et du condensateur ci-dessus montés en série est-elle maximale lorsqu'on applique aux bornes de ce circuit une tension sinusoïdale de valeur efficace donnée?

4° On alimente ce circuit par une tension alternative sinusoïdale ayant la fréquence ci-dessus. A partir de quelle valeur efficace de cette tension le condensateur risque-t-il d'être mis hors d'usage?

105. On dispose de deux bobines : l'une B_1 a pour résistance 100 ohms et pour inductance 0,5 henry; l'autre B_2 a pour résistance 150 ohms et pour inductance 70 millihenrys.

1° On les monte d'abord en série en reliant les bornes extrêmes à un secteur alternatif de fréquence 50 Hz et de tension efficace 120 volts.

Évaluer le courant qui passe dans le circuit, la différence de phase entre courant et tension et la puissance dépensée dans l'ensemble des deux bobines.

2° On monte ensuite les deux bobines en parallèle entre les bornes du même secteur.

Évaluer les courants qui traversent chacune des bobines, les différences de phase entre ces courants et la tension, puis entre ces courants eux-mêmes.

106. On veut réaliser une résistance destinée à un petit four électrique qui doit fournir une puissance de 600 watts lorsqu'il est branché aux bornes d'une installation électrique entre lesquelles est maintenue une tension sinusoïdale de valeur efficace 120 volts et de fréquence 50 hertz.

1° Quelle doit être la valeur de cette résistance supposée non inductive?

Cette condition n'est pas entièrement réalisée, et la résistance ayant la valeur trouvée, on observe une variation relative de 1 % de la puissance prévue. Quelle est la valeur de l'inductance L de ce conducteur?

2° On remplace le four aux bornes de l'installation par un petit moteur électrique de même puissance et dont le facteur de puissance est 0,8.

Quelle est l'intensité efficace du courant?

Quelle est la puissance dissipée dans la ligne qui amène le courant aux bornes de l'installation si la résistance de cette ligne est 2 ohms?

On se propose de rendre ces pertes en ligne aussi petites que possible en plaçant un condensateur en dérivation aux bornes du moteur. Quelle doit être sa capacité?

3° Le four et le moteur, dépourvu du condensateur précédent, sont maintenant branchés en dérivation aux bornes de l'installation.

Quelle est la valeur efficace de l'intensité du courant total en ligne?

Calculer le facteur de puissance de l'ensemble four-moteur ainsi branchés.

107. Un cadre plat contenant $N = 200$ spires de fil de cuivre, ayant une surface $S = 50 \text{ cm}^2$, tourne autour d'un axe horizontal O dans un champ magnétique vertical et uniforme d'induction $B = 0,1$ tesla. Les extrémités des enroulements sont reliées par des bagues à un circuit fixe sans inductance, de résistance $R = 1$ ohm. Le cadre fait $15,9 = 50/\pi$ tours par seconde.

1° Un ampèremètre thermique indique que le circuit est parcouru par un courant d'intensité efficace $I = 5$ ampères. Quelle est la puissance transformée en chaleur par effet Joule dans le circuit extérieur?

2° Former l'expression qui donne la valeur de la force électromotrice e induite dans le cadre à l'instant t , en prenant comme origine des temps le moment où la normale ON au cadre coïncide avec la direction du vecteur induction magnétique. Calculer la valeur efficace de cette force électromotrice.

3° L'enregistrement du courant i dans le circuit montre que le courant s'annule quand la normale ON fait avec la

direction de B un angle de $+\frac{\pi}{4}$ rad compté positivement dans le sens de rotation du cadre.

Quelle est la puissance électrique totale créée dans tout le circuit?

4° Soit u la valeur instantanée de la différence de potentiel aux bornes du cadre. Former l'expression $e - u$ de la chute de potentiel dans le cadre en fonction de t . Déduire de cette

expression que la puissance consommée dans le cadre est nulle. Peut-on calculer l'inductance du cadre ?

$$R = 30 \text{ ohms}; \\ L = 0,10 \text{ henry}.$$

108. Deux récepteurs de courant alternatif sont alimentés au moyen d'une différence de potentiel alternative dont la valeur efficace est de 128 volts. Tous deux consomment une puissance réelle de 2 kilowatts.

1° Le premier récepteur est un radiateur. Son facteur de puissance est égal à 1. Quelle est l'intensité efficace et l'intensité maximale du courant qui le parcourt ?

2° Le deuxième est un moteur. Son facteur de puissance est seulement égal à 0,6 dans les conditions de son emploi. Quelle est l'intensité efficace et l'intensité maximale du courant qui le parcourt ?

3° La ligne d'alimentation du radiateur a une résistance de 1 ohm. Quelle est l'énergie perdue en ligne ?

4° Quelle devra être la résistance de la ligne d'alimentation du moteur pour que l'énergie perdue en ligne soit la même que dans le cas précédent ?

5° Les résultats précédents vous permettent-ils de comprendre les raisons pour lesquelles les producteurs d'électricité pénalisent les usagers utilisant des appareils dont le facteur de puissance est faible ?

109. 1° On dispose en série entre les points A et B une bobine de résistance R et d'inductance L et un condensateur de capacité C . Cette portion de circuit est soumise à une différence de potentiel sinusoïdale : $u = U_m \cos \omega t$ de fréquence 50 hertz et de valeur efficace égale à 110 volts.

a. Calculer numériquement la tension maximale U_m et la pulsation ω .

b. On désigne par i la valeur algébrique instantanée du courant et par q la charge algébrique instantanée portée par une armature du condensateur. Quelle relation y a-t-il entre i et q ?

Exprimer la différence de potentiel u entre les points A et B en fonction de R , de L , de C , de i , et de sa dérivée par rapport au temps et de q , puis en fonction de R , de L , de C , de q , et de ses dérivées première et seconde.

2° On admet qu'en régime permanent, l'intensité i est de la forme : $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. Donner l'expression de l'impédance Z de la portion de circuit. Calculer numériquement Z , I_m , l'intensité efficace et $\tan \varphi$ avec les données numériques suivantes :

$$R = 100 \text{ ohms} \quad L = 0,5 \text{ henry} \quad C = 10 \text{ microfarads}.$$

Calculer L pour qu'il y ait résonance.

3° Une masse m est suspendue à l'extrémité libre d'un ressort d'axe vertical et de raideur k (On appelle raideur d'un ressort le facteur par lequel il faut multiplier l'allongement pour obtenir la tension du ressort.) La masse m est soumise à une force de direction verticale et d'intensité f , comptée positivement vers le bas, et sinusoïdale : $f = F_m \cos \omega t$. Elle est de plus soumise à une force de frottement de module

proportionnel au module de la vitesse : $f' = -\mu v$. La masse m ne peut qu'osciller verticalement et on désignera par x la valeur algébrique de son déplacement vers le bas à partir de sa position d'équilibre.

a. Exprimer la force appliquée instantanée f en fonction de m , de μ , de k , de x et de ses dérivées première et seconde par rapport au temps, puis en fonction de m , de μ , de k , de v , de sa dérivée et de sa primitive.

b. On constate que la masse m est soumise à des oscillations forcées de pulsation ω , sa vitesse étant de la forme : $v = V_m \cos(\omega t - \varphi)$. Montrer comment on peut déterminer V_m et $\tan \varphi$ par un diagramme de Fresnel.

c. Définir, par analogie avec le problème électrique précédent, une impédance mécanique Z dont on donnera l'expression en fonction de m , de μ , de k , et de ω ; que se passe-t-il pour : $m\omega^2 = k$? Donner dans ce cas particulier l'expression de x et décrire le mouvement. Que se passerait-il s'il n'y avait pas d'amortissement ?

110. 1° Une bobine inductive A, de résistance R , a pour inductance L . Elle porte les indications suivantes, fournies par le constructeur :

Pour contrôler ces indications, on procède aux essais suivants :

a. La bobine est alimentée en courant continu, sous la tension de 6,00 volts. L'intensité qui la traverse est alors de 197 milliampères ;

b. La bobine est alimentée en courant alternatif sinusoïdal, de fréquence 50 Hz, sous la tension efficace 12,0 volts. L'intensité efficace du courant qui la traverse est 270 milliampères.

Calculer les valeurs de la résistance et de l'inductance déduites de ces essais.

Sont-elles en accord avec les indications du constructeur ?

Pour les calculs de la 3° question, on adoptera les valeurs numériques données au début pour R et L .

2° Un condensateur B, de capacité $C = (1,00 \pm 0,01)$ microfarad, est formé d'un empilement alterné de feuilles métalliques carrées, de côté $a = (7,0 \pm 0,05)$ cm, d'épaisseur $b = (0,10 \pm 0,005)$ mm, et de feuilles de matière isolante, de même épaisseur b , de constante diélectrique (ou permittivité relative) $\epsilon_r = 5,4 \pm 0,05$.

Toutes les feuilles paires sont reliées entre elles, formant l'une des armatures du condensateur, dont l'autre armature est constituée par l'ensemble des feuilles impaires.

Quel nombre de feuilles métalliques doit-on utiliser ?

A combien d'unités près ce nombre est-il déterminé ?

Quelle est l'épaisseur de l'empilement ainsi réalisé ?

On rappelle l'expression de la capacité du condensateur plan :

$$C = \frac{\epsilon_r S}{36 \pi \cdot 10^9 \cdot e} \quad (\text{système international})$$

3° On monte en série :

— la bobine A ;

— le condensateur B ;

— une résistance r , non inductive.

Aux bornes de l'ensemble ainsi réalisé, on établit une d.d.p. alternative u telle que :

$$u = U \sqrt{2} \sin \omega t, \text{ avec } U = 12,0 \text{ volts}.$$

L'intensité i du courant dans le circuit est alors :

$$i = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

Indiquer comment varient I et la phase φ , en fonction de la pulsation ω . On supposera que la fréquence du courant a une valeur maximale de 1 000 hertz.

ω_0 étant la pulsation correspondant à la valeur maximale I_0 de I , donner l'expression, en fonction de R , r , L , C et ω , du rapport I/I_0 .

Calculer numériquement ω_0 ; construire, sur un même graphique, les courbes représentant les variations de I/I_0 en fonction de $x = \omega/\omega_0$ dans les deux cas suivants :

a. $r = 70$ ohms ;

b. $r = 970$ ohms.

On pourra en particulier, calculer les ordonnées des points d'abscisses $x = \sqrt{2}/2$ et $x = \sqrt{2}$. Quels enseignements peut-on tirer de la comparaison de ces courbes ?

111. A l'intérieur d'un champ magnétique uniforme horizontal d'induction $B = 1$ tesla on dispose dans un plan vertical un cercle métallique de rayon $r = 2$ cm et de résistance R . Ce cercle est constitué par un fil de cuivre de diamètre 1 mm et de résistivité $\rho = 1,6 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

1° On suppose d'abord que l'inductance du circuit est négligeable.

On fait tourner le cercle autour de son diamètre vertical d'un mouvement uniforme de vitesse $N = 50$ tours par seconde.

A l'instant zéro, le vecteur induction magnétique est perpendiculaire au plan du cercle. A l'instant t , l'angle de ce vecteur et de la normale au plan du cercle est $2\pi \cdot N \cdot t$.

a. Calculer l'intensité efficace du courant produit dans le fil.

b. Calculer la quantité de chaleur dégagée par seconde.

c. Calculer la puissance qu'il faut dépenser pour maintenir le mouvement uniforme et en déduire le moment du couple moteur moyen que l'on doit appliquer au système.

2° On suppose ensuite que l'inductance L du circuit n'est pas négligeable.

Donner l'expression de l'intensité efficace du courant produit dans le fil.

Que devient-elle si la vitesse de rotation croît indéfiniment?

112. Entre deux bornes X et Y on établit une différence de potentiel sinusoïdale de valeur efficace $U = 20$ volts et de fréquence $f = 50$ Hz. Ces grandeurs sont supposées constantes dans tout ce qui suit. On réunit les bornes X et Y par un circuit comprenant en série la bobine d'un petit électro-aimant E et une résistance non inductive $r = 5$ ohms.

1° L'électro-aimant est placé de manière à pouvoir attirer en son milieu une corde de fer tendue entre deux points fixes A et B distants de 1 mètre dans le plan horizontal. La section droite de la corde est un cercle de diamètre 0,5 millimètre et la masse volumique du métal est égale à 7,7 g/cm³. Quelle doit être la tension de la corde pour qu'elle vibre en un fuseau avec l'amplitude maximale?

2° La résistance non inductive ($r = 5$ ohms) est plongée dans un calorimètre. On constate ainsi que le passage du courant produit dans cette résistance un dégagement de chaleur de 5 270 calories en un quart d'heure. Quelle est l'intensité efficace / du courant?

3° On mesure les différences de potentiel efficaces U_1 aux bornes de r d'une part, et U_2 aux bornes de la bobine d'autre part, pendant le passage du courant. On trouve que $U_2 = U_1$. Indiquer la valeur et le sens du déphasage φ qui existe entre le courant i et la différence de potentiel u prise entre les bornes X et Y à chaque instant. D'où provient ce déphasage? Quelle est l'expression, en fonction du temps, de la valeur instantanée i sachant que u est donnée par la formule $u = U_m \sin \omega t$? Quelle est la puissance débitée dans l'ensemble du circuit?

4° Calculer le déphasage φ' entre le courant i et la différence de potentiel instantanée u' aux bornes de l'électro-aimant. En déduire la valeur de la résistance r' et de l'inductance L de l'électro-aimant, dans ces conditions d'emploi.

113. Un condensateur variable rotatif C est formé de 4 lames fixes entre lesquelles s'engagent 3 lames mobiles demi-circulaires de 6 cm de rayon. La distance qui sépare une lame fixe d'une lame mobile est d'un demi-millimètre.

L'angle dont tournent les lames mobiles est repéré par un index se déplaçant devant un cadran gradué de 0° à 180°.

1° Sachant que deux lames métalliques de 100 cm² séparées par un intervalle de 1 cm forment un condensateur ayant

dans l'air une capacité de $\frac{1}{36\pi}$ millièmes de microfarad, calculer la capacité maximale du condensateur C ; l'index indique alors 180°.

2° Ce condensateur et une inductance de 2×10^{-4} henry constituent un circuit résonateur, capteur d'onde hertzienne. Déterminer les positions de l'index lorsque le circuit est accordé sur les longueurs d'onde : 280 m et 560 m? On supposera que la capacité est proportionnelle aux indications de l'index.

3° Une station émettrice réglée sur 280 m produit dans le circuit une force électromotrice efficace de 10⁻⁴ volt.

Quelle est l'intensité qui s'établit dans le circuit, supposé réglé sur cette longueur d'onde, sachant que la résistance ohmique est de 0,1 ohm?

4° De combien doit-on, à partir du réglage effectué sur la longueur d'onde de 280 m, déplacer l'index du condensateur pour réduire le courant au millième de sa valeur, afin de ne plus entendre l'émission? Sur quelles longueurs d'onde le circuit sera-t-il alors accordé?

ELECTRONIQUE

114. Un faisceau d'électrons tombe sur une plaque métallique de masse m' , de chaleur massique c , qui s'échauffe de θ degrés. On demande :

1° quelle est la masse totale M des électrons reçus par la plaque, sachant que leur vitesse était v ;

2° quel temps mettrait un accumulateur débitant I ampère sous une différence de potentiel de U volt pour produire la même quantité d'énergie;

3° quelle est la différence de potentiel existant entre la cathode et la plaque connaissant la charge $-e$ d'un électron et sa masse m ?

Application numérique :

$m' = 2$ grammes;
 $c = 0,03$ calorie par gramme et par °C;
 $\theta = 1\,000$ degrés;
 $v = 30\,000$ km/s;
 $U = 2$ volts;
 $I = 1$ ampère;
 $e = 1,6 \times 10^{-19}$ coulomb;
 $m = 9 \times 10^{-31}$ kilogramme.

115. Dans un tube électronique, le champ électrique créé entre l'anode et la cathode accélère les électrons jusqu'à leur communiquer une vitesse de 30 000 km/s.

1° La masse de chaque électron étant de $0,9 \times 10^{-30}$ kg, calculer son énergie cinétique.

2° Le faisceau d'électrons rencontre une petite plaque de platine pesant 3 g, qui arrête complètement les électrons et s'échauffe. Sachant qu'un galvanomètre, placé dans le circuit du tube, indique un courant de 0,8 milliampère, calculer l'échauffement de la plaque au bout d'une minute.

On donne : charge de l'électron $e = 1,6 \times 10^{-19}$ coulomb; chaleur massique du platine $c = 0,035$ cal/(g.°C); équivalent mécanique de la calorie : 4,18 joules.

On admet que toute l'énergie cinétique des électrons est transformée en chaleur.

3° Dans une autre expérience, le même faisceau cathodique, horizontal, subit sur une longueur de 20 cm l'action d'un champ électrique établi entre les armatures d'un condensateur plan. Les armatures sont distantes de 5 cm et présentent une différence de potentiel de 500 volts; les électrons sont alors soumis à une force verticale dont on demande l'intensité.

Étudier la trajectoire des électrons à partir du moment où ils pénètrent dans le champ et, en particulier, déterminer le déplacement vertical des électrons à la sortie du champ, ainsi que l'angle dont a dévié le faisceau électronique.

116. On considère un tube cylindrique en verre où l'on a fait le vide.

A ses extrémités se trouvent deux électrodes entre lesquelles on établit une différence de potentiel constante et égale à U . A est l'anode, C la cathode.

On admet qu'entre A et C se développe un champ électrique E de grandeur constante et dont la direction est parallèle à l'axe du tube.

On suppose que, par effet thermoélectronique, on fasse apparaître à la surface de la cathode des électrons, de masse m et de charge $-e$, sans vitesse initiale.

1° Soit l la distance comprise entre les deux électrodes : Donner l'équation du mouvement d'un électron. Calculer le temps qu'il met à parcourir la distance l . Calculer sa vitesse lorsqu'il arrive sur l'anode. Calculer son énergie cinétique et montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de e et de U .

2° On suppose que, dans l'expérience, n électrons arrivent par seconde sur l'anode, où leur vitesse s'annule. Que devient l'énergie cinétique? En supposant qu'elle soit transformée entièrement en chaleur, calculer la quantité de chaleur Q en calorie, qui apparaît par seconde sur l'anode.

3° On veut maintenir l'anode à une température de θ° C. Pour cela on fait circuler à l'intérieur du métal qui la constitue de l'eau prise à une source de température θ' . Quel est le débit d'eau, en litres par seconde, qu'il faut réaliser?

Application numérique : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ coulomb; $m = 0,9 \times 10^{-30}$ kg; $U = 3\,000$ volts; $l = 10$ cm, $n = 10^{17}$, $\theta = 20^\circ$; $\theta' = 10^\circ$ C.

117. 1° Dans un tube électronique la vitesse, en fin de parcours, des électrons constituant le faisceau est égale à

40 000 km par seconde. Sachant que la charge d'un électron est $e = 1,6 \times 10^{-19}$ coulomb et que sa masse (supposée indépendante de la vitesse) est $m = 0,9 \times 10^{-30}$ kg, calculer la différence de potentiel entre l'anode et la cathode.

2° On concentre le faisceau d'électrons sur une plaque de platine d'épaisseur 1 mm et de surface 1 cm^2 . En une minute, la température du platine s'élève de 20°C à 1770°C (température de fusion). Calculer le nombre n d'électrons émis par seconde par la cathode et l'intensité du courant qui traverse le tube. On donne : chaleur massique du platine : $0,035 \text{ cal/(g}^\circ\text{C)}$; densité du platine : 21,4. On suppose que toute l'énergie transportée par le faisceau est convertie en chaleur.

3° Le faisceau horizontal d'électrons, convenablement diaphragmé, passe entre les armatures AB, CD d'un condensateur plan, puis va frapper un écran fluorescent produisant ainsi une petite tache lumineuse. S'il n'existe aucune différence de potentiel entre les plateaux, la tache lumineuse est en O; lorsqu'on établit une différence de potentiel convenable, le faisceau est dévié et la tache vient en O'. Dans son parcours entre les plateaux AB, CD chaque électron est alors soumis à une force verticale égale à 18×10^{-15} newton.

$$AB = CD = 2 \text{ cm}$$

et l'extrémité BD du condensateur est à 24 cm de O.

a. Étudier la trajectoire des électrons entre les plateaux du condensateur.

b. En déduire la déviation OO'. On admettra qu'à l'entrée du condensateur la vitesse des électrons est égale à 40 000 km par seconde.

118. On rappelle que la radioactivité d'un sel de radium est due à la destruction spontanée des atomes de radium et que, en moyenne, il se détruit un atome sur 2 300 au cours d'une année.

A. Calculer le nombre des atomes détruits chaque seconde dans une masse de radium de 10^{-3} g (on prendra le nombre entier le plus voisin du résultat trouvé). On donne le nombre d'Avogadro : $N = 6,02 \times 10^{23}$ et $R_a = 226$.

B. A la suite de réactions nucléaires n'intervenant pas ici, un atome de radium en se détruisant donne naissance à quatre particules α de masse m et de charge q . Expérimentant sur 1 g de radium, on constate que les particules convenablement recueillies transportent une quantité d'électricité équivalente à un courant de $4,6 \times 10^{-4}$ A. En déduire la charge q d'une particule α .

C. Une particule α , soumise à l'action d'une induction magnétique $\vec{B}$, décrit une trajectoire circulaire de rayon r d'un mouvement uniforme de vitesse v . L'action du champ sur la particule équivaut à une force centripète d'expression $\varphi = Bqv$. Établir la relation qui existe entre B, r, q, v, m en négligeant le poids de la particule.

Mettre la relation trouvée sous la forme :

$$\frac{1}{2} mv^2 = f(q, B, r, v).$$

D. Un gramme de radium dissipe en une heure une énergie de 140 calories représentant pratiquement l'énergie cinétique des particules α .

a. Calculer l'énergie cinétique d'une particule α .

b. Calculer la vitesse d'une particule α . (Utiliser les résultats du § C.)

Application numérique : $B = 0,965$ tesla; $r = 40$ cm.

c. Calculer la masse m d'une particule α .

119. 1° Le radium, au cours de sa désintégration spontanée, émet des particules α (noyaux d'hélium) dont on peut déterminer le nombre émis pendant un temps donné. On peut recueillir l'hélium dégagé. Or, on a mesuré, dans les conditions normales, $0,578 \text{ mm}^3$ d'hélium en 587 jours et on a dénombré dans le même temps $1,648 \times 10^{18}$ particules α .

En déduire une valeur approchée du nombre d'Avogadro N . 2° Les particules α émises dans le vide et chargées d'électricité positive sont reçues sur une armature d'un condensateur dont la capacité est 10^{-3} microfarad, l'autre armature

étant au sol. Au bout de 30 secondes, la différence de potentiel entre les armatures est de 312 volts.

a. Quelle est la charge prise par le condensateur en une seconde?

b. Combien de particules atteignent l'armature en une seconde?

c. Quelle est la charge d'une particule α ? Combien de charges élémentaires contient-elle?

On rappelle que l'hélium est monoatomique et que le volume molaire, dans les conditions normales, est de $22,400 \text{ cm}^3$.

La charge élémentaire d'électricité est de $1,6 \times 10^{-19}$ coulomb.

PROBLÈMES GÉNÉRAUX

120. 1° Lorsqu'un système matériel perd de l'énergie ΔE , il subit une diminution corrélative de masse Δm donnée par la relation fondamentale d'Einstein :

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

(Dans cette formule, c désigne la vitesse de la lumière.)

Par ailleurs, la combustion complète d'un atome-gramme de carbone, soit 12 g, dégage une quantité de chaleur égale environ à 95 kcal. A l'aide de la relation d'Einstein, calculer en grammes la perte correspondante de masse du système $\text{C} + \text{O}_2$ lorsqu'il devient CO_2 . Cette variation de masse est-elle appréciable à l'aide des balances les plus sensibles? Que peut-on en déduire au sujet de la validité de la loi de Lavoisier?

2° Une réaction nucléaire entre protons et neutrons produit un atome-gramme d'hélium (soit 4 g d'hélium) en s'accompagnant d'une perte de masse de 0,03 g. A l'aide de la relation d'Einstein, calculer le dégagement correspondant d'énergie. Quelle est la masse que cette énergie permettrait théoriquement d'élever à UN kilomètre de hauteur? Calculer la masse de carbone qui serait nécessaire pour donner, par combustion complète, la même énergie que la synthèse de 4 g d'hélium.

121. Un véhicule de masse 6 tonnes est animé d'une vitesse de 36 km/heure. En palier horizontal, moteur débrayé, sous l'action des résistances passives qu'on suppose constantes, le véhicule s'arrête en 30 secondes après le débrayage.

1° On demande :

a. le chemin parcouru pendant ces 30 secondes;

b. la valeur des résistances passives;

c. la puissance utile du moteur.

On prendra $g = 10 \text{ u. SI}$.

2° Ce véhicule dit « gyrobus » est entraîné par des moteurs électriques. L'énergie électrique est fournie par un générateur sur l'axe duquel est fixé un lourd volant jouant le rôle d'accumulateur d'énergie. Le générateur peut servir de moteur pour lancer le volant, le véhicule étant à l'arrêt.

Au début on lance le volant à 3 000 tours par minute, puis on débranche. Le véhicule utilise alors le courant fourni par le générateur et effectue un parcours de 6 km en palier à 36 km/h (1° question).

Le volant a un diamètre moyen de 1,6 m et une masse de 1 500 kg supposée répartie sur la jante. Le rendement de la propulsion étant de 60 p. 100, quelle est la vitesse de rotation du volant au bout des 6 km?

3° Après ce parcours, on recharge le volant en trois minutes : quelle doit être la puissance moyenne absorbée par le moteur si le rendement est de 85 p. 100, le facteur de puissance valant 0,75 et la tension d'alimentation 500 volts? Quelle est l'intensité du courant?

122. Un train électrique, de Narbonne à Toulouse, sans arrêt, a fourni les données suivantes :

Consommation d'énergie	1 940 kWh
Vitesse soutenue de marche	100 km/h
En palier pour cette vitesse :	
Intensité du courant capté	720 A
Tension en ligne (continue)	1 500 V
Charge du train, machine comprise	600 t
Distance Narbonne-Toulouse	150 km
Altitude du rail à Narbonne	10,8 m
Altitude du rail à Toulouse	142,8 m
On prendra $g = 10 \text{ u. SI}$.	

1° En palier et en mouvement uniforme, établir la relation entre la puissance P de la machine en kW, la résistance R à la traction (en kgf par tonne) et la vitesse v en km/h. En déduire la valeur de R avec les données numériques ci-dessus.

2° Que devient la relation précédente quand la voie n'est plus en palier? Représenter la pente par ρ (en millièmes), positive pour une montée, négative pour une descente. En prenant pour R la valeur numérique trouvée plus haut, donner pour 1 500 V en ligne et pour 100 km/h l'intensité du courant capté par la machine :

a. dans une descente de 3 p. 1 000;

b. dans une montée de 5 p. 1 000.

3° Quel gain de temps réaliserait-on sur ce parcours en portant la vitesse de marche à 110 km/h? En admettant la résistance à la traction proportionnelle au carré de la vitesse, quelle nouvelle valeur aurait-on pour R ? Quelle serait la nouvelle consommation? La comparer à celle qu'on a donnée. Que conclure de l'usage des grandes vitesses?

N. B. — Cette dernière question peut être traitée très simplement moyennant l'usage d'approximations légitimes.

123. Un cadre carré plan, de côté $l = 10$ cm, est formé de 10 spires de fil conducteur dont les extrémités sont réunies à deux bagues en cuivre, isolées l'une de l'autre. L'ensemble du cadre et des bagues peut tourner autour d'un axe horizontal, situé dans le plan du cadre, passant par son centre, et parallèle à l'un de ses côtés.

A. On établit dans la région du cadre un champ magnétique uniforme, horizontal, perpendiculaire à l'axe de rotation du cadre et d'induction $B = 0,2$ tesla. On fait tourner le cadre autour de son axe d'un mouvement uniforme, à la vitesse de 50 tours par seconde.

a. Donner l'expression de la force électromotrice induite dans le cadre à un instant quelconque. Calculer sa valeur.

b. On fait frotter sur les bagues deux balais réunis par un conducteur ayant une résistance non inductive $R = 4\Omega$. Quelle est la puissance nécessaire pour entretenir le mouvement du cadre, sachant que sa résistance est de 1Ω ? On négligera l'inductance du cadre et les frottements.

B. Sur l'axe du cadre est fixée une poulie P de rayon $r = l/4$ sur laquelle est enroulé un fil portant à son extrémité libre une masse m .

a. Après avoir supprimé le champ magnétique et le circuit extérieur au cadre on abandonne le système sans vitesse initiale.

Établir la relation entre la vitesse angulaire ω du cadre, la hauteur de chute h de la masse m , la masse M du cadre et le côté l du cadre.

(On rappelle que le moment d'inertie d'une barre de longueur l et de masse μ , par rapport à son centre, est donné par l'expression $J = \mu l^2/12$.)

Application numérique

$m = 20$ g; $M = 30$ g, $g = 9,8$ u. SI.

b. On rétablit le champ magnétique, on réunit les bagues par l'intermédiaire des balais à un conducteur de faible résistance. Indiquer sans calculs comment est modifié le mouvement précédent.

124. Le cadre d'un galvanomètre est carré, de côté $a = 4$ cm, formé de $N = 100$ tours de fil. Il est suspendu verticalement dans l'entrefer d'un aimant par un fil de torsion de constante de torsion C_1 . Un cylindre de fer doux est placé à l'intérieur du cadre, son axe coïncidant avec l'axe défini par le fil de torsion; il a pour effet de rendre le champ magnétique dans l'entrefer radial, c'est-à-dire horizontal et dirigé suivant l'axe du cylindre.

1° Calculer le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe de rotation sachant qu'un côté horizontal a , par rapport à l'axe, a un moment d'inertie égal à $Ma^2/12$, M étant la masse du côté correspondant et que la masse par unité de longueur du fil est $\mu = 0,01$ g/cm.

2° Le cadre est en circuit ouvert. On l'écarte de sa position d'équilibre de $\theta_0 = 1/2$ radian et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

a. Écrire l'équation du mouvement; quelles sont les caractéristiques du mouvement?

b. La période des oscillations est $T_1 = 2$ s; calculer la constante de torsion C_1 .

3° On change le fil de torsion; la constante de torsion devient C_2 . Calculer la variation relative de la période en admettant que $(C_2 - C_1)$ est petit devant C_1 .

Pour obtenir la même période que précédemment, on constate qu'il faut enlever un tour de fil. Calculer la variation de période correspondante et la nouvelle constante de torsion.

4° On se place de nouveau dans les conditions définies au 2°; calculer la différence de potentiel aux bornes du cadre sachant que l'intensité de l'induction magnétique dans l'entrefer est $B = 0,05$ tesla.

5° On court-circuite les bornes du cadre, le cadre étant en mouvement. Que se produit-il? Expliquer qualitativement ce qu'on observe.

125. Un ressort hélicoïdal vertical est accroché en un point P par son extrémité supérieure. Il subit l'action d'une

force verticale F dirigée vers le bas et appliquée à son extrémité inférieure. L'allongement A du ressort est tel que $F = kA$, k étant un coefficient constant.

Dans tout ce qui suit on négligera la masse du ressort.

1° Pour réaliser la force F on suspend une masse $m = 100$ g au ressort qui, après avoir atteint une position d'équilibre, présente un allongement de 35 mm et a une longueur totale L . On exerce alors momentanément une faible traction verticale sur m que l'on abandonne ensuite.

Étudier le mouvement de m . Calculer la valeur numérique de k , déduite de ce mouvement, sachant que la période des oscillations observée est $T = 0,375$ seconde. Comparer cette valeur à celle donnée par la relation $F = kA$.

2° La faible traction précédente a fait descendre la masse m de 5 mm. En admettant que l'énergie mécanique initiale se conserve, construire la courbe représentant, en fonction du temps, la valeur de l'énergie cinétique de la masse m pendant une période.

En abscisses on prendra 10 cm pour représenter la période. En ordonnées on prendra 1 cm pour représenter 2×10^{-3} joule.

3° On adapte au ressort, sous la masse m , un cadre en métal constituant une seule spire fermée, rectangulaire, située dans un plan vertical. Ce cadre a une résistance électrique r de 0,01 ohm. Ses côtés horizontaux ont 5 cm et ses côtés verticaux sont très longs. Lorsque le système oscille verticalement, le côté inférieur du cadre se déplace dans un champ magnétique en coupant normalement les lignes d'induction de ce champ qui est horizontal. Le côté supérieur du cadre reste hors de ce champ dont l'induction est $B = 0,02$ tesla.

On demande d'exprimer la force électromagnétique qui s'oppose au mouvement du cadre en fonction des quantités r , B et v (vitesse du déplacement du cadre).

On suppose négligeable l'inductance du cadre.

Application numérique : $v = 10$ cm/s.

126. Un ruban de nickel de largeur 2 mm, d'épaisseur 0,05 mm, de longueur 5 cm est tendu verticalement entre deux points fixes dans un champ magnétique uniforme horizontal d'induction $B = 0,16$ tesla et dont les lignes d'induction sont parallèles à la direction de la largeur du ruban. Le champ s'exerce sur une hauteur de 4 cm symétriquement par rapport au milieu du ruban. Densité du nickel : 8,68. Résistivité : 9×10^{-8} ohm-mètre.

1° Calculer la tension qu'il faut donner au ruban pour qu'a sa fréquence propre, lorsqu'il vibre en formant un seul fuseau, ait pour valeur 2 000 hertz.

Lorsque le ruban est soumis à l'action d'une onde sonore se propageant horizontalement suivant la direction de son épaisseur, il entre en vibrations forcées suivant cette direction. Expliquer qualitativement ce qui se passe quand la fréquence de l'onde sonore varie et donner la forme générale de la courbe des amplitudes du ruban en fonction de la fréquence.

2° On suppose que pour la fréquence de l'onde sonore égale à 1 800 Hz, l'amplitude du ruban vaut 0,5 mm de chaque côté de la position d'équilibre (on suppose cette amplitude constante sur toute la hauteur soumise au champ magnétique). Montrer qu'une force électromotrice d'induction prend naissance dans le ruban et calculer son amplitude.

3° Entre les extrémités du ruban, qui se comporte d'après ce qui précède comme un générateur, on branche un circuit d'utilisation ayant une résistance (non inductive) égale à celle du ruban. Calculer le courant qui y circule et la puissance dépensée dans ce circuit.

127. Un pendule, assimilable à un pendule simple, est constitué par une petite sphère de 1 cm de diamètre et de masse égale à 5,90 g suspendue à un point fixe O par un fil métallique très fin. La distance du point O au centre A de la sphère est de 1 m.

1° Quelle est la période T_0 de ce pendule, pour une amplitude très petite, en un lieu où $g = 9,81 \text{ u. SI}$.

2° On détermine la période de ce pendule en mesurant la durée de 100 oscillations à l'aide d'un chronomètre donnant le 1/5 de seconde. Jusqu'à quelle amplitude pourra-t-on considérer les oscillations comme isochrones?

On rappelle que la période, pour l'amplitude α radian, a pour valeur :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right).$$

3° Le pendule oscille avec une amplitude $\alpha = 0,1$ radian. Calculer la vitesse de la sphère au passage par la verticale, ainsi que la tension du fil à cet instant.

4° Le pendule oscille successivement dans le vide et dans l'air. Avec quelle précision faut-il mesurer la période pour trouver une différence entre les valeurs mesurées?

Masse volumique de l'air dans les conditions de l'expérience : $1,2 \text{ g/dm}^3$.

On négligera les frottements.

5° On considère un pendule simple, conducteur, de longueur 4 fois plus petite que le précédent et l'on suppose qu'il oscille dans un champ magnétique uniforme horizontal, d'intensité $B = 0,1$ tesla, perpendiculairement aux lignes d'induction de ce champ, avec l'amplitude $\alpha = 0,1$ radian. Montrer qu'il s'établit, entre le point de suspension O et l'extrémité A du pendule, une différence de potentiel, dont on calculera l'expression en fonction du temps.

128. Le rotor d'une centrifugeuse est assimilable à un disque horizontal D pesant 250 g, de diamètre 10 cm, entraîné à la vitesse de 12 000 tours par minute par un moteur à air comprimé dont le jet sort par 4 ajutages tangentiels aux extrémités de deux diamètres perpendiculaires.

1° Exprimer la vitesse angulaire du disque en radian par seconde.

2° Si l'on coupe l'arrivée d'air comprimé, le rotor s'arrête après avoir effectué 20 000 tours. Calculer le couple de frottement supposé constant qui détermine l'arrêt.

3° Calculer la puissance supposée constante pendant une minute qu'il faut communiquer au disque pour le faire passer pendant ce temps du repos à la vitesse de 12 000 tours par minute.

4° A quelle accélération est soumis un point de la périphérie du disque? L'exprimer en prenant pour unité celle de la pesanteur.

5° Un aimant rectiligne NS placé suivant un diamètre du disque et solidaire de lui, rend un son quand le disque tourne sous l'action du moteur à air. Expliquer l'origine de ce son; calculer sa fréquence quand le disque tourne à 12 000 tours par minute.

6° Le disque muni de l'aimant et tournant toujours à 12 000 tours par minute est éclairé par une source lumineuse qui lance 300 éclairs par seconde. Dessiner l'aspect observé : que voit-on si la vitesse de rotation diminue légèrement?

7° A une même distance de l'axe de rotation et dans le prolongement de deux diamètres perpendiculaires on dispose deux bobines identiques. Ces bobines sont connectées à

l'entrée de deux amplificateurs identiques, et par un dispositif convenable on fait apparaître sur un écran un spot lumineux dont les coordonnées rectangulaires sont respectivement proportionnelles (avec le même facteur) aux différences de potentiel aux bornes des deux bobines.

Quelle est la figure décrite par le spot si le disque tourne à vitesse constante? Comment se modifie-t-elle si la vitesse décroît lentement?

Nota.

On pourra faire les calculs numériques en prenant $g = 10 \text{ u. SI}$, $\pi = 3,14$ et $\pi^2 = 10$.

Les questions 4 à 7 sont indépendantes.

129. A. 1° Une fusée jouet est constituée par un corps à forme profilée que l'on peut lancer verticalement avec une vitesse initiale de 20 m.s^{-1} . Calculer la hauteur maximale atteinte et la durée de l'ascension.

L'accélération de la pesanteur est $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$. La résistance de l'air sera négligée.

2° Quand la hauteur maximale est atteinte, un petit parachute s'ouvre instantanément et l'ensemble tombe verticalement. Étudier le mouvement de chute et calculer la vitesse limite.

La masse de l'ensemble formé par le corps et le parachute est 200 g.

La résistance de l'air est une force dont l'intensité exprimée en newton est donnée par la relation $R = 0,4 V^2$. La vitesse de chute V est exprimée en m.s^{-1} .

B. Un satellite artificiel de la Terre de masse $M = 1\,500 \text{ kg}$ décrit une trajectoire circulaire d'un mouvement uniforme à une altitude $z = 1\,000 \text{ km}$.

L'accélération de la pesanteur à l'altitude z est donnée par la relation

$$g_z = g_0 \left(\frac{R}{R+z} \right)^2,$$

dans laquelle R est le rayon de la sphère terrestre ($R = 6\,400 \text{ km}$) et g_0 l'accélération de la pesanteur à l'altitude zéro ($g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$).

1° Calculer la vitesse linéaire du satellite.

2° Calculer la période de rotation du satellite autour de la Terre.

3° Calculer l'énergie cinétique du satellite.

4° Calculer la variation d'énergie potentielle du système formé par le satellite et la Terre quand, au cours de son lancement, le satellite passe de l'altitude zéro à l'altitude z .

L'accélération de la pesanteur varie avec l'altitude selon la relation indiquée plus haut.

130. 1° Un pendule simple est constitué par un fil de masse négligeable et une boule de 250 g supposée de dimensions négligeables. Le coefficient de dilatation linéaire du fil étant $\lambda = 2 \times 10^{-5}$, pour quelle variation de température la variation relative de la période est-elle de $\frac{1}{1\,000}$?

En réalité, le rayon de la boule est r , et on désigne par a la distance de l'axe d'oscillation au centre de la boule. Pour quelle valeur maximale du rapport $\frac{r}{a}$ peut-on confondre le pendule avec un pendule simple de longueur a pour que l'erreur relative qui en résulte sur la période ne dépasse pas $1/1\,000$?

On rappelle que la longueur du pendule simple synchrone d'un pendule analogue au pendule considéré est

$$L = a + \frac{2}{5} \frac{r^2}{a}$$

2° Le pendule, assimilé à un pendule simple de longueur $a = 0,90 \text{ m}$, oscille en un lieu où $g = 9,80 \text{ u. SI}$. Calculer à $1/100$ près sa période. Calculer son énergie cinétique au moment du passage à la position d'équilibre, l'amplitude étant $\alpha_0 = 0,1$ radian.

3° En réalité, après 25 oscillations, le pendule passe à la position d'équilibre avec une vitesse réduite de moitié du fait des frottements. Calculer l'énergie perdue à chaque oscillation.

4° Pour restituer au pendule l'énergie ainsi dissipée, un condensateur chargé par un générateur dont la force électromotrice est de 20 V se décharge une fois par période dans un dispositif approprié. Quelle doit être sa capacité ?

Le condensateur plan étant chargé, puis séparé du générateur, on double la distance e séparant les deux armatures. Que devient son énergie ? Expliquer.

131. Une locomotive de 100 tonnes tire 4 wagons de 50 tonnes. Les frottements sont négligeables. L'accélération de la pesanteur est de 10 m/s^2 . (Les quatre questions de ce problème sont indépendantes et pourront être faites dans n'importe quel ordre.)

1° Partant d'une vitesse nulle, la locomotive atteint, d'un mouvement uniformément accéléré, une vitesse de 36 km/h en 10 secondes. Calculer la force totale de traction exercée par la locomotive et la force avec laquelle la locomotive tire le train de 4 wagons qu'elle remorque.

2° Elle aborde à 36 km/h une rampe ascendante de 2 %, c'est-à-dire s'élevant de 2 mètres pour un parcours de 100 mètres. Elle y atteint en 20 secondes, d'un mouvement uniformément accéléré, une vitesse de 72 km/h . Calculer cette accélération, l'espace parcouru, et le travail mécanique fourni par la locomotive pendant ces 20 secondes.

3° La puissance maximale de la locomotive étant 4 500 kilowatts, en quel temps minimal ce train pourrait-il atteindre en plat une vitesse de 120 km/h ?

4° Quelle vitesse maximale pourrait-il monter une côte de 3 % ?

(En fait la vitesse réelle est notablement inférieure du fait des résistances passives.)

4° La puissance électrique que consomme cette locomotive est de 5 000 kilowatts. Elle est alimentée par un courant alternatif de 5 000 volts de tension efficace, avec un facteur de puissance de 0,8 (le courant demandé est en retard sur la tension aux bornes).

Calculer l'intensité efficace du courant demandée par la locomotive à la ligne d'alimentation. Cette ligne ayant une résistance de $0,4 \text{ ohm}$ (total des deux fils aller et retour), quel est le rendement du transport de cette énergie électrique ? Calculer enfin la tension que l'on doit fournir à la ligne au départ pour que cette dernière fournisse à l'arrivée 5 000 volts à la locomotive.

132. Un volant, dont la masse peut être considérée comme répartie sur une circonférence moyenne de rayon $r = 20 \text{ cm}$, a une masse $m = 4 \text{ kg}$ et tourne à la vitesse de $N = 80$ tours à la seconde.

A. Calculer :

1° l'accélération de ce mouvement ;

2° l'énergie cinétique du volant ;

3° le temps au bout duquel le volant atteint cette vitesse, sachant qu'il est entraîné par un moteur développant une puissance de $0,1 \text{ kW}$;

4° la quantité de chaleur qui se produit lorsqu'on freine le volant :

a. jusqu'à l'arrêt complet ;

b. jusqu'à l'obtention d'une vitesse de 20 tours/s.

B. Sur l'axe de ce volant on fixe un disque percé à sa périphérie de 25 trous équidistants.

Une source lumineuse placée devant les trous envoie à travers l'un d'eux un faisceau divergent de lumière, dont l'axe est horizontal ; lorsque le disque tourne, ce faisceau éclaire périodiquement des gouttes d'eau qui tombent d'un vase à niveau constant, en face d'une règle graduée. Les gouttes paraissent immobiles lorsque la période de passage des trous devant la source est égale à la période de passage des gouttes dans le faisceau lumineux. La vitesse du disque est, dans ces conditions, de 21 tours $1/2$ à la seconde et l'intervalle séparant les gouttes est $1,82 \text{ cm}$.

Sachant que le vase d'où s'écoulent les gouttes est placé à une hauteur suffisamment grande pour que la vitesse limite soit atteinte à ce moment, déterminer le rayon des gouttes. La résistance R offerte par l'air au mouvement d'une goutte sphérique animée d'une vitesse V est donnée par la relation :

$$R = 0,323 \text{ SV}^2,$$

dans laquelle S est la surface d'un grand cercle de la sphère (les unités sont celles du système SI).

C. Quelles seraient les apparences observées :

a. pour une vitesse du disque de 10 tours $3/4$ à la seconde ?

b. pour une vitesse du disque de 22 tours à la seconde ?

133. 1° Un condensateur variable analogue à ceux utilisés en radio est formé de 11 lames fixes entre lesquelles s'engagent 10 lames mobiles demi-circulaires de 5 cm de rayon. La distance entre une lame fixe et une lame mobile est de $0,25 \text{ mm}$. L'angle dont tournent les lames mobiles autour de l'axe commun des cercles qui les limitent est repéré par une aiguille se déplaçant devant un cadran gradué en parties égales de 0 à 200 .

Sachant que deux lames métalliques ayant une surface de 100 cm^2 et séparées par une distance de 1 cm ont dans l'air une

capacité de $\frac{1}{36\pi \times 10^3}$ microfarad, calculer la capacité maximale du condensateur ci-dessus :

2° On règle le condensateur à la moitié de sa valeur maximale et on l'associe avec une inductance de manière à constituer un circuit résonateur dont la fréquence propre est de 850 hertz . Calculer la valeur de l'inductance.

Avec un générateur de courant alternatif associé à un haut-parleur on produit un son ayant la fréquence ci-dessus :

Le haut-parleur P (considéré comme une source ponctuelle rayonnant dans toutes les directions) est placé au-dessus du plancher d'une salle à une hauteur $PH = 50 \text{ cm}$. Un microphone M sensible aux variations de pression, associé à un amplificateur, permet de mesurer l'intensité du son en chaque point de la salle.

Expliquer ce que l'on entendra si l'on élève le microphone M sur une verticale à partir du plancher ; faire un croquis des lieux des maxima et des minima d'intensité. Calculer les hauteurs au-dessus du plancher des maximums d'intensité dans les deux cas suivants :

a. déplacement de M sur la verticale PH ;

b. déplacement de M sur une verticale distante de 1 m de PH . La vitesse de propagation du son dans les conditions de l'expérience est de 340 m/s , et l'on admet qu'il n'y a aucun amortissement.

134. Un disque horizontal peint en noir et sur lequel un trait radial est peint en blanc est entraîné d'un mouvement de rotation uniforme par un moteur. On éclaire le disque par une lampe au néon alimentée par le secteur alternatif à 50 hertz et qui s'allume quand l'intensité instantanée du courant passe en valeur absolue, sur un maximum.

1° a. Pour quelle vitesse de rotation du disque, en tours par minute, le trait blanc paraît-il immobile ?

b. Pour quelle vitesse de rotation une croix blanche à 4 bras apparaît-elle immobile ?

2° Un fil souple et résistant est collé sur le disque et dépasse le bord de celui-ci, de manière à venir heurter légèrement une tige d'acier enfilée tenue verticalement. Le disque tournant à $1\,500$ tours/minute, on laisse tomber la tige ; on relève alors sur celle-ci une série de traits fins. Les distances successives entre plusieurs d'entre eux sont 104 millimètres , $119,5 \text{ millimètres}$, 135 millimètres , 154 millimètres .

En déduire l'accélération de la pesanteur du lieu.

3° Les longueurs précédentes étant mesurées à $0,5 \text{ millimètre}$ près, et l'incertitude relative sur la vitesse de rotation étant négligeable, quelle incertitude absolue comporte la mesure de g par cette méthode ?

135. 1° Une bille roule sans frottement sur une glissière horizontale AO avec une vitesse de 50 cm/s . Arrivée en O , elle tombe. Quelle est l'équation de la trajectoire de la bille à partir de O ? (Cette équation sera rapportée aux deux axes Ox , prolongement de AO , et Oy , perpendiculaire en O à AO .)

En prenant une photographie instantanée, on constate qu'à un certain moment la position du point le plus bas de la bille est en C , donné par les coordonnées $x = 10 \text{ cm}$ et $y = 19,5 \text{ cm}$. Quelle est l'accélération g due à la pesanteur ? Sachant que x et y sont mesurés à 1 mm près, entre quelles limites se trouve

comprise la valeur exacte de g ? On néglige les autres causes d'erreurs.

2° Un électron de charge électrique e et de masse m est lancé horizontalement à la vitesse de 35 000 km/s entre les deux armatures horizontales AA' et BB' d'un condensateur chargé. Il existe entre ces armatures, dont la longueur est 10 cm, un champ électrique exerçant sur une charge de 1 coulomb une force constante en grandeur, direction et sens égale à 10^5 newtons.

On place en A'B' une plaque photographique sur laquelle les électrons laissent une trace, soit en P, en l'absence de champ, soit en C, lorsque le champ agit. Après développement, on obtient deux taches P et C distantes de $y = 3,5$ cm. Écrire l'équation du mouvement de l'électron par rapport à des axes Ox et Oy analogues à ceux du 1°. D'après cette équation, déterminer la valeur du rapport $\frac{e}{m}$. Sachant que

$e = 1,6 \times 10^{-19}$ coulomb, quelle est la masse de l'électron?

3° Qu'advierait-il si, au lieu de lancer entre les armatures du condensateur un jet d'électrons, on lançait des particules chargées positivement? Quel serait le déplacement y pour des particules α (atomes d'hélium ayant perdu leurs deux électrons planétaires)? On sait que $He = 4$ et que le nombre d'Avogadro est $N \approx 6 \times 10^{23}$. On considérera la masse du noyau d'hélium comme égale à la masse de l'atome neutre.

Les particules α sont émises à la vitesse de 20 000 km/s.

136. 1° Une corde vibrante est constituée par un fil d'acier de longueur $AB = 0,50$ m. La corde est tendue à l'aide d'un poids de 122,5 N. La masse de 1 m de cette corde est de 2,25 g. Calculer la fréquence du son fondamental rendu par cette corde.

2° La longueur de cette corde est connue à 1 mm près. La masse de 1 m de corde est connue à 5 mg près. On admettra que l'erreur faite sur la tension est négligeable. Calculer l'incertitude absolue que comporte la détermination de la fréquence fondamentale de la corde.

3° Afin de déterminer expérimentalement cette fréquence on utilise un dispositif stroboscopique comportant un disque percé de 5 trous régulièrement répartis sur une même circonférence; le disque tourne à vitesse constante et effectue n tours par minute. Calculer la plus grande (soit n_0) entre toutes les valeurs de n qui permettent de voir la corde immobile et unique. Que voit-on si on donne à n la valeur $n' = n_0/2$, puis la valeur $n' = 2n_0$?

137. On projette l'image d'une lampe à mercure sur un écran E constitué par une feuille mince de métal dans laquelle on a percé un très petit trou, T, au centre de la région occupée par l'image de la lampe. On colle sur l'écran, de manière à obturer le trou, une lame d'un verre spécial ne transmettant que certaines radiations. D'autre part, d'un trait de diamant passant par le centre optique, on coupe en deux une lentille mince (verre de presbyte) dont la convergence est égale à 2 dioptries. Les deux moitiés du verre sont disposées dans un plan situé à 1 m de l'écran E, au niveau du trou T. La demi-lentille inférieure est fixée sur un support, tandis que la demi-lentille supérieure peut être déplacée verticalement à l'aide d'une vis micrométrique. On s'arrange de manière que la distance des demi-lentilles (c'est-à-dire des deux centres optiques) soit égale à 507 microns. A l'opposé de l'écran se trouve un cylindre plat R parfaitement vide, en verre, dont les bases opposées C et A, perpendiculaires à l'axe défini par T et le milieu de l'intervalle des deux demi-lentilles, sont recouvertes intérieurement de dépôts semi-transparents, mais suffisamment conducteurs du point de vue électrique. Le dépôt de la base C est photoélectrique, c'est-à-dire qu'il émet (sans vitesse notable) des électrons sous l'action de certaines radiations et notamment de celles qui, produites par la lampe à mercure, sont transmises par le verre qui recouvre le trou T. Le dépôt conducteur de la base A est lui-même recouvert d'une couche très mince formée d'une substance émettant de la lumière verte lorsqu'elle reçoit les électrons en mouvement rapide. La distance qui sépare les demi-lentilles de la base C est égale à 2 m.

Après avoir allumé la lampe à mercure, on applique entre les dépôts conducteurs des bases C et A une différence de potentiel de quelques milliers de volts, l'électrode A étant positive par rapport à C. En observant alors par transparence la couche luminescente de la base A, on constate l'apparition, sur cette couche, de bandes parallèles et équidistantes, ou franges, alternativement brillantes et sombres. Expliquer la formation de ces franges.

A l'aide d'une loupe micrométrique, on constate que, dans la direction perpendiculaire aux franges, la distance qui sépare deux franges brillantes ou sombres l'une et l'autre, entre lesquelles se trouvent 9 franges de même nature que les précédentes, est égale à 1 cm. En déduire la longueur d'onde de la radiation qui donne naissance au système de franges et expliquer pourquoi l'observation directe visuelle des franges est impossible.

Afin d'obtenir un phénomène plus brillant, on cherche à remplacer le trou T par une fente fine. Quelle doit être l'orientation de cette fente?

Sur les deux images du trou T données par les demi-lentilles, on place une lame de verre d'épaisseur très faible. Expliquer pourquoi le système de franges ne subit, dans ces conditions, aucune modification appréciable. On déplace ensuite la lame de verre dans un plan de manière à ne couvrir qu'une des images. Quels sont alors le sens et la grandeur du déplacement du système de franges? Calculer ce déplacement dans le cas d'une lame de verre dont l'épaisseur est égale à 10 microns et dont l'indice de réfraction (pour la radiation considérée) est 1,507.

138. 1° Dans une pile atomique chaque noyau d'Uranium 235 (^{235}U) bombardé par un neutron est scindé en deux noyaux différents et des neutrons. La masse des produits obtenus est inférieure à celle de l'Uranium 235 ayant subi la fission contrôlée. La perte de masse représente les 8/10 000 de la masse d'Uranium 235 consommée.

Toute perte de masse Δm d'un système s'accompagne d'une libération d'énergie W qui lui est liée par la relation : $W = \Delta m \cdot c^2$ valable dans tous les systèmes d'unités, où c est la vitesse de la lumière dans le vide (300 000 km/s).

a. Calculer, en kilowatts, la puissance d'une pile qui consomme 24 grammes d'Uranium 235 par jour.

b. Cette puissance est libérée sous forme de chaleur utilisée pour porter à haute température un fluide qui actionne une turbine d'une centrale électrique. La centrale comprend 5 ensembles « pile-turbine-alternateur » identiques, chaque pile ayant la puissance calculée en a. Si on admet un rendement de 30 % dans la transformation de l'énergie calorifique en énergie électrique, quelle est, en kilowatts, la puissance totale de la centrale électrique?

2° L'électricité ainsi produite est utilisée, entre autre, pour actionner les moteurs d'une locomotive électrique.

On admettra dans tout le problème, pour simplifier, que la résistance due à l'air et au roulement est une force constante parallèle et de sens contraire au déplacement, égale à 30 000 newtons.

a. La masse du train, locomotive comprise, est de 300 tonnes. Le train partant du repos atteint en 3 kilomètres, sous l'action d'une force de traction constante, la vitesse de 108 km/h. La voie est horizontale. Quel est le travail fourni par la locomotive pendant ces 3 kilomètres?

Si 85 % de l'énergie électrique est transformée en ce travail, le reste étant perdu par effet Joule et dans les transmissions, quelle est l'énergie électrique consommée?

b. Le train aborde une montée de 4 %. Quelle est la puissance, exprimée en kilowatt, que doit fournir la locomotive pour que le train maintienne la vitesse de 108 km/h? Quelle est, en kilowatt, la puissance électrique consommée, le rendement de la transformation de l'énergie électrique en énergie mécanique étant toujours de 85 %?

On prendra $g = 9,8$ u. SI.

139. A. Dans un tube cylindrique où l'on fait le vide se trouve une électrode plane, métallique, C, normale à l'axe du tube, et portée au potentiel $-V_0$; on a $V_0 = 100$ volts

A la distance $d = 10$ cm de l'électrode C est placée parallèlement à C, une grille métallique G, à mailles très fines, reliée au sol de potentiel zéro. Entre C et G le champ électrique est considéré comme uniforme. On suppose qu'un électron est émis par C sans vitesse initiale.

a. Étudier les forces qui s'exercent sur l'électron et montrer que le poids est négligeable par rapport à la force électrique.

b. Étudier le mouvement de l'électron entre C et G. Tracer le graphe de sa vitesse v_x en fonction de la distance x à l'électrode C. Calculer sa vitesse maximale v_m .

c. L'électron traverse la grille G ; en admettant que le champ électrique est nul au-delà de G, déterminer le mouvement ultérieur de l'électron et prolonger le graphe $v = f(x)$.

d. Que deviennent les résultats précédents si l'électron est émis perpendiculairement au plan de la plaque C (supposée en zinc), sous l'influence de la radiation de longueur d'onde $\lambda = 0,30 \mu$?

Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ joule par seconde ; seuil photoélectrique du zinc : $\lambda_0 = 0,37 \mu$.

B. Dans le tube précédent on place, à la distance d au-delà de G, et parallèlement à C, une plaque métallique P portée

à un certain potentiel V . Le champ électrique entre G et P est uniforme.

a. Étudier le mouvement d'un électron émis sans vitesse par C.

b. Tracer le graphe $v = f(x)$, pour $0 < x < 2d$, avec les valeurs particulières de V suivantes :

$$2 V_0, \quad -2 V_0.$$

On utilisera les mêmes axes pour les deux graphes.

c. Montrer que l'électron n'atteint P que pour certaines valeurs de V , que l'on précisera.

C. a. Un paquet d'électrons, représentant la charge d'un condensateur de 10 microfarads sous une tension de 1 000 volts, heurte un obstacle constitué par un moulinet muni de deux petites ailettes, pesant chacune 1 centigramme, fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable, de longueur $2l = 2$ cm. L'axe de rotation Δ du moulinet est perpendiculaire au milieu de la tige et les électrons arrivent ensemble, normalement à l'ailette inférieure, avec une vitesse de 6 000 km/s. On les suppose absorbés après le choc.

Calculer la vitesse angulaire prise par le moulinet.

b. On suppose maintenant que l'énergie cinétique des électrons est transformée, par choc, en rayonnement X. Quelle est la longueur d'onde minimale de ce rayonnement ?

PROBLÈMES DE CONCOURS GÉNÉRAL

1962

Remarque valable pour l'ensemble du problème :

Tous les calculs numériques devront être effectués en utilisant les unités du Système international ; les résultats seront exprimés à l'aide de ces unités.

PREMIÈRE PARTIE

En un lieu où l'accélération de la pesanteur est désignée par g , on considère une balance de précision supposée juste dont la longueur de chaque bras de fléau, c'est-à-dire la distance de l'arête du couteau central à l'arête d'un des deux couteaux latéraux, est l . L'ensemble du fléau et des plateaux vides possède une masse totale M et son moment d'inertie par rapport à l'arête du couteau central est J . La masse des plateaux et de leurs charges peut être considérée comme étant appliquée sur les couteaux qui les soutiennent. Le centre de gravité G du système fléau-plateaux vides en équilibre est situé sur une verticale contenue dans un plan perpendiculaire au fléau passant par l'arête du couteau central, à distance d de cette arête, et au-dessous. On suppose que tous les frottements sont négligeables et que chaque plateau n'oscille pas autour du couteau qui le soutient.

1° On écarte l'ensemble fléau-plateaux vides d'un petit angle θ à partir de sa position d'équilibre. Établir la relation existant entre l'accélération et les moments appliqués lors du mouvement de retour vers la position d'équilibre (*). Quelle est la nature de ce mouvement ? Quelles sont les expressions de la pulsation ω et de la période T des oscillations ?

2° On charge chacun des plateaux d'une masse m . La position d'équilibre du système est-elle différente de la précédente ? Donner l'expression du nouveau moment d'inertie J' du système par rapport à l'arête du couteau central. Établir l'équation du mouvement et donner l'expression de la nouvelle période T' des oscillations. Montrer que la masse des plateaux et de leurs charges peut en toute rigueur être considérée comme appliquée sur les couteaux qui les soutiennent.

3° Calculer la distance d en fonction de m , l , M , g , T et T' .

4° On appelle rayon de giration du système fléau-plateaux vides la longueur λ définie par la relation : $J = M\lambda^2$. Exprimer λ en fonction de T , g et d .

5° On fait varier la masse m des surcharges (toujours égales entre elles) des deux plateaux. Exprimer T' en fonction de T , m , l , M et λ .

Applications numériques :

Calculer d et λ à l'aide des données suivantes :

$l = 15$ centimètres ;

$M = 400$ grammes ;

$g = 9,81$ m/s² ;

$T = 13,8$ secondes ;

$T' = 31,4$ secondes pour $m = 80$ grammes.

Exprimer T' en fonction de m . Tracer la courbe représentant T' en fonction de m . Quelle est la nature de cette courbe ? Entre quelles limites utiles de m a-t-elle une signification physique et peut-elle être tracée ?

Prendre $\frac{\pi^2}{g} = 1$.

DEUXIÈME PARTIE

1° On considère une lame d'acier rigide en forme de parallépipède rectangle, fixée par sa partie inférieure à une autre

(*) Une telle relation sera désormais appelée « équation du mouvement ».

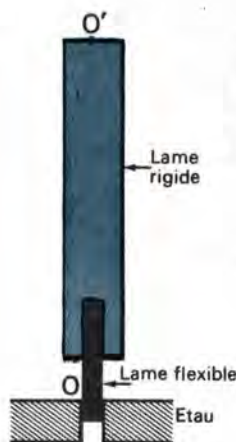


Fig. 1

lame d'acier flexible, très mince et très courte, serrée entre les mâchoires d'un étai, au niveau d'une section droite S de centre O , la plus grande dimension des deux lames étant verticale (fig. 1). La masse de ce système est considérée comme étant négligeable. La section droite supérieure S' terminant la lame rigide du côté libre a pour centre O' . On exerce sur ce système une force f constante située dans un plan P perpendiculaire à la plus grande dimension de la section S' , la ligne d'action de cette force passant par O' et restant normale à la lame. On admet que pour de petites déformations, le point O' décrit un arc de cercle de centre O dans le plan P , l'application de la force f produisant donc uniquement une rotation θ de la droite OO' proportionnelle au moment de la force f par rapport à l'axe horizontal Δ passant par le point O et parallèle à la plus grande dimension de la section droite S . Le coefficient de proportionnalité est désigné par $\frac{1}{k}$.

Établir par une méthode graphique que l'expression de l'énergie potentielle acquise par la lame au cours de cette rotation θ est $W = 1/2 k \theta^2$. Analyser les phénomènes qui ont lieu en réalité dans l'air sous l'action de la force f . Comparer le travail de cette force à l'énergie potentielle acquise par la lame. Conclure.

2° On considère un cube de verre homogène d'arête l , de masse volumique μ et de masse M . Le moment d'inertie de ce cube par rapport à un axe passant par son centre de gravité G et parallèle à une arête est donné par l'expression $J_0 = Ml^2/6$.

a. Établir l'expression de J_0 en fonction de μ et de l .

Application numérique :

$l = 2$ centimètres,

$\mu = 2,65$ g/cm³.

b. Établir l'expression du moment d'inertie J de ce cube par rapport à un axe parallèle au précédent et situé à la distance L du centre du cube (expression en fonction de μ , l et L).

Application numérique :

$L = 7$ centimètres.

3° On scelle une face F du cube à la section droite S' de la lame décrite au paragraphe 1°, la longueur OO' étant égale

à $L = 1/2$. Cette face F est horizontale, son centre coïncidant avec le centre O' de S' , et les arêtes de S' et de F étant parallèles. Écarté faiblement de sa position d'équilibre ainsi décrite, sous l'effet d'une brève impulsion, ce système effectue des oscillations. On désigne par g l'accélération de la pesanteur au lieu où se fait l'expérience.

a. Établir l'inventaire des actions mécaniques qui s'exercent sur ce système lors de son mouvement d'oscillation, en précisant leur signe.

b. Montrer que le moment résultant de ces actions par rapport à l'axe Δ peut se mettre sous la forme $-C\theta$, C devant être une constante positive. En donner la raison et établir l'inégalité existant entre k , μ , I , L et g pour que cette condition soit vérifiée. Donner l'expression de l'énergie potentielle du système pour une rotation θ .

c. Établir l'équation du mouvement et donner l'expression de la période T des oscillations en fonction de k , μ , I , L et g , puis en fonction de g et de deux constantes λ et G définies par les relations :

$$\lambda = \frac{I^2}{6L} + L \quad G = \frac{k}{\mu I^2 L}$$

Application numérique : Calculer λ .

d. Exprimer g en fonction de G , λ et T .

Application numérique : La durée de 40 oscillations complètes est 3 minutes 20 secondes en un lieu où l'accélération de la pesanteur est égale à 9,8 m/s². Calculer G et exprimer numériquement g en fonction de T .

e. On étudie les oscillations du système en un lieu où l'accélération de la pesanteur a varié de la quantité petite Δg par rapport à la valeur précédente. Calculer la variation ΔI qui en résulte pour la période du système oscillant.

Application numérique : $\Delta g = 1$ cm/s².

Si on observe une variation relative de période égale à 10^{-4} , quelle est la variation de g ?

4° Dans l'étude qui vient d'être faite, on a négligé l'influence de la résistance de l'air sur les oscillations du système. Pour en tenir compte, il faut envisager l'existence d'une force dont le moment par rapport à l'axe Δ est proportionnel à la vitesse angulaire du système, dans les conditions expérimentales décrites précédemment, le coefficient de proportionnalité étant désigné par a . Cette force tend à amortir les oscillations. Montrer que l'équation du mouvement peut alors s'écrire sous la forme :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + a \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0$$

TROISIÈME PARTIE

1° Un condensateur dont le diélectrique est une feuille de papier d'épaisseur constante e est équivalent à un condensateur plan de capacité C_0 lorsqu'il est replié sur lui-même afin de réduire son encombrement. La permittivité relative (ou constante diélectrique) du papier est désignée par ϵ_r .

a. Exprimer la surface S de l'une des armatures de ce condensateur.

b. Exprimer la capacité C d'une batterie de cinq condensateurs tous identiques au précédent et associés en parallèle.

c. Exprimer l'énergie électrostatique W_C de cette batterie chargée à l'aide d'un générateur de force électromotrice constante E , ainsi que sa charge Q .

d. Exprimer l'énergie W_G fournie par le générateur lors de cette charge. La comparer à W_C et en déduire le bilan énergétique de la charge de la batterie de condensateurs.

Applications numériques :

Calculer S , C , W_C , Q et W_G à l'aide des données suivantes :

$e = 0,04$ millimètre ;

$C_0 = 0,4$ microfarad ;

$\epsilon_r = 2$;

$E = 600$ volts.

2° Un solénoïde placé dans l'air est formé de n' couches de fil de cuivre de diamètre d ; les spires sont jointives et

l'épaisseur de l'isolant est négligeable ; le diamètre moyen d'enroulement est D ; la longueur du solénoïde est l .

a. Exprimer le nombre de spires N et le nombre de spires par unité de longueur n que comporte ce solénoïde, en fonction de n' , l et d .

b. Exprimer la résistance R du solénoïde en fonction de la résistivité ρ du cuivre et de N , D , d .

c. Ce solénoïde étant parcouru par un courant d'intensité I , exprimer le flux du vecteur induction électromagnétique créé à travers son propre circuit. Ce flux, désigné par Φ , sera calculé en supposant le solénoïde assez long pour que l'induction créée en un point de son axe puisse être considérée comme ayant un module constant. En déduire l'expression de l'inductance L du solénoïde en fonction de n , D et l .

Applications numériques :

Calculer N , n , R , Φ et L à l'aide des données suivantes :

$n' = 20$;

$d = 0,2$ millimètre ;

$D = 4$ centimètres ;

$l = 40$ centimètres ;

$\rho = 1,6 \cdot 10^{-8}$ ohm.m ;

$I = 5$ ampères.

3° Ce solénoïde caractérisé par sa résistance R et son inductance L est monté en série avec un générateur de force électromotrice E constante et de résistance intérieure négligeable. Soit i une valeur instantanée de l'intensité du courant circulant dans le circuit ainsi constitué.

a. Donner l'expression d'une valeur instantanée de la force électromotrice d'auto-induction. Quel est l'effet de cette force électromotrice sur l'établissement du courant dans le circuit ?

b. Appliquer la loi d'Ohm et en déduire l'équation que vérifie l'intensité du courant.

c. Exprimer l'énergie fournie par le générateur et celle dissipée par effet Joule, respectivement désignées par dW_G et dW_R , pendant un intervalle de temps dt au cours duquel la valeur de i peut être considérée comme constante. Montrer à l'aide de l'équation établie au paragraphe b que ces deux énergies ne sont pas égales et qu'il en résulte l'existence d'une énergie liée au solénoïde (désignée sous le nom d'énergie électromagnétique) et égale à $W_L = 1/2 Li^2$ quand l'intensité du courant a atteint sa valeur finale I . Pouvez-vous interpréter l'existence de cette énergie électromagnétique ?

Application numérique : Calculer I et W_L avec $E = 12$ volts.

4° On constitue un circuit comprenant en série la batterie de condensateurs étudiée au paragraphe 1° et chargée dans les mêmes conditions, et le solénoïde étudié au paragraphe 2°. Le courant qui circule dans ce circuit correspond à une décharge du condensateur.

a. Appliquer la loi d'Ohm au circuit et établir l'équation que vérifie la charge du condensateur. Comparer cette équation à celle obtenue au paragraphe 4° de la deuxième partie du problème. Établir l'analogie des différentes grandeurs mécaniques et électriques figurant dans ces équations. Établir de même la correspondance des énergies mécaniques (potentielle et cinétique) et électriques (électrostatique et électromagnétique).

b. On suppose que le terme comportant la résistance R du solénoïde peut être négligé et on se limite à l'étude du cas simple où l'équation vérifiée par la charge du condensateur se réduit par conséquent à :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$

Montrer que le circuit est alors le siège d'oscillations électriques. Donner les expressions de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 de ce circuit oscillant.

Écrire le plus simplement possible l'expression de la charge q du condensateur en désignant par Q la valeur de cette charge à l'instant $t = 0$ où commence la décharge. En déduire l'expression de l'intensité du courant qui parcourt le circuit.

Calculer à un instant t la valeur de l'énergie électrostatique W_C et de l'énergie électromagnétique W_L du circuit. Montrer que la somme de ces deux énergies est constante. Calculer la valeur W de cette constante. Quelle est l'analogie de ce bilan

énergétique des oscillations électriques avec celui des oscillations d'un pendule ?

Application numérique : Calculer ω_0 , T_0 , Q et W .

Tracer les courbes représentant q , i , W_C et W_L en fonction du temps.

QUATRIÈME PARTIE

En vue de réaliser quelques expériences en courant alternatif, on dispose d'un condensateur de capacité C , d'un solénoïde de résistance R et d'inductance L , ainsi que d'un générateur assurant une différence de potentiel sinusoïdale de valeur efficace U constante, mais de pulsation ω (et de fréquence N) variable.

1° La valeur de la fréquence étant fixée à N , on applique la différence de potentiel dans quatre expériences successives :

- Aux bornes du condensateur ;
- Aux bornes du solénoïde ;
- Aux bornes de l'ensemble condensateur-solénoïde en parallèle ;
- Aux bornes de l'ensemble condensateur-solénoïde en série.

Dans chacun des cas, déterminer à l'aide d'expressions connues l'intensité efficace I du courant et le déphasage φ entre la différence de potentiel appliquée et le courant, en précisant bien le sens de ce déphasage. Dans le dernier cas, exprimer aussi les valeurs efficaces U_C et U_L de la différence de potentiel aux bornes du condensateur et du solénoïde.

Applications numériques : Calculer I , φ , ainsi que U_C et U_L à l'aide des données suivantes :

$$C = 20 \text{ microfarads ;}$$

$$R = 10 \text{ ohms ;}$$

$$L = 0,3 \text{ henry ;}$$

$$U = 100 \text{ volts ;}$$

$$N = 50 \text{ hertz.}$$

2° On garde le montage en série du dernier cas, et on fait varier la fréquence.

a. Exprimer la pulsation ω_0 et la fréquence N_0 pour lesquelles l'intensité efficace I du courant passe par sa valeur maximale I_0 . Que représentent cette pulsation et cette fréquence ? De quel phénomène s'agit-il ? Quelle est la valeur du déphasage φ ?

Application numérique : Calculer ω_0 , N_0 et I_0 .

b. Étudier la variation de I et de φ en fonction de la fréquence N . Tracer les courbes représentant I et φ en fonction de N .

3° On préfère étudier le phénomène précédent à l'aide de variables dites réduites :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad y = \frac{U_C}{U}$$

U_C ayant la même signification qu'au paragraphe 1°, et en introduisant le facteur de surtension à la résonance S qui s'identifie à la valeur prise par y pour $x = 1$.

a. Exprimer S en fonction de R , C et ω_0 , ou de R , L et ω_0 .

b. Exprimer y en fonction de x et de S . Tracer la courbe correspondante.

c. On appelle « bande passante » l'ensemble des valeurs de la pulsation entourant la pulsation ω_0 , limitées aux valeurs ω' et ω'' , avec $\omega' < \omega_0 < \omega''$, et telles que $y \geq \frac{S}{\sqrt{2}}$.

Quel est l'intérêt de cette notion ? Et plus spécialement dans quel cas ?

En supposant S grand devant 1, montrer que les valeurs de x correspondant à ω' et ω'' sont approximativement :

$$x' = 1 - \frac{1}{2S} \quad \text{et} \quad x'' = 1 + \frac{1}{2S}$$

En déduire la largeur relative de la bande passante : $\frac{\omega'' - \omega'}{\omega_0}$.

d. Exprimer $\tan \varphi$ en fonction de x et de S . Tracer la courbe représentant φ en fonction de x , en examinant les valeurs de φ correspondant à x' et x'' .

Application numérique : Calculer S , ω' et ω'' .

1963

PREMIÈRE PARTIE : ÉNERGIE MÉCANIQUE

Dans toute l'étude qui suit, la Terre sera considérée comme un repère immobile par rapport au système des étoiles fixes.

A. Un corps de masse M tombe en chute libre dans le vide, sans vitesse initiale, d'une hauteur h_0 , en un lieu où l'intensité de la pesanteur a pour valeur g_0 .

a. Exprimer la variation d'énergie potentielle de ce corps ; calculer sa vitesse à l'arrivée, ainsi que la durée de sa chute.

b. La chute s'accomplissant dans l'air, et non plus dans le vide, on sait qu'une force résistante s'exerce sur le corps, avec une valeur variable en fonction de la vitesse. En désignant par F_M une force constante qui produirait le même travail que la force variable, exprimer le rapport K entre la variation d'énergie cinétique et la variation d'énergie potentielle. Exprimer ensuite F_M en fonction de K .

Application numérique pour toutes les questions a et b, avec les valeurs figurant dans le tableau donné à la fin de l'énoncé.

c. La même masse M est supposée pouvoir descendre dans un puits vertical de profondeur H , qui peut atteindre la valeur R rayon terrestre. On sait qu'à une distance x du centre C de la Terre, l'intensité de la pesanteur a une valeur $g_x = g_0 \frac{x}{R}$.

Exprimer la variation d'énergie potentielle de la masse M entre le centre de la Terre et le sol. On pourra traiter cette question par voie algébrique ou par voie graphique.

Si la masse était abandonnée sans vitesse initiale en un point P quelconque, d'abscisse $CP = x_0$, du puits, quelle serait en l'absence de tout frottement, la nature de son mouvement jusqu'au centre de la Terre ? Quelle serait l'équation horaire du mouvement ? Quelle serait la vitesse du mobile arrivant en C ? Quelle serait la durée de chute libre depuis le point de départ jusqu'en C ? Quelle observation peut-on faire sur le résultat ?

Application numérique : on posera $x_0 = R$.

d. Au-dessus du sol, et jusqu'à une distance infinie, la variation de l'intensité de la pesanteur est donnée par la loi de l'Attraction universelle $\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{\delta^2}$, dans laquelle δ est la distance entre la masse M et le centre C de la Terre.

1° La masse M est portée par une fusée depuis le sol jusqu'à l'altitude h , suffisamment faible pour que $\left(\frac{h}{R}\right)^2$ soit négligeable devant l'unité. Calculer sa variation d'énergie potentielle.

2° La masse M est transportée depuis le sol jusqu'à une altitude quelconque h . Calculer la variation de son énergie potentielle et faire l'application numérique. (On rappelle aux candidats que la fonction $y = \frac{1}{x}$ a pour dérivée $y' = -\frac{1}{x^2}$.)

e. Représenter graphiquement la variation de g depuis le centre de la Terre jusqu'à l'infini. Montrer comment l'approximation [d, 1°] ci-dessus se place sur cette courbe.

Représenter ensuite la variation de l'énergie potentielle entre les mêmes limites.

NOTA. — Les candidats qui n'auraient pu traiter algébriquement [d, 2°] pourraient cependant faire l'application numérique demandée plus haut, s'ils utilisent le premier graphique.

B. Le corps de masse M a été placé sur une orbite circulaire à l'altitude h , satisfaisant à l'approximation [d, 1°].

a. Calculer sa vitesse sur son orbite ; calculer le rapport de son énergie cinétique à son énergie potentielle, le niveau du sol étant pris pour zéro ; calculer la durée d'une révolution.

Application numérique.

b. Après une révolution, le rayon de l'orbite a varié de la quantité Δh par suite du frottement contre l'atmosphère résiduelle régnant à l'altitude h .

1° Indiquer le signe de Δh .

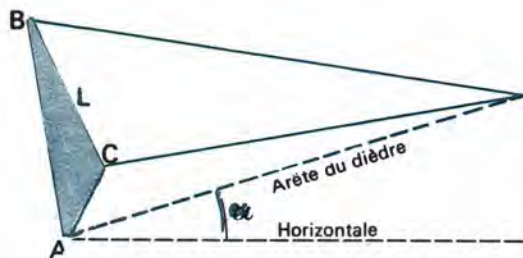
2° Exprimer les variations respectives d'énergie potentielle et d'énergie cinétique.

3° Évaluer la force de frottement, en la supposant constante.

4° Calculer la variation de durée d'une révolution.

Application numérique pour les questions 3° et 4°.

C. En un lieu où l'intensité de la pesanteur est g_0 , un barrage de montagne que l'on assimile à un mur plan vertical ABC (voir fig. 1) limite un réservoir dont la forme est celle d'un dièdre. Ce dièdre est symétrique par rapport au plan vertical passant par son arête, qui est une droite inclinée d'un angle α sur l'horizontale.



Vue perspective du réservoir d'eau et du barrage A.B.C.

Fig. 1.

Le mur du barrage a la forme d'un triangle isocèle; l'eau du réservoir baigne le mur sur une longueur horizontale $BC = L$ et atteint une hauteur D à partir du point le plus bas.

Calculer l'énergie potentielle de la masse d'eau par rapport à son point le plus bas et faire l'Application numérique.

Transformation d'énergie mécanique en énergie électrique

L'eau accumulée dans le réservoir décrit à la question précédente est débitée uniformément en un temps Θ , et l'on suppose que le réservoir se vide complètement pendant cette durée. Les appareils hydroélectriques qui entrent en jeu ont un rendement d'ensemble représenté par ρ et, à la sortie, le courant d'eau possède une vitesse v .

L'usine hydroélectrique fournit un courant sinusoïdal sous une tension efficace U ; elle débite dans un réseau dont le facteur de puissance est k_0 ; on calculera l'intensité efficace du courant fourni par l'usine. Application numérique.

DEUXIÈME PARTIE : QUANTITÉ DE MOUVEMENT

A. Le satellite de masse M transporté à l'altitude h_1 (Question Énergie mécanique, B) a été mis sur orbite par une fusée de masse au départ égale à M_0 , la masse M étant comprise dans M_0 . Cette fusée a éjecté des gaz selon un régime constant, à la vitesse v par rapport à la fusée. Pendant les premiers instants du mouvement à partir du sol, la fusée a possédé une accélération de valeur γ .

a. Exprimer γ en fonction de la masse de gaz éjectée par seconde.

b. Si, à l'altitude h_1 , l'éjection se fait encore au même taux, quelle est l'accélération γ' de la fusée, sachant que sa masse (γ compris le corps M) est devenue M_1 ?

c. Si $\gamma = g_0$ et $\gamma' = 2 g_0$, calculer la variation relative de masse subie par la fusée entre son point de départ et l'altitude h_1 .

B. Le noyau d'un atome d'azote, au repos, rencontre un neutron faisant partie d'un faisceau monocinétique de neutrons dont la vitesse est v_N . Les deux particules s'entrechoquent

élastiquement, et on admettra que leurs vitesses après le choc sont colinéaires. La vitesse du neutron est devenue v_1 ; celle du noyau d'azote est alors v_N .

Un autre neutron du même faisceau rencontre dans les mêmes conditions un noyau d'hydrogène, qui, après le choc, possède une vitesse V_H .

a. Écrire les équations régissant, d'une part, le choc neutron-azote et, d'autre part, le choc neutron-hydrogène.

b. Les vitesses des neutrons étant, en fait, inobservables puisque les neutrons ne laissent aucune trace de leurs trajectoires, établir la relation qui permet de connaître la masse μ du neutron, à partir de grandeurs observables dans ces expériences, et des masses atomiques de l'azote et de l'hydrogène.

Application numérique.

c. Exprimer en électron-volt l'énergie cinétique du noyau d'hydrogène après le choc. Application numérique.

C. Un négaton tourne autour d'un proton en décrivant une orbite circulaire de rayon a . La force centripète est créée par l'attraction électrostatique entre la charge $+q$ du proton et la charge $-q$ du négaton.

a. Exprimer la vitesse du négaton sur sa trajectoire, en désignant sa masse par m .

b. Exprimer le moment cinétique $\mathcal{M}$ du négaton par rapport à l'axe du cercle qu'il décrit.

c. En admettant (avec Niels Bohr) que le produit $2\pi \cdot \mathcal{M}$ doit être un multiple entier n de la constante de Planck h , calculer les rayons des orbites possibles pour le négaton. Application numérique pour la question c seulement, avec $n = 1$.

Données numériques à utiliser dans les applications:

$M = 15 \text{ kg}$; $h_0 = 310 \text{ m}$; $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$;
 $K = -0,80$; $R = 6360 \text{ km}$.
 $h_1 = 212 \text{ km}$; $h_2 = 20000 \text{ km}$; $|\Delta h| = 1 \text{ km}$.
 $L = 700 \text{ m}$; $D = 90 \text{ m}$; $\tan \alpha = 0,0825$.
 $\Theta = 75 \text{ jours}$; $\rho = 0,88$; $v = 6 \text{ m/s}$; $U = 126 \text{ volts}$;
 $k_0 = 0,91$.

$V_N = 4600 \text{ km/s}$; $V_H = 33000 \text{ km/s}$; $H = 1$;
 $N = 14$; Nombre d'Avogadro : $6,02 \cdot 10^{23}$ (la mole étant exprimée en grammes); $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ (S.I.)}$; $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
 $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

NOTA. — Toutes les réponses numériques doivent être exprimées en unités du système international.

1964

Dans tous les calculs que comporte le problème qui suit, on aura soin de préciser les unités utilisées; et les résultats numériques demandés par l'énoncé seront exprimés dans le système international, S.I.

On se propose d'étudier quelques mouvements d'un pendule de torsion mobile autour d'un axe horizontal et constitué de la manière suivante (fig. 1, page 346).

Une tige cylindrique T homogène, d'axe MN , a une longueur $4l$ et une masse μ ; son diamètre est petit par rapport à sa longueur. Cette tige est fixée de façon rigide sur un petit cylindre, dont l'axe ab est horizontal et perpendiculaire à MN en un point O , qui est à la fois le milieu de MN et le milieu de ab . Ce petit cylindre, convenablement supporté, peut tourner librement autour de son axe ab et constitue un arbre de rotation pour la tige T , dont l'axe MN ne peut ainsi se déplacer que dans le plan vertical perpendiculaire en O à l'axe ab . — La tige T est filetée sur toute sa longueur et porte deux surcharges constituées par des disques minces, situés de part et d'autre de O , ayant chacun une masse m et que l'on peut déplacer le long de la tige T grâce au filetage; ce qui permet de connaître les déplacements des surcharges. La tige T et les surcharges forment un système de révolution autour de l'axe MN et le centre de gravité de ce système ne peut se déplacer que sur MN . — Dans la suite, l'ensemble constitué par la tige T , les surcharges et l'arbre de rotation d'axe ab sera appelé « pendule S », ou « pendule » sans autre précision.

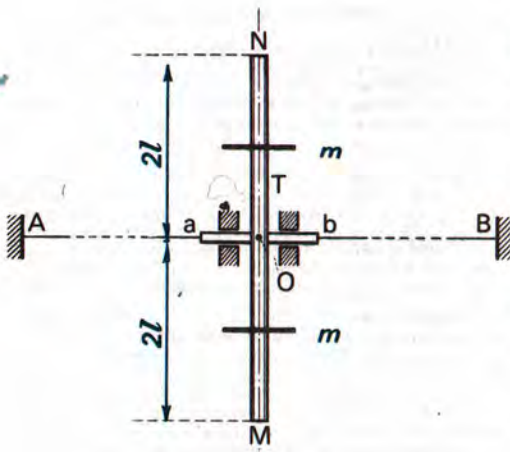


Fig. 1.

On exerce sur ce pendule des forces de torsion en utilisant deux fils d'acier cylindriques identiques Aa et Bb, horizontaux, soudés aux extrémités a et b de l'axe ab, et tendus dans le prolongement de l'axe ab, de part et d'autre de cet axe; l'autre extrémité, A et B, de chacun des fils étant fixée au support de l'appareil. La droite horizontale AaObB est donc l'axe de rotation du pendule S.

Un dispositif optique, qu'il est inutile de connaître, permet de mesurer les déplacements angulaires de ce pendule.

PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE PRÉLIMINAIRE

1. Les surcharges de masses m sont placées sur la tige T, de part et d'autre de l'axe ab, à une distance l de cet axe. Cette position sera désignée dans la suite du problème comme étant la position initiale des surcharges.

1° On désigne par J_l le moment d'inertie de la tige T par rapport à l'axe ab et par J_m le moment d'inertie d'une surcharge par rapport à un axe situé dans le plan de la surcharge suivant un diamètre.

Indiquer en fonction de J_l , J_m , m et l l'expression du moment d'inertie J_s du pendule S par rapport à l'axe AB, le moment d'inertie de l'arbre de rotation d'axe ab étant négligeable.

Calculer J_s avec les données numériques suivantes :

La tige T a une masse $\mu = 27$ g et une longueur $4l = 20$ cm. Les surcharges ont une masse $m = 30$ g; leur diamètre extérieur est $D = 40$ mm et le diamètre du trou fileté qu'elles comportent est 10 mm.

On posera dans la suite $J_s = m_s l^2$; calculer m_s .

On admettra pour traiter cette question que, si un cylindre a un diamètre petit par rapport à sa longueur, son moment d'inertie par rapport à un axe situé dans un plan de section droite et passant par le centre de gravité est $J = ML^3/12$, M étant la masse du cylindre et L sa longueur. On admettra aussi que le moment d'inertie d'un disque mince par rapport à l'un de ses diamètres est $J = MR^2/4$, M étant la masse du disque et R son rayon.

On rappelle, d'autre part, que le moment d'inertie d'un solide de masse M par rapport à un axe X situé à la distance L du centre de gravité est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à X et passant par le centre de gravité augmenté de la quantité ML^2 .

2° Les surcharges étant dans la position initiale qui a été définie et les fils ayant une torsion nulle, la tige T est verticale et en équilibre. La verticale ascendante passant par O sera prise comme origine des angles de rotation.

On écarte ensuite la tige T de cette position verticale d'un angle θ_0 ; les fils de torsion Aa et Bb exercent alors des forces de rappel ayant par rapport à l'axe AB un moment $C \theta_0$, C étant la constante de torsion pour l'ensemble des deux fils :

a. Montrer, par une méthode graphique par exemple, ou autrement si l'on préfère, que dans la rotation d'angle θ_0 , l'énergie potentielle du système a augmenté de $1/2 C \theta_0^2$;

b. Le pendule étant dans la position définie par l'angle θ_0 , on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant zéro. En négligeant tous les frottements, et en désignant par θ l'élongation angulaire à un instant quelconque t , déterminer la fonction $\theta = f(t)$, qui exprime l'élongation θ en fonction du temps; constater que le mouvement est périodique et donner les expressions de sa pulsation ω_0 et de sa période T_0 ;

c. Application numérique : Avec les valeurs numériques déjà indiquées ou obtenues dans les questions précédentes, calculer la valeur que doit avoir la constante de torsion C pour que la période T_0 soit égale à une seconde.

La valeur de C ainsi calculée sera utilisée dans les questions de la « première partie » qui suivent;

d. C ayant la valeur qui vient d'être calculée, quel devrait être le diamètre du fil d'acier constituant les fils de torsion, la longueur prévue pour chacun de ces fils étant $\lambda = 40$ cm?

Pour un fil cylindrique de longueur L , de diamètre D , la constante de torsion est donnée par la formule :

$$C = \frac{\pi G D^4}{32 L}$$

On adoptera ici, pour l'acier utilisé, $G = 8.10^{10}$ N/m².

II. On se propose maintenant d'étudier le mouvement du pendule quand les surcharges ne sont plus disposées symétriquement par rapport à l'axe ab :

1° La tige T étant en équilibre dans la position verticale et les surcharges étant dans leurs positions initiales, à la distance l de O, on abaisse la surcharge supérieure d'une longueur x .

a. En désignant par J le nouveau moment d'inertie du pendule S par rapport à l'axe ab, déterminer la variation $\Delta J = J - J_s$ et donner en fonction de x , m , m_s et l l'expression du rapport J/J_s ;

b. Le pendule ayant été amené dans la position définie par l'angle θ_0 , mesuré à partir de la verticale ascendante, on l'abandonne sans vitesse initiale. En négligeant tous les frottements, et en désignant par g l'accélération de la pesanteur, préciser la nature du mouvement du pendule. A quelle condition ce mouvement peut-il être considéré comme sinusoïdal et quelle est alors l'expression de sa période T ?

c. Cette condition étant satisfaite, on suppose en outre que x est petit devant l et que le moment résultant des forces de pesanteur, par rapport à l'axe de rotation, est petit devant le moment des forces de torsion. Établir dans ces conditions une expression approchée du rapport T^2/T_0^2 et montrer que la nouvelle période T présente avec la valeur T_0 un écart relatif $\frac{T - T_0}{T_0}$ proportionnel à x .

Application numérique : Pour quel déplacement x la période subit-elle ainsi une variation relative de 1 %? On admettra que l'accélération de la pesanteur a la valeur $g = 9,80$ m/s², les autres quantités utiles ayant les valeurs données ou obtenues dans les questions précédentes.

2° La tige T étant de nouveau en équilibre dans la position verticale et les surcharges à nouveau dans leurs positions initiales, à la distance l de O, on élève la surcharge inférieure d'une longueur x .

a. A quelle condition le déplacement x doit-il satisfaire pour que la position d'équilibre stable du pendule soit la même que dans le cas qui vient d'être étudié (en II, 1°)? Calculer la valeur limite de x pour qu'il en soit ainsi, en utilisant les valeurs numériques déjà données ou obtenues;

b. La condition précédente, qui vient d'être déterminée en a, étant satisfaite, comment peut-on transposer dans le cas présent les résultats acquis précédemment, en II, 1°, c, au sujet des petites variations de la période d'oscillation?

3° Les deux surcharges n'étant pas exactement symétriques par rapport à l'axe ab , on se propose de calculer le déplacement qu'il faut faire subir à l'une d'elles pour ramener en O le centre de gravité du pendule S, les conditions pour que le mouvement du pendule soit sinusoïdal et pour que les variations relatives de période soient proportionnelles aux déplacements x étant remplies. A cet effet, on mesure la période T_1 du pendule ; puis, faisant tourner l'appareil, support compris, de 180° autour de l'axe AB , on mesure la nouvelle période T_2 . On répète ensuite ces mêmes opérations après avoir déplacé une surcharge d'une longueur connue Δx , et on mesure ainsi deux nouvelles périodes T_3 et T_4 . Montrer qu'on peut calculer en fonction de ces quatre périodes et de Δx le nouveau déplacement qu'il faut faire subir maintenant à la surcharge pour ramener en O le centre de gravité du pendule.

DEUXIÈME PARTIE : DÉTERMINATIONS EXPÉRIMENTALES

Les surcharges étant de nouveau dans les positions initiales, à la distance l de O, et la torsion des fils étant nulle, on dispose maintenant le support de l'appareil de manière que, dans la position d'équilibre du pendule, la tige T soit horizontale, l'axe $AaObB$ restant lui-même horizontal. On conservera la verticale ascendante de O comme origine des angles, en sorte que la position d'équilibre initiale est maintenant définie par $\theta = \pi/2$ radians.

1° A partir de sa position initiale, on déplace une des surcharges d'une longueur connue x , qui sera comptée positivement quand on éloigne la surcharge de O et négativement quand on l'en rapproche, l'origine des déplacements x étant la position initiale, à la distance l de O. On choisit la surcharge déplacée de manière que l'angle θ définissant le nouvel équilibre du pendule varie dans le même sens que x .

a. Écrire, au moyen des données littérales utiles, la relation entre x et θ définissant la position d'équilibre ;

b. Un déplacement supplémentaire Δx de la surcharge provoque un déplacement angulaire $\Delta \theta$ de la position d'équilibre. L'expérience montre que pour des déplacements suffisamment faibles de la surcharge autour de sa position initiale, le rapport $\Delta \theta / \Delta x$ reste sensiblement constant. Justifier ce résultat.

Application numérique : L'expérience ayant montré que le rapport $\Delta \theta / \Delta x$ est 1,68 degré par millimètre, en déduire la valeur expérimentale de la constante de torsion C fournie par cette mesure, en utilisant pour les valeurs autres que C les valeurs numériques déjà indiquées.

On utilisera désormais comme valeur numérique de C , sauf indication contraire, celle qui vient d'être calculée ici.

c. Avec cette valeur de C et les valeurs numériques déjà indiquées pour les autres grandeurs qu'il sera nécessaire d'utiliser, déterminer la courbe représentant la variation en fonction de x de l'angle θ définissant la position d'équilibre correspondante, en ayant soin de préciser la valeur de x pour quelques valeurs particulières de θ .

d. Soit x_0 la valeur de x correspondant à une position d'équilibre définie par un angle θ_0 . Si on écarte le pendule de cette position et si on l'abandonne sans vitesse initiale dans une position définie par un angle θ_1 supérieur à θ_0 , il effectue des oscillations non sinusoïdales. En négligeant tout frottement, écrire la relation qui doit exister entre θ_1 et x_0 pour que, au cours de ces oscillations, la tige T atteigne sans la dépasser la position verticale (correspondant à $\theta = 0$). L'angle θ_1 ayant été déterminé expérimentalement pour une valeur connue de x_0 , écrire l'expression qui permettrait de déduire C de cette expérience.

2° Les surcharges de masses $m = 30$ g étant de nouveau dans leurs positions initiales, à la distance $l = 5$ cm de O, les oscillations du pendule sont sinusoïdales et restent sinusoïdales si on déplace simultanément les deux surcharges d'une même longueur x de manière qu'elles restent symétriquement disposées par rapport à l'axe ab .

a. Pour x nul, on mesure la période T_0 des oscillations ; $T_0 = 0,98$ seconde. En déduire une valeur expérimentale du moment d'inertie J_0 du pendule en adoptant comme valeur de la constante de torsion C celle qui a été déterminée expérimentalement

talement dans la question précédente, en 1° b de la « seconde partie ».

b. Montrer que pour les déplacements $\Delta l'$ assez faibles, et toujours égaux en valeur absolue, des surcharges autour de la position qu'elles occupent à une même distance l' de O (l' pouvant être quelconque et les surcharges restant symétriques par rapport à l'axe ab), la pulsation ω des oscillations subit des variations relatives proportionnelles au déplacement $\Delta l'$. Calculer la variation relative $\Delta \omega / \omega$ pour $\Delta l' = 1$ mm, avec $l' = 6$ cm, en adoptant pour moment d'inertie J_0 la valeur déterminée expérimentalement dans la question a ci-dessus,

TROISIÈME PARTIE : ÉTUDE DE L'AMORTISSEMENT

L'appareil est maintenant remplacé dans la position qu'il avait dans la première partie du problème, la tige T étant verticale dans la position d'équilibre, les surcharges dans leurs positions initiales ; mais on ajoute à l'extrémité inférieure de la tige T un dispositif amortisseur ; une masselotte disposée à l'autre extrémité ramène en O le centre de gravité du pendule ainsi modifié, le plan (AOB, MN) restant plan de symétrie du système.

1° Le dispositif amortisseur est une boucle conductrice fermée, de résistance R , d'inductance nulle, délimitant un secteur de couronne circulaire (fig. 2) de centre O, d'angle au centre α , de rayon moyen L et de largeur h ; en sorte que l'aire entourée par la boucle est limitée par deux rayons passant par O et faisant entre eux un angle α , ainsi que par deux portions de circonférence de centre O, ayant comme rayons $L + h/2$ et $L - h/2$. La boucle est située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du pendule. Dans la position d'équilibre, elle est traversée perpendiculairement par les lignes d'induction

d'un champ magnétique uniforme B fixe et limité exactement au secteur circulaire de centre O, d'angle au centre α , qui recouvre la boucle dans la position d'équilibre.

On impose au pendule un mouvement oscillatoire sinusoïdal d'amplitude angulaire constante θ_0 (l'angle θ_0 étant plus petit que α) et dont l'élongation peut être représentée en fonction du temps t par l'équation

$$\theta = \theta_0 \cos \Omega t,$$

la pulsation Ω étant imposée par le mécanisme qui entretient le mouvement.

a. Écrire les expressions à un instant t du flux du vecteur B à travers la boucle, de la force électromotrice induite, du courant induit dans la boucle et de la puissance électrique transformée en chaleur.

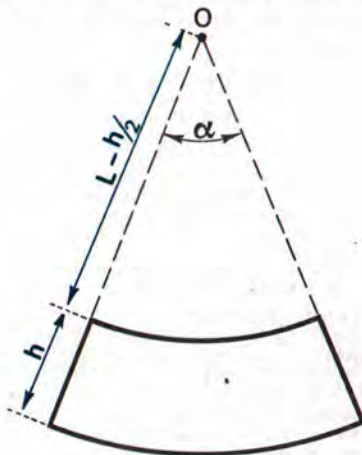


Fig. 2.

b. Préciser graphiquement l'allure des courbes représentant en fonction du temps les variations de l'angle θ et des grandeurs électriques qui viennent d'être considérées, en a.

c. Quelle est l'expression de la puissance moyenne P absorbée par l'amortisseur, ainsi que celle de l'énergie absorbée au cours d'une oscillation ?

Application numérique : $L = 12,5 \text{ cm}$; $h = 4 \text{ cm}$; $R = 0,01 \text{ ohm}$; $B = 0,5 \text{ Wb/m}^2$ (ou tesla); $\theta_0 = \pi/6$; période du mouvement = 1 seconde.

d. Montrer que le moment Γ par rapport à l'axe AB des forces électromagnétiques s'opposant au mouvement est de la forme $\Gamma = K \frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ étant la dérivée de θ par rapport à t .

(On rappelle que le travail W des forces électromagnétiques s'exerce sur un circuit parcouru par un courant continu I et « coupant » un flux φ , au cours d'un déplacement, a la valeur $W = I\varphi$.)

Application numérique : Calculer la constante de proportionnalité K , en précisant l'unité, avec les données numériques indiquées en c ci-dessus.

2° On remplace l'amortisseur précédent par un disque mince situé dans un plan contenant l'axe AB et dont le centre O' est à une distance L de l'axe AB. Au cours du mouvement imposé au pendule et déjà défini en 1° ci-dessus, ce disque se meut dans un fluide qui oppose à ses déplacements des forces dont la résultante F peut être considérée comme appliquée au centre O' du disque et comme ayant la valeur $F = k v$, v étant la vitesse linéaire du centre O' et k étant une constante.

a. Quelle est l'expression de la puissance instantanée absorbée par cet amortisseur ? Quelle est l'expression de sa valeur moyenne ?

b. L'énergie mécanique W_1 absorbée par l'amortisseur au cours d'une période étant égale à 0,1 joule, calculer le coefficient k de la relation $F = k v$, en précisant l'unité, et avec les données numériques suivantes : $L = 12,5 \text{ cm}$; $\theta_0 = \pi/6$; période du mouvement = 1 seconde.

c. Montrer que le moment par rapport à l'axe de rotation des forces de freinage exercées par cet amortisseur a même forme que pour l'amortisseur décrit précédemment, en 1° ci-dessus.

QUATRIÈME PARTIE : OSCILLATIONS FORCÉES

Le pendule est muni d'un amortisseur du genre étudié dans la troisième partie, ci-dessus, et opposant au mouvement du pendule des forces dont le moment par rapport à l'axe de rotation est de la forme $K \frac{d\theta}{dt}$, K étant une constante.

En outre, l'extrémité B du fil Bb demeurant fixe, un mécanisme exciteur imprime à l'extrémité A du fil Aa une rotation mesurée par un angle β défini à tout instant t par la fonction :

$$\beta = \beta_0 \sin \Omega t$$

d'amplitude et de pulsation constantes. On prendra la verticale ascendante comme origine des angles pour β et pour l'angle θ qui mesure l'élongation angulaire du pendule.

Les surcharges sont dans leurs positions initiales et le centre de gravité du pendule est en O. Au repos, β étant nul et les fils ayant une torsion nulle, le pendule est en équilibre, la tige T dans la position verticale ($\theta = 0$).

1° A l'instant zéro, on met en action le mécanisme exciteur. En désignant par J le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe AB et par C la constante de torsion de l'ensemble des fils Aa et Bb, écrire l'équation du mouvement du pendule, qui définit la relation entre β et θ à un instant t .

2° L'expérience montre qu'au bout d'un certain temps, le mouvement du pendule est sinusoïdal, de pulsation Ω , d'amplitude constante θ_0 et qu'il présente un retard de phase constant φ par rapport au mouvement exciteur. On pose donc :

$$\theta = \theta_0 \sin (\Omega t - \varphi)$$

Déterminer θ_0 et φ .

3° Quelles sont les particularités du mouvement du pendule si par déplacements simultanés des surcharges, le centre de gravité du système restant en O, on donne au moment d'inertie du pendule la valeur particulière $J' = \frac{C}{\Omega^2}$?

Application numérique : Dans ces conditions particulières, $\beta_0 = \pi/8$; $\theta_0 = \pi/4$, la période du mouvement étant toujours une seconde; en déduire la valeur de la constante K du dispositif amortisseur, en adoptant comme constante de torsion de l'ensemble des fils la valeur :

$$C = 10^{-4} \text{ mètre-newton par radian.}$$

1965

La première partie du problème qui suit comporte des rappels et des résultats qui seront utilisés dans les quatre parties suivantes.

PREMIÈRE PARTIE : DÉFINITIONS ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX

I. — 1° On appelle *quantité de mouvement* d'un point

matériel de masse m , ayant une vitesse $\vec{v}$, la quantité vectorielle :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

La quantité de mouvement d'un système de points matériels est la somme vectorielle des quantités de mouvement des points qui le composent et on démontre que cette somme est égale à la quantité de mouvement qu'aurait le centre de gravité du système s'il était un point matériel ayant une masse égale à la masse totale du système.

En déduire que si les forces extérieures agissant sur un système ont une somme géométrique (ou résultante générale) nulle, la quantité de mouvement du système est constante.

I. — 2° Si une force $\vec{F}$ agit sur un point matériel pendant un temps dt , on appelle *impulsion* reçue par le point pendant

le temps dt la quantité vectorielle $\vec{F} \cdot dt$.

Montrer que l'impulsion est égale à la variation de la quantité de mouvement pendant le même intervalle de temps.

I. — 3° Si un point matériel N tourne autour d'un axe X, on appelle *moment cinétique* de N par rapport à X le moment par rapport à cet axe du vecteur représentant la quantité de mouvement de N. Le moment cinétique d'un système tournant autour d'un axe est égal à la somme des moments cinétiques des points qui composent le système.

Montrer que dans le cas d'un solide tournant autour d'un axe, le moment cinétique s'exprime simplement en fonction de la vitesse angulaire et du moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.

DEUXIÈME PARTIE : MOUVEMENT D'UN PENDULE

Une sphère solide homogène S, de rayon R , de centre A et de masse m_1 est suspendue à un point fixe P par un fil de masse négligeable et sans raideur. Ce pendule, écarté de sa position d'équilibre, oscille de part et d'autre de cette position, le centre A restant dans un plan vertical V passant par P. On désignera par l la distance fixe PA, par A_0 la position de A lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre, par θ l'élongation angulaire du pendule à un instant quelconque, c'est-à-dire l'angle (PA_0, PA) , et par θ' la dérivée de θ par rapport au temps. L'intensité du champ de pesanteur sera désignée par g .

II. — 1° Exprimer en fonction des données et de θ' l'énergie cinétique du pendule :

a. En assimilant la sphère S à un point matériel de masse m_1 ;

b. En tenant compte du moment d'inertie, $J = \frac{1}{2} m_1 R^2$ de la sphère par rapport à un de ses diamètres.

On rappelle que le moment d'inertie d'un solide de masse M par rapport à un axe X situé à la distance L du centre de gravité est égal au moment d'inertie par rapport à un axe

parallèle à X et passant par le centre de gravité augmenté de la quantité ML^2 .

II. — 2° A quelle condition la longueur l et le rayon R doivent-ils satisfaire pour que l'énergie cinétique calculée ci-dessus (en b) ne diffère que de 1/100 en valeur relative de celle qui a été calculée en a? Quelle doit être la valeur minimale de l pour qu'il en soit ainsi si R est égal à 1 centimètre?

III. — 3° L'énergie potentielle du pendule étant considérée comme nulle dans la position d'équilibre, quelle doit être son énergie totale minimale pour que le point A décrive une circonférence complète dans le plan vertical V, le fil de suspension restant constamment tendu suivant PA?

Application numérique : Calculer cette valeur minimale pour :

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R = 1 \text{ cm}$, $l = 3 \text{ cm}$, $m_1 = 35 \text{ g}$.

II. — 4° La sphère S étant assimilée à un point matériel, calculer la vitesse linéaire maximale v_1 du point A quand l'amplitude (ou élongation angulaire maximale) a la valeur θ_0 .

III. — 5° La sphère étant toujours assimilée à un point matériel, on projette son ombre sur un plan horizontal H, situé très peu en dessous de A_0 , au moyen d'une source lumineuse ponctuelle placée en P. On désigne par u la distance A_0A , parcourue par l'ombre de A lorsque θ varie de $\theta = \theta_0$ à $\theta = 0$. Montrer que si l est beaucoup plus grand que u , la vitesse linéaire maximale de A est sensiblement proportionnelle à u . Exprimer cette vitesse maximale v_1 en fonction de u et de la distance du point P au plan H. Quelle valeur faut-il donner à l pour que les mesures v_1 et u aient la même valeur numérique (ou, en d'autres termes, pour que v_1 et u soient représentés par le même nombre)?

TROISIÈME PARTIE : INTERACTION PAR CHOC

On considère deux pendules constitués comme celui qui a été étudié dans la seconde partie ci-dessus : l'un est une sphère homogène de centre A_0 , de masse m_1 , suspendue à un point P; l'autre est une sphère homogène, de centre B, de masse m_2 , suspendue à un point P' qui peut être confondu avec P. Les fils de suspension sont de masse négligeable et sans raideur.

Dans les positions d'équilibre des pendules, les points A et B occupent respectivement les positions A_0 et B_0 , les deux sphères étant en contact. Les distances PA_0 et $P'B_0$ ont la même valeur l ($PA_0 = P'B_0 = l$) et on ne considère dans les questions qui suivent (III. 1° à III. 3°), que le cas particulier où l est numériquement égal à g (mesure de l'intensité du champ de pesanteur), $l = g$.

Dans tout ce qui suit également, les sphères A et B seront assimilées à des points matériels; et les amplitudes seront supposées assez petites pour que l'on puisse considérer que ces points se meuvent dans un plan horizontal situé à la distance l de P ou de P'. On pourra confondre A_0 et B_0 .

On met les pendules en mouvement en abandonnant A sans vitesse initiale en un point A_1 et B, sans vitesse initiale aussi, en un point B_1 . Les longueurs $u_1 = A_0A_1$ et $u_2 = B_0B_1$ sont petites par rapport à l .

III. — 1° Montrer que dans ces conditions, si A et B sont lâchés simultanément, ces deux points matériels vont nécessairement se rencontrer en A_0 , confondu avec B_0 , quels que soient A_1 et B_1 .

Dans le cas particulier considéré, que représente la quantité vectorielle :

$$m_1\vec{A_0A_1} + m_2\vec{B_0B_1}?$$

Les déplacements des points A et B pendant la durée très courte du choc en A_0B_0 sont négligeables; mais, après le choc, le point A décrit le segment A_0A_2 , sa vitesse s'annulant en A_2 ; de même, le point B parcourt un segment B_0B_2 , sa vitesse s'annulant en B_2 . Que représente la quantité vectorielle :

$$m_1\vec{A_0A_2} + m_2\vec{B_0B_2}?$$

III. — 2° Soit T la tension du fil de suspension de A, m_1g le poids de A, R la force de contact exercée par B sur A pen-

dant le choc en A_0B_0 , et Δt la durée très courte de ce choc, pendant laquelle toutes les forces qui viennent d'être considérées seront supposées constantes. Montrer que si on a encore $l = g$, on peut écrire :

$$m_1(\vec{A_0A_2} - \vec{A_0A_1}) = (\vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{R}) \Delta t.$$

En fait, la quantité $\vec{T} + m_1\vec{g}$ est toujours négligeable par rapport à $\vec{R}$. Montrer que l'on peut écrire :

$$m_1\vec{A_0A_2} + m_2\vec{B_0B_2} = m_1\vec{A_0A_1} + m_2\vec{B_0B_1}.$$

Montrer aussi qu'il n'était pas nécessaire, pour établir ce dernier résultat, de postuler la constance des forces.

III. — 3° On précise la nature du choc entre A et B, en A_0B_0 , en supposant que, la bille B étant initialement au repos en B_0 , les billes A et B ont après le choc la même vitesse et s'accompagnent dans leur mouvement; on dit en pareil cas que le choc est *mou*.

a. Calculer $\vec{B_0B_2}$ en fonction de $\vec{A_0A_1}$, de m_1 et de m_2 .

b. Calculer la diminution relative de l'énergie cinétique totale du système AB au cours de ce choc *mou* (rapport de la diminution d'énergie cinétique totale à l'énergie cinétique totale initiale).

Montrer que si l'on peut avoir quelque chance de briser la sphère B au moyen de ce choc, il convient que sa masse m_2 soit beaucoup plus grande que la masse m_1 .

III. — 4° On considère maintenant le choc de deux billes A et B, toujours assimilées à des points matériels, de masses m_1 et m_2 , mobiles dans un plan horizontal; et on suppose que le choc est, non plus *mou* comme précédemment, mais parfaitement *élastique*; ce qui signifie que l'énergie cinétique totale du système est conservée au cours du choc, gardant la même valeur immédiatement avant et immédiatement après le choc.

a. On considère d'abord le cas où m_1 est égal à m_2 , et où la bille B, initialement au repos, est heurtée par la bille A, celle-ci ayant une certaine vitesse. Montrer qu'après le choc les trajectoires de A et B sont orthogonales à condition que le choc ne soit pas *direct*, c'est-à-dire à condition que la trajectoire de B après le choc et la trajectoire initiale de A ne soient pas colinéaires.

Qu'arrive-t-il si le choc, au contraire, est *direct*?

b. On suppose encore que la bille A, ayant une certaine vitesse, heurte la bille B initialement au repos; mais on suppose que le choc est *direct* et que les masses m_1 et m_2 peuvent être différentes. Calculer la vitesse v_1' de A après le choc en fonction de sa vitesse v_1 avant le choc et du rapport des masses

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}.$$

Une des valeurs trouvées est indépendante de μ ; interpréter cette solution.

Une autre valeur est fonction de μ ; étudier sa variation en fonction de μ pour une valeur donnée de v_1 et tracer la courbe figurative (cette courbe sera tracée sur le papier millimétré remis avec l'énoncé et sera jointe à la copie remise).

Quelle est la valeur particulière de v_1' si μ augmente indéfiniment? Interpréter ce résultat.

QUATRIÈME PARTIE : AUTRES PHÉNOMÈNES D'INTERACTION

IV. — 1° On relie au moyen de fils métalliques chacune des armatures d'un condensateur chargé de capacité C_1 , à une des armatures d'un condensateur non chargé de capacité C_2 (en d'autres termes, une des armatures du condensateur C_1 est reliée à une des armatures du condensateur C_2 , l'autre armature de C_1 étant reliée à l'autre armature de C_2). Il n'y a pas d'autre capacité à considérer dans ce système, en dehors de C_1 et C_2 . Montrer que l'énergie électrostatique finale de l'ensemble est inférieure à l'énergie électrostatique initiale. Calculer la diminution relative de cette énergie et constater que cette diminution relative ne dépend que des capacités C_1

et C_2 . Montrer que si l'on voulait produire de la chaleur dans cette opération, il faudrait que C_2 soit supérieur à C_1 .

Comparer le phénomène étudié ici à celui qui a été étudié précédemment dans la troisième partie en III. 3° (choc mou de deux sphères A et B). Quelles sont ici les quantités analogues à la quantité de mouvement $p = mv$ d'un point matériel et à l'énergie cinétique : $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}pv$ de ce point ?

IV. — 2° On considère un ressort de longueur l qui exerce ou subit une force f proportionnelle à son allongement $l - l_0$; l_0 étant la longueur du ressort au repos et cet allongement pouvant être négatif (en ce cas, le ressort est contracté sous l'action de la force f ; tandis qu'il exerce une force f si l'allongement $l - l_0$ est positif) :

$$f = K(l - l_0);$$

K est appelé raideur du ressort.

a. Montrer, par une méthode graphique par exemple, ou autrement si l'on préfère, que l'énergie potentielle du ressort est :

$$\frac{1}{2}K(l - l_0)^2.$$

b. On associe deux ressorts du type précédent, de raideurs différentes K_1 et K_2 , en les disposant suivant la même direction et de manière que la longueur totale de l'ensemble reste fixe. Représenter schématiquement ce dispositif et déterminer la variation de l'énergie totale du système des deux ressorts quand l'un se déforme à partir de la longueur l_0 qu'il a normalement au repos.

Préciser l'analogie de ce phénomène avec les deux interactions étudiées précédemment en IV. 1°, ci-dessus (quatrième partie), et en III. 3° (troisième partie).

IV. — 3° Au moyen d'un générateur électrique, on établit un courant continu d'intensité I dans un circuit constitué par une bobine ayant une inductance L indépendante de l'intensité qui traverse le circuit. Montrer que, pendant l'établissement du courant I , l'énergie fournie par le générateur est supérieure à celle qui apparaît sous forme d'effet Joule. La différence entre ces deux énergies doit être considérée comme emmagasinée dans le circuit; on l'appelle *énergie électromagnétique* du circuit. Calculer cette énergie électromagnétique en fonction de L et de I ; donner aussi son expression en fonction de I et du flux magnétique Φ créé par le courant I à travers le circuit.

Comparer les expressions obtenues à celles qui expriment l'énergie d'un condensateur.

IV. — 4° Les grandeurs telles que la quantité de mouvement, $p = mv$, ou la charge d'un condensateur $q = CU$ (C étant la capacité du condensateur et U la différence de potentiel entre ses armatures), ou l'allongement d'un ressort $l - l_0 = \frac{1}{k}f$, qui

s'échangent entre deux systèmes en interaction en se conservant au total, sont appelées *grandeurs extensives* ou *extensités*. Les grandeurs v , U , f constituant des variables de tension. Dans l'expression de l'énergie électromagnétique d'un circuit à inductance constante, on admettra que le flux Φ est une extensité, l'intensité I étant une variable de tension.

On couple deux systèmes mettant en jeu deux extensités x et y , respectivement proportionnelles aux variables de tension X et Y qui leur correspondent :

$$x = a.X, \quad y = b.Y$$

et de telle sorte que l'on ait :

$$X = \frac{dy}{dt} \quad \text{et} \quad Y = \frac{dx}{dt},$$

$\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dx}{dt}$ représentant les dérivés par rapport au temps de y et x .

Montrer qu'il se produit des oscillations de tension; c'est-à-dire que l'on a, par exemple :

$$X = X_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Calculer ω .

Montrer que la somme des énergies :

$$W = \frac{1}{2}aX^2 + \frac{1}{2}bY^2$$

est constante.

Appliquer ces considérations générales aux deux exemples suivants, en précisant dans chaque cas la valeur de ω en fonction des caractéristiques du système :

— couplage de l'énergie cinétique d'un point matériel et de l'énergie potentielle d'un ressort exerçant ou subissant des forces proportionnelles aux allongements;

— couplage de l'énergie électromagnétique d'une bobine ayant une inductance fixe et de l'énergie électrostatique d'un condensateur.

IV. — 5° Si dans la question précédente (IV. 4°), on tient compte de certains effets qui, en dissipant de l'énergie, amortissent les oscillations avec production de chaleur, il faut écrire :

$$Y = -\frac{dx}{dt} + r.x, \quad \text{au lieu de} : Y = -\frac{dx}{dt}.$$

r étant une constante. Que représente r dans chacun des exemples qui viennent d'être examinés (en IV. 4°) ?

IV. — 6° Deux sphères solides homogènes, l'une S_1 de masse m_1 et de rayon R_1 , l'autre S_2 de masse m_2 et de rayon R_2 , sont reliées par un fil de torsion dont l'axe vertical passe par les centres A et B des deux sphères. On désignera par C la constante de torsion du fil.

a. Dans une première expérience, la sphère S_1 étant fixe, on fait tourner la sphère S_2 d'un angle θ autour de l'axe du fil de torsion, puis on abandonne la sphère à elle-même. Exprimer en fonction des données la période T_2 du mouvement S_2 .

b. Dans une seconde expérience, on retourne le système, de manière à pouvoir faire osciller la sphère A autour de l'axe vertical du fil de torsion, la sphère B étant immobile; soit T_1 la période de ce mouvement. Montrer que l'ensemble des expériences a. et b. pourrait servir à comparer deux masses volumiques.

c. Le système des deux sphères, toujours reliées par le fil de torsion, est suspendu par un fil sans torsion; les deux fils (de suspension et de torsion) ont le même axe; cet axe est vertical et passe par les centres A et B des sphères. On désigne : par θ_1 et θ_2 , les rotations des sphères autour de cet axe, à un instant quelconque à partir de leurs positions d'équilibre; par $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$, leurs vitesses angulaires au même instant; par J_1 et J_2 , leurs moments d'inertie par rapport à l'axe de rotation. Montrer que le moment cinétique total $J_1\dot{\theta}_1 + J_2\dot{\theta}_2$ est constant; en déduire une relation entre les angles θ_1 et θ_2 .

IV. — 7° On suppose maintenant que la sphère S_2 est mobile sans frottement autour d'un axe vertical Z passant par son centre; elle est munie extérieurement d'une tige T rigide, d'axe Z, de diamètre et de masse négligeables, sur laquelle on peut enfile la sphère S_1 , celle-ci étant percée d'un canal diamétral, de diamètre négligeable, dans lequel on peut loger la tige T.

La sphère S_1 étant immobile, on enfille sur la tige T la sphère S_2 , au moment où sa vitesse angulaire de rotation autour du canal diamétral qu'elle comporte a la valeur $\dot{\theta}_1$. Par suite du frottement qui apparaît alors entre S_1 et S_2 , la vitesse angulaire relative de S_1 par rapport à S_2 s'annule; c'est-à-dire que S_1 et S_2 ont bientôt la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$, autour de l'axe de la tige T. Calculer $\dot{\theta}$. Quelle est la diminution relative d'énergie cinétique dans cette interaction? Cette question a-t-elle des analogies avec des questions proposées dans les paragraphes précédents ?

CINQUIÈME PARTIE : INTERACTION AUX GRANDES VITESSES

On revient maintenant à l'étude de l'interaction de deux points matériels A et B, mais en supposant ces points animés de grandes vitesses, pour lesquelles il faut utiliser la mécanique relativiste, dont les données utiles sont indiquées ci-après :

— la quantité de mouvement d'un point de masse m et de vitesse v est encore définie en module par la relation $p = mv$; mais la masse m varie avec la vitesse v suivant la relation :

$$(1) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

m_0 étant la masse du point considéré supposé au repos et c étant la vitesse de la lumière dans le vide ;

— on admet que dans l'interaction de deux points matériels, il y a toujours conservation de la quantité de mouvement totale du système ;

— d'autre part, l'énergie totale d'une particule de masse m est :

$$E = mc^2,$$

son énergie au repos étant :

$$E_0 = m_0 c^2,$$

les valeurs de m et m_0 étant celles qui ont été définies dans la relation (1) ci-dessus ; et on appelle *énergie cinétique* de la particule la différence :

$$W = E - E_0 = (m - m_0)c^2.$$

A condition d'utiliser cette définition pour l'énergie cinétique, le théorème de l'énergie cinétique est encore applicable.

On appellera, dans la suite, *masse relativiste* la masse définie par la relation (1) et *électron relativiste* un électron donnant lieu à l'application des résultats qui viennent d'être rassemblés.

V. — 1° Montrer dans ces conditions que le module de la quantité de mouvement d'une particule peut s'exprimer en fonction de son énergie au repos E_0 et de son énergie cinétique W par la relation :

$$mv = \frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + W)W}$$

Calculer en joule et en électron-volt (un électron-volt vaut $1,60 \times 10^{-19}$ joule) l'énergie au repos E_0 d'un électron de masse $m_0 = 9,11 \times 10^{-31}$ kg. On adoptera pour c la valeur : $c = 3,00 \times 10^8$ m/s.

Sous quelle différence de potentiel faudrait-il accélérer un électron initialement au repos pour doubler son énergie totale (la charge électrique de l'électron étant, en valeur absolue : $1,60 \times 10^{-19}$ coulomb) ? Quelles seraient alors la masse, la quantité de mouvement et la vitesse de l'électron ?

V. — 2° Un électron relativiste A d'énergie cinétique W_1 vient heurter un électron B initialement au repos. Après ce choc, les trajectoires des deux électrons font entre elles un angle θ ; et les électrons possèdent des énergies cinétiques W' et W'' .

Exprimer $\cos \theta$ en fonction de W_1 , W' , W'' et de l'énergie E_0 d'un électron au repos.

Que devient cette expression pour un choc élastique qui conserve l'énergie cinétique totale ?

Montrer que si W_1 est faible par rapport à E_0 , l'angle θ est voisin de $\pi/2$.

V. — 3° On considère un rayonnement électromagnétique de fréquence ν . On sait, et on admettra, que l'on peut considérer ce rayonnement comme constitué par des « particules », appelées *photons*, se déplaçant avec la vitesse c de la lumière dans le vide et transportant chacune une énergie $h\nu$, h étant une constante universelle (constante de Planck).

Dans toutes les questions qui suivent, la vitesse des photons a toujours la valeur c , sans que le texte le rappelle.

Quelle est la masse relativiste d'un photon ? Montrer que sa « masse au repos » m_0 , ou masse propre, est nulle. En déduire que l'énergie d'un photon est en totalité cinétique et donner l'expression de la quantité de mouvement d'un photon.

V. — 4° Un photon faisant partie du rayonnement de fréquence ν vient heurter un électron initialement au repos. Après ce choc, le photon se propage dans une direction qui fait l'angle θ avec la trajectoire de l'électron et le rayonnement dont il fait maintenant partie a la fréquence ν' . Le choc ne modifiant pas l'énergie totale du système, calculer $\cos \theta$ en fonction des fréquences ν, ν' et de l'énergie E_0 de l'électron au repos.

V. — 5° Des photons arrivent normalement sur une surface plane parfaitement réfléchissante, en sorte qu'ils repartent dans

la direction opposée, normalement à la surface, et avec la même énergie.

Quelle est la variation de la quantité de mouvement d'un photon au cours de la réflexion sur la surface du miroir ?

Si E désigne l'énergie reçue par unité de temps par l'unité de surface du miroir, cette énergie étant apportée par le rayonnement que les photons constituent, quelle est l'impulsion donnée aux photons dans l'unité de temps par l'unité de surface du miroir ?

En déduire que le rayonnement exerce sur la surface du miroir des forces de pression et calculer cette *pression de radiation* en fonction de E et de la vitesse de la lumière dans le vide.

Applications numériques : Quelle serait la pression P exercée par le rayonnement solaire, sachant que celui-ci apporte 2 calories par minute et par centimètre carré de surface ? On adoptera comme équivalent mécanique de la calorie la valeur 4,18 joules par calorie.

Quelle masse d'oxygène devrait-on introduire, à 27° C, dans un récipient ayant une capacité de un litre pour que la pression dans ce récipient ait la valeur P qui vient d'être calculée ? On considérera l'oxygène comme un gaz parfait, de masse molaire $M = 32$ grammes ; on adoptera comme constante des gaz parfaits la valeur $R = 8,31$ joules par degré Kelvin, et on admettra que la relation entre la température Kelvin T et la température Celsius t est $T = t + 273$.

La pression dans le récipient ayant la valeur P , quel serait dans ce récipient le nombre de molécules d'oxygène par centimètre cube (le nombre d'Avogadro étant $N = 6,02 \times 10^{23}$) ?

1966

Dans tout le problème qui suit, on négligera la résistance de l'air, ainsi que toutes les autres forces de frottement et les forces créées par la pression atmosphérique.

PREMIÈRE PARTIE

On se propose dans cette première partie d'étudier quelques caractéristiques du mouvement d'un projectile à l'intérieur du canon d'une arme à feu. Dans toutes les questions concernant cette étude (I. 1° à I. 5°), on supposera que le tir est horizontal ; c'est-à-dire que l'axe du canon de l'arme à feu est horizontal. Le projectile, de masse m , sera considéré comme un cylindre de révolution de rayon r limité par deux sections droites ; il parcourt dans le canon de l'arme une longueur l en un temps t_0 et sort de l'arme avec une vitesse horizontale v_0 . La force qui agit sur le projectile dans le canon de l'arme sera désignée par F_x ; on la considérera comme horizontale ; cette force est créée par les gaz G dus à la combustion ou à l'explosion de la poudre.

I. — 1° On suppose d'abord que la force F_x est constante pendant tout le trajet l ; on néglige le recul de l'arme à feu et on suppose, en outre, que le mouvement du projectile dans le canon de l'arme est un mouvement de translation (il n'y a pas de rotation). Quelles sont dans ces conditions les relations qui permettent de calculer l'accélération γ de ce mouvement, le temps t_0 et la force F_x , si l'on connaît m , l et v_0 ?

Applications numériques : Calculer γ , t_0 et F_x , ainsi que la pression sur le culot du projectile dans les deux cas suivants, correspondant respectivement à une balle de fusil et à un obus de canon :

- $v_0 = 500$ m/s ; $l = 0,65$ m ; $m = 10$ grammes ; diamètre du culot : 7,5 mm ;
- $v_0 = 500$ m/s ; $l = 2,3$ m ; $m = 8$ kg, diamètre du culot : 75 mm.

I. — 2° On suppose encore F_x constant et on néglige encore le recul de l'arme ; mais on suppose qu'un mouvement de translation du projectile se superpose un mouvement de rotation rapide autour de son axe (qui assure ultérieurement la stabilité de cet axe par un effet gyroscopique) ; cette rotation est obtenue de la manière suivante : la paroi intérieure du canon

de l'arme est « rayée », c'est-à-dire comporte une rainure en forme d'hélice de pas constant; une saillie du projectile impose à celui-ci un mouvement hélicoïdal en glissant contre cette rainure. On adoptera comme définition de cette hélice à pas constant tracée sur un cylindre de révolution la propriété suivante: la tangente en chaque point de l'hélice fait un angle constant θ avec l'axe du cylindre (ici, l'axe du canon).

a. Si r est le rayon du cylindre et H le pas de l'hélice, c'est-à-dire la longueur de la progression le long de l'axe correspondant à un tour complet sur l'hélice, donner la relation entre θ , H et r . Calculer H pour $\theta = 15^\circ$ et $2r = 75$ mm;

b. Quelle est, en fonction de r et de θ , au cours du mouvement d'un point le long de l'hélice, la relation entre le module de la composante axiale V de la vitesse instantanée et le module ω de la vitesse instantanée de rotation autour de l'axe? Même question pour les modules des accélérations instantanées correspondantes. Quelle est la valeur ω_0 de ω qui correspond à la valeur $V_0 = 500$ m/s de la vitesse axiale V , pour $\theta = 15^\circ$ et $2r = 75$ mm?

c. Montrer que l'action sur le projectile d'une force dirigée suivant l'axe du canon et d'intensité constante F_a lui communique un mouvement hélicoïdal dont l'accélération axiale, de module γ , et l'accélération angulaire autour de l'axe sont constantes. Calculer le rapport $\frac{F_a}{\gamma}$. On désignera par J le moment d'inertie du projectile par rapport à son axe.

Montrer que tout se passe par rapport à la première question (I. 1°) comme si la masse m du projectile était remplacée par une masse fictive μ , que l'on exprimera en fonction de m , de r , de J et de θ .

d. Le projectile étant considéré comme homogène, de moment d'inertie $J = 1/2 mr^2$ par rapport à son axe, calculer la masse fictive μ dans le cas de l'application numérique de la première question (I. 1°) avec $\theta = 15^\circ$.

I. — 3° On admet encore que F_a est constant, mais on suppose maintenant que l'arme (il s'agit par exemple d'un canon à tir rapide) est montée de manière que le canon, solidaire d'un chariot mobile, peut glisser horizontalement sans frottement le long d'un affût fixe. Aucune force ayant une composante horizontale autre que celle créée par les gaz G , ne s'exerce sur le canon et le chariot pendant la phase du mouvement qui va être étudié. Montrer que le canon recule pendant que le projectile le parcourt. On désignera par v' , sa vitesse au moment où le projectile sort du canon avec la vitesse v_a et par M sa masse, chariot compris; on négligera la masse des gaz contenus dans le canon et on supposera pour le moment que celui-ci n'est pas rayé (comme dans la première question, I. 1°). Calculer dans ces conditions v' , en fonction de m , M et v_a . Montrer que le rapport entre l'énergie cinétique du projectile et celle du canon, chariot compris, est constant pendant le mouvement du projectile dans le canon; calculer ce rapport en fonction de m et de M . Quelle conséquence pratique peut-on déduire de ce résultat?

Comment les expressions de γ , t_a et F_a obtenues dans la première question (I. 1°) doivent-elles être modifiées, pour une même valeur de v_a , si on veut tenir compte du recul du canon qui vient d'être étudié?

Application numérique: Calculer v' , γ , t_a et F_a avec les données de l'application numérique b de la première question (I. 1°) en supposant $M = 60$ kg.

I. — 4° Que deviennent les résultats de la question précédente (I. 3°) si on suppose que le canon est rayé, comme dans la question I. 2°, dont on utilisera les données?

I. — 5° L'hypothèse d'une force F_a constante au cours du mouvement du projectile dans le canon, qui a été faite jusqu'ici, étant très éloignée de la réalité, on supposera maintenant que les gaz G se détendent au cours de ce mouvement. De façon plus précise, on admettra que la formation de ces gaz a été instantanée, de sorte qu'à l'instant où le projectile part du repos, la chambre à poudre, de volume $u_1 = 2$ litres, derrière le projectile, est remplie de gaz à la pression p_1 , ce gaz se détendant ensuite de façon réversible et adiabatique (c'est-à-dire sans échange de chaleur avec le milieu extérieur)

en chassant le projectile: sa pression p (supposée la même en tous points) et son volume u sont alors liés constamment par la relation $pu^n = \text{constante}$, l'exposant n de la puissance de u étant égal à 1,1 ($pu^{1.1} = \text{constante}$).

a. Tracer la courbe représentant la variation de la pression du gaz en fonction de son volume, la pression p_1 étant représentée en ordonnée par 15 cm et un volume d'un litre étant représenté en abscisse par 2 cm. Délimiter la partie utile de cette courbe avec les données de l'application numérique b de la première question (I. 1°).

b. En utilisant ce graphique, ou autrement, calculer, en fonction de la pression maximale p_1 , le travail W fourni par le gaz au cours de sa détente dans le canon et montrer que ce travail peut se mettre sous la forme $W = k p_1$, où k ne dépend pas de p_1 . Déterminer la valeur de k dans le système international, S.I., c'est-à-dire en exprimant les pressions en pascal et le travail en joule, les données étant les mêmes que dans l'application numérique b de la première question (I. 1°).

c. La constante k ayant la valeur qui vient d'être calculée, la vitesse v_a et la masse m ayant toujours les valeurs 500 m/s et 8 kg, calculer la pression maximale p_1 , ainsi que la pression qu'ont les gaz G à l'instant où le projectile sort du canon de l'arme. On fera ces calculs: d'abord dans les conditions de la première question (I. 1°), puis dans celles de la 4° question (I. 4°), où l'on tient compte à la fois de la rotation du projectile et du recul du canon, les données numériques étant alors celles qui ont été indiquées dans les seconde et troisième questions (I. 2° et I. 3°).

DEUXIÈME PARTIE

On se propose d'étudier dans cette seconde partie des procédés permettant de mesurer la vitesse des projectiles; après avoir établi ou rappelé dans les deux premières questions qui suivent (II. 1° et II. 2°) quelques résultats généraux.

II. — 1° On appelle *quantité de mouvement* d'un point matériel de masse m , ayant une vitesse $\vec{v}$, la quantité vectorielle :

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$$

La quantité de mouvement d'un système de points matériels est la somme vectorielle des quantités de mouvement des points qui le composent; on démontre, et on admettra ici, que cette somme est égale à la quantité de mouvement qu'aurait le centre de gravité du système s'il était un point matériel ayant une masse égale à la masse totale du système, la vitesse de ce point étant celle du centre de gravité.

Démontrer que si un système de points matériels est soumis pendant un temps dt à des forces extérieures ayant une somme géométrique (ou résultante générale) $\vec{F}$, la quantité de mouvement du système varie de $\vec{F} \cdot dt$.

Les quantités vectorielles $\vec{F} \cdot dt$ sont appelées *impulsions*.

Au cours d'un choc, ou de phénomènes analogues, les corps qui entrent en contact exercent les uns sur les autres des forces très grandes pendant un temps très court; les impulsions qui en résultent ne sont ni nulles, ni négligeables, et on appelle *percussion* reçue, ou subie, par le point considéré ou le système considéré la somme vectorielle des impulsions qu'il a reçues pendant le choc. Les percussions et les impulsions sont donc des grandeurs de même nature. Les forces de percussion obéissent dans les systèmes au principe d'action et de réaction, comme toutes les forces.

II. — 2° Si un point matériel A tourne autour d'un axe X , on appelle *moment cinétique* de A par rapport à X le moment par rapport à cet axe du vecteur représentant la quantité de mouvement de A . Le moment cinétique d'un système tournant autour d'un axe est égal à la somme des moments cinétiques des points qui composent le système.

a. Montrer qu'un solide tournant autour d'un axe avec la vitesse angulaire ω , par rapport à cet axe, un moment cinétique égal à $J\omega$, J étant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.

b. Montrer que si un solide est soumis pendant un temps dt à des forces extérieures ayant par rapport à un axe X un moment total Γ (somme algébrique des moments des diverses forces extérieures), le moment cinétique du système par rapport à l'axe X varie de Γdt .

Ce résultat est applicable à un système quelconque; on l'admettra.

II. — 3° On considère une arme à répétition (une mitrailleuse par exemple) tirant horizontalement N projectiles par seconde (ou N « coups » par seconde). Le canon de l'arme est solidaire d'un chariot pouvant se déplacer horizontalement sans frottement le long d'une glissière fixe. En régime permanent de tir, les projectiles se succédant dans des conditions identiques, le chariot est maintenu par un ressort travaillant à la compression, en exerçant une force horizontale, et qui garde pendant le tir un raccourcissement sensiblement constant, par rapport à sa longueur normale (ou à vide), les déplacements du chariot étant négligeables. Un étalonnage préalable a montré qu'il y a proportionnalité entre les forces F appliquées au ressort et les diminutions de longueur Δl qu'il subit :

$$F = K \Delta l$$

On désigne par m la masse de chacun des projectiles et par v leur vitesse à la sortie de l'arme.

Quelle est la percussion subie par un projectile au cours du trajet de celui-ci dans le canon de l'arme?

Montrer que l'on peut calculer la vitesse v des projectiles si on connaît : le raccourcissement Δl du ressort pendant le tir, K , N et m .

Application numérique : Calculer v pour : $K = 1\,350$ N/m; $m = 15$ g; $N = 8$ coups par seconde (ou projectiles par seconde); $\Delta l = 6$ cm.

II. — 4° Dans une autre méthode, on utilise un pendule (appelé pendule balistique), mobile autour d'un axe matériel X horizontal. Ce pendule est constitué par une tige supportant à sa partie inférieure un cylindre de révolution C limité par deux sections droites et rempli de sable. L'ensemble admet un plan de symétrie vertical, perpendiculaire à l'axe de suspension X , contenant le centre de gravité G du système mobile, ainsi que l'axe du cylindre C , qui est horizontal dans la position d'équilibre (fig. 1); ce plan sera pris comme plan de figure. On désigne : par O l'intersection de l'axe X et du plan vertical de symétrie; par a la distance OG ; par b la distance de O à l'axe du cylindre C ; par M la masse totale du système mobile et par J son moment d'inertie par rapport à l'axe X ; la dimension du cylindre suivant son axe est négligeable par rapport à b . Dans la position d'équilibre, le centre de gravité G est sur la verticale de O .

Le pendule étant au repos, dans sa position d'équilibre, le projectile de masse m , dont on veut mesurer la vitesse v , est tiré horizontalement suivant l'axe du cylindre C et s'immobilise dans le sable; il accompagnera ensuite le cylindre dans son mouvement; on admettra que le projectile, assimilable à un point matériel, s'est immobilisé à la verticale de O , quand le cylindre C était au repos. Immédiatement après ce

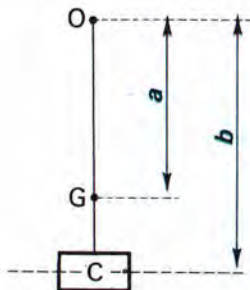


Fig. 1.

choc, le pendule est encore dans la position de repos; mais il a acquis une vitesse angulaire de rotation ω autour de l'axe X . Les forces de percussion dues aux réactions de l'axe de suspension peuvent être assimilées, par raison de symétrie, à une force unique passant par O .

a. Établir la relation entre v et ω .

b. Montrer qu'en général la quantité de mouvement du système formé par le projectile et le pendule ne se conserve pas au cours du choc, mais qu'elle se conserve s'il y a une relation convenable entre b , J , M et a . Y a-t-il intérêt à opérer dans ces conditions?

c. On règle le pendule de manière que la condition qui vient d'être déterminée en b soit remplie (la longueur b ayant alors la valeur particulière qui vient d'être précisée). Après le choc du projectile, le pendule ainsi réglé oscille sans frottement appréciable autour de son axe de suspension X et on mesure son élongation angulaire maximale α .

Calculer la valeur de b et la vitesse v du projectile en utilisant les données suivantes : $J = 33$ kg.m²; $M = 30$ kg; $a = 1$ m; $m = 10$ g; $\alpha = 4^\circ$; g (accélération de la pesanteur) = 10 m/s².

II. — 5° Dans un autre procédé, plus actuel, on mesure la vitesse d'un projectile en utilisant un chronographe : le projectile, en passant devant deux repères distants horizontalement de L , ouvre successivement deux circuits électriques et produit deux signaux sur un appareil qui enregistre, en fonction du temps, les courants dans ces deux circuits. Sur le même appareil, un diapason entretenu trace une sinusoïde de période T . Sachant que la distance entre les deux signaux enregistrés correspond à un nombre n de vibrations du diapason, en déduire la vitesse horizontale moyenne v du projectile.

Application numérique : $T = \frac{1}{435}$ s; $n = 17,5$; $L = 20$ m; calculer v .

Si l'on admet que la période du diapason est parfaitement connue et qu'il y a sur chacun des deux signaux un même temps de retard moyen (par rapport au passage du projectile), mais défini avec des incertitudes indépendantes de 0,0005 s en plus ou en moins, si en outre la comparaison graphique de chaque signal avec la sinusoïde ne peut être faite au mieux qu'à $1/8$ de période près, quelle est l'incertitude absolue sur la vitesse v due à la seule mesure du temps? Avec quelle incertitude absolue faudrait-il définir et mesurer la distance L pour ne pas introduire sur v , du fait de L , une incertitude supplémentaire dépassant le $1/10$ de la précédente?

TROISIÈME PARTIE :

On se propose maintenant d'étudier le mouvement d'un projectile après sa sortie du canon de l'arme à feu. Ce problème est extrêmement complexe à cause de la résistance de l'air. On se bornera ici au cas idéal où cette résistance n'existerait pas. On considérera que le projectile se réduit à son centre de gravité Q . Dans le plan vertical, supposé invariable, de la trajectoire de ce centre de gravité, on prendra comme origine O le point situé sur l'axe du canon à la sortie de celui-ci, les axes Ox et Oy étant respectivement les directions horizontale (vers la droite) et verticale (vers le haut). On désignera par $\vec{v}_s$ le vecteur vitesse du point Q à la sortie du canon et

par α l'angle de tir, $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{v}_s)$; α pourra varier entre 0° et 90° , le sens positif étant le sens trigonométrique; mais le module v_s de $\vec{v}_s$ est indépendant de α . On désignera par g l'accélération de la pesanteur que l'on supposera la même en tous points.

III. — 1° Établir l'équation de la trajectoire du centre de gravité Q en fonction de v_s , g et α .

Calculer en fonction des mêmes paramètres l'altitude maximale atteinte par le projectile, cette altitude étant comptée à partir de la bouche O du canon, ainsi que la portée du tir, c'est-à-dire la distance franchie par le projectile horizontalement au moment où il traverse à nouveau l'axe Ox .

Pour quelle valeur de α cette portée est-elle maximale, v_0 et g étant donnés? Calculer enfin, en fonction de v_0 , g et α , le temps que met le projectile pour atteindre son point de chute sur Ox , ainsi que sa vitesse en ce point.

Application numérique : Calculer les quantités demandées pour $g = 10 \text{ m/s}^2$; $v_0 = 500 \text{ m/s}$; $\alpha = 30^\circ$.

III. — 2° Soit dans le plan xOy un point T , de coordonnées x et y . La valeur de v_0 étant donnée, montrer que, selon sa position, ce point peut être atteint par le projectile (considéré comme se réduisant à son centre de gravité Q) pour deux valeurs de α , distinctes ou confondues, ou qu'il ne peut pas être atteint quelle que soit la valeur de α . En déduire qu'il existe dans le plan vertical de tir une courbe, qu'on appellera *courbe de sûreté*, limitant une région au-delà de laquelle le point est hors de portée de l'arme pour une valeur donnée de v_0 . Donner l'équation de cette courbe en fonction de v_0 et g . Comment les trajectoires précédentes sont-elles disposées par rapport à cette courbe? Représenter schématiquement ces résultats à l'échelle de 1 cm pour 1 km, pour $g = 10 \text{ m/s}^2$ et $v_0 = 500 \text{ m/s}$.

Si le point T est sur l'axe Ox , à l'intérieur de la courbe de sûreté, montrer que les angles de tir α permettant de l'atteindre sont complémentaires.

Application numérique : Calculer ces angles de tir α_1 et α_2 , ainsi que les durées du parcours du projectile sur les deux trajectoires correspondantes, pour : $x = 10 \text{ km}$; $y = 0$; $v_0 = 500 \text{ m/s}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.

III. — 3° Soit α un angle de tir permettant d'atteindre un point T situé sur Ox et d'abscisse x . On suppose que α subit une variation $\Delta\alpha$ assez petite pour qu'on puisse confondre le cosinus de $\Delta\alpha$ ou de ses multiples avec l'unité et la mesure de ces angles en radian avec leur sinus ou leur tangente. Montrer qu'en première approximation la variation de portée Δx qui en résulte est proportionnelle à $\Delta\alpha$; et calculer le coefficient de proportionnalité en fonction de v_0 , g et α .

On se propose d'atteindre un point T situé sur Ox à 10 km de O , en utilisant celui des angles de tir calculés ci-dessus (en III, 2°) qui correspond à la durée de parcours la plus petite. Si le point de chute réel du projectile sur Ox ne doit pas être éloigné de T de plus de 10 m, avec quelle incertitude relative faut-il réaliser l'angle de tir?

QUATRIÈME PARTIE

On veut montrer dans cette quatrième partie que l'étude qui vient d'être faite, dans la troisième partie, permet par analogie d'étudier un problème en apparence différent, sur la propagation de la lumière dans un milieu d'indice variable.

La réfraction de la lumière obéit aux lois de Descartes, qu'on va rappeler :

D'après la première loi de Descartes, lorsqu'une surface sépare deux milieux différents, le rayon lumineux dans le premier milieu traversé, ou rayon incident, la normale à la surface de séparation au point d'incidence et le rayon lumineux dans le second milieu, ou rayon réfracté, sont dans un même plan.

D'après la seconde loi, le rayon incident et le rayon réfracté sont de part et d'autre de la normale et font avec elle des angles i et r (angle d'incidence et angle de réfraction) vérifiant la relation :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r,$$

n_1 et n_2 étant des nombres positifs caractéristiques du premier et du second milieu, appelés indices, ou indices absolus, de ces milieux.

Dans tout ce qui suit, on prendra comme plan de figure un plan Oxz , Ox horizontal orienté vers la droite, Oz vertical orienté vers le bas, et on adoptera comme sens positif pour évaluer les angles le sens qui amène Oz sur Ox (qui est le sens trigonométrique). Les rayons lumineux seront orientés dans le sens de la lumière; les verticales seront orientées vers le bas.

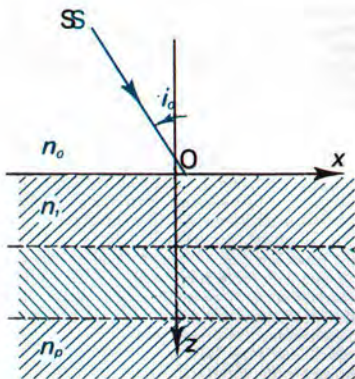


Fig. 2.

IV. — 1° Un rayon lumineux incident SO situé dans le plan Oxz (fig. 2), à gauche de la normale, et provenant d'un milieu d'indice absolu n_0 avec l'angle d'incidence i_0 , pénètre en O vers le bas dans un milieu non homogène formé par la juxtaposition de couches horizontales successives, limitées par des plans horizontaux et d'indices absolus $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$, les épaisseurs de ces couches pouvant être différentes.

On désigne par i_p l'angle d'incidence du rayon incident à la surface de séparation des milieux d'indices n_p et n_{p+1} , cet angle étant compté à partir de la verticale descendante. Montrer que le rayon SO restera sur tout son trajet dans le plan de figure. Quelle est la relation entre n_0, i_0, n_p et i_p ?

IV. — 2° On veut étendre ce qui précède au cas où l'indice varie de façon continue en fonction de z , tout en restant constant dans un même plan horizontal. Montrer que la « trajectoire lumineuse » qui fait suite au rayon SO est une ligne courbe tout entière dans le plan Oxz . Si i désigne l'angle orienté dont il faut faire tourner la direction Oz pour l'amener sur la direction de la tangente à cette trajectoire lumineuse, orientée dans le sens de la lumière, en un point où l'indice est n , quelle relation existe-t-il entre i, n, i_0 et n_0 ?

En déduire une relation entre n, n_0, i_0 et la dérivée de z par rapport à x .

IV. — 3° Dans ce qui suit, on assimile l'air à un gaz parfait, dont l'indice n est lié à sa masse volumique d par la relation :

$$\frac{n-1}{d} = \text{constante}$$

Or, au voisinage d'un sol surchauffé, que l'on supposera plan et horizontal, la température décroît très rapidement quand l'altitude h par rapport au sol augmente; il en résulte des variations de masse volumique et, par suite, d'indice; on admettra, pour de faibles altitudes h par rapport au sol ($h < 3 \text{ m}$) la loi :

$$n^2 = n_s^2 \left(1 + \frac{2h}{q} \right)$$

n_s désignant l'indice à la surface du sol, n l'indice à l'altitude h par rapport au sol, q étant une constante qui dépend des unités.

Calculer q dans le système international, S.I. sachant que : l'indice de l'air dans les conditions normales (0° C ; pression de 76 cm de mercure, égale à 101 325 pascals) est 1,00029; le coefficient de dilatation de l'air est $\alpha = 0,0036$; les températures au niveau du sol et à 2 m au-dessus du sol sont respectivement 80° C et 40° C . On admettra pour faire ce calcul que la pression de l'air régnant au-dessus du sol est pratiquement indépendante de h et à la valeur normale (76 cm de mercure).

Cette valeur de q sera utilisée dans les applications numériques ultérieures.

IV. — 4° Le point O, étant supposé situé à 2 m au-dessus du sol, on considère comme précédemment un rayon lumineux qui se propage vers le bas à partir de O en provenant du milieu d'indice n_0 , l'angle d'incidence en O dans ce milieu ayant la valeur i_0 ($i_0 > 0$). Ce rayon donne lieu à partir de O à une trajectoire lumineuse dans le plan xOz . Établir l'équation qui, le long de cette trajectoire, lie q , i_0 , z et la dérivée de z par rapport à x . Montrer que la dérivée seconde de z par rapport à x est une constante, que l'on explicitera en fonction de q et de i_0 . En déduire l'équation $z = f(x)$ de la « trajectoire lumineuse » étudiée.

IV. — 5° Préciser l'analogie de cette équation avec celle qui représente la trajectoire dans le vide d'un point pesant lancé vers le haut avec une vitesse initiale v_0 et sous un angle de tir α .

En déduire, sans nouveaux calculs, en fonction de i_0 , les coordonnées du point de la trajectoire lumineuse, étudiée dans la question précédente (en IV, 4°), où la tangente est horizontale, ainsi que la « portée horizontale » de cette trajectoire (c'est-à-dire la distance horizontale entre le point O et le point où la trajectoire recoupe le plan horizontal de O).

* Pour une valeur convenable de i_0 , la trajectoire lumineuse issue de O est tangente au sol ; calculer cette valeur de i_0 et la « portée horizontale » de cette trajectoire particulière.

IV. — 6° Montrer que lorsque i_0 varie entre 0° et 90° , les différentes trajectoires lumineuses issues de O et définies par l'équation $z = f(x)$ sont tangentes à une même courbe dont on donnera l'équation. Calculer numériquement les coordonnées des points où cette courbe coupe l'axe Ox et l'axe Oz .

IV. — 7° L'œil d'un observateur est placé en un point P, à une altitude égale à celle de O. Montrer que, si P n'est pas trop éloigné de O, il existe deux valeurs de i_0 , autres que $i_0 = 90^\circ$, correspondant à des trajectoires lumineuses allant en principe de O en P. Quelle relation y a-t-il entre ces deux angles i_0 ? Les calculer pour $OP = 500$ m. Les deux trajectoires correspondantes sont-elles en réalité suivies en totalité par la lumière ?

IV. — 8° Le point P s'éloignant horizontalement de O, à partir de quelle distance OP le point O cessera-t-il d'être visible de P ?

Décrire de façon qualitative les observations auxquelles donne lieu, pour un observateur éloigné qui s'en rapproche, un mât vertical dont la hauteur est de l'ordre de 2 m, l'œil de l'observateur se déplaçant sur Ox .

**INDEX ALPHABÉTIQUE
DES SAVANTS CITÉS DANS LE VOLUME**

BECQUEREL



BECQUEREL, Henri (1852-1908), est sorti de l'École Polytechnique dans le Corps des Ponts et Chaussées. Ses recherches sur la phosphorescence des sels d'uranium l'amènèrent à découvrir la radioactivité de ce métal en 1896. Il fut élu membre de l'Académie des Sciences à l'âge de trente-six ans et reçut le Prix Nobel en partage avec P. et M. Curie en 1903.

BOHR



BOHR, Niels. Physicien danois (1885-1962). Il fut étudiant à l'Université de Copenhague où il présenta, en 1911, une thèse de doctorat sur la théorie électronique de la matière. Il alla ensuite travailler en Angleterre au laboratoire de Sir J. J. Thomson, à l'Université de Cambridge, puis à Manchester où il rencontra Sir Ernest Rutherford. L'apport fondamental de Bohr fut le suivant : pour expliquer la stabilité du modèle atomique planétaire de Rutherford, il aperçut la nécessité d'introduire un nouveau principe qui lui fut suggéré par les découvertes de Planck sur la nature quantique de la lumière. Il émit en 1913 l'hypothèse suivant laquelle l'énergie d'un électron planétaire ne peut pas prendre toutes les valeurs imaginables mais uniquement un certain nombre discret de valeurs (dites quantifiées). A partir de ce principe révolutionnaire il imagina une théorie du spectre atomique de l'hydrogène dont l'accord très remarquable avec les valeurs mesurées des longueurs d'onde décida du succès de sa théorie.

Ses travaux théoriques sur la fission nucléaire (1939) sont célèbres.

Au cours de la deuxième guerre mondiale, il prit une part active à la Résistance danoise. En 1943, il réussit à s'évader en Suède puis à gagner les États-Unis où il travailla jusqu'à la fin de la guerre au laboratoire atomique de Los Alamos.

Son essai philosophique « La lumière et la vie », ses « Discussions avec Einstein », et sa lettre ouverte aux Nations-Unies, publiée en juin 1950, sont universellement connus.

DE BROGLIE



CARNOT



Marie CURIE



Frédéric
JOLIOT-CURIE



Irène
JOLIOT-CURIE



DE BROGLIE, Louis. Né à Dieppe en 1892. Il est le fondateur de la Mécanique ondulatoire. « L'analogie de certains principes de la Mécanique et de l'Optique lui suggéra qu'il était possible de réunir dans une même discipline ces deux chapitres de la Physique, en apparence très distincts. » Ce fut l'objet de sa thèse de doctorat soutenue en 1924. Quelques années plus tard, les expériences de Davisson et Germer, puis de G. P. Thomson sur la diffraction des électrons par les cristaux apportèrent une éclatante confirmation à sa théorie.

« Depuis 1924, la Physique est entrée dans une ère nouvelle qui doit incontestablement à Louis de Broglie son origine première et une grande partie de ses développements ultérieurs »; aussi le Prix Nobel de Physique lui fut-il attribué en 1929.

CARNOT, Sadi (1796-1832); fils de Lazare Carnot, mathématicien et homme politique célèbre qui siégea à la Convention, fut membre du Comité de Salut Public et organisa les armées de la République.

Sadi Carnot entra très jeune à l'École Polytechnique; il en sortit premier. Il est célèbre dans le monde des physiciens et des ingénieurs par le petit livre de soixante-quatre pages, portant en titre « Réflexions sur la puissance motrice du feu », qu'il publia en 1824. On y trouve le premier énoncé du second principe de la Thermodynamique, encore appelé principe de Carnot.

CURIE, Pierre (1859-1906) et CURIE, Marie (1867-1934). Pierre Curie découvrit avec son frère Jacques le phénomène de la piézo-électricité. Pierre fit ensuite, seul, d'importants travaux sur le principe de symétrie dans les phénomènes physiques, puis sur le magnétisme.

En 1895, il épousa une étudiante d'origine polonaise, Marie Skłodowska. Leur collaboration aboutit à la découverte du polonium et du radium, ce qui leur valut, en 1903, de recevoir, en commun avec Henri Becquerel, le Prix Nobel de Physique.

Peu avant la mort accidentelle de Pierre Curie, une chaire fut créée pour lui à la Sorbonne. Marie Curie lui succéda dans cette chaire et à la direction de son laboratoire.

Marie Curie, restée veuve, continua l'œuvre commune. Elle isola le radium pur et en détermina la masse atomique. Elle reçut à ce titre, en 1911, le prix Nobel de Chimie. Elle forma dans son laboratoire une brillante équipe de chercheurs au premier rang desquels il faut citer sa fille Irène et son gendre Frédéric Joliot.

JOLIOT, Frédéric (1897-1958) et JOLIOT-CURIE, Irène (1900-1956).

A sa sortie de l'École de Physique et Chimie Industrielles de la Ville de Paris, Joliot fit un bref séjour dans l'industrie. Désirant s'orienter vers la recherche, il entra, sur les conseils de son maître Paul Langevin, au laboratoire de Marie Curie. Il y rencontra Irène Curie qui devint son épouse en 1926. Cette date marque le début

EINSTEIN



FRESNEL



GALILÉE



HERTZ



LAPLACE



d'une période de collaboration intime d'où sortirent une foule de résultats, dont certains constituent des étapes fondamentales dans le développement de la Chimie nucléaire. Irène et Frédéric Joliot contribuèrent à la découverte du neutron, qui fut identifié par Chadwick. Ils firent les premières observations sur la matérialisation d'un photon avec naissance d'une paire d'électrons, l'un positif, l'autre négatif et la transformation inverse.

Leur découverte de la radioactivité artificielle leur valut, conjointement, en 1935, le Prix Nobel de Chimie.

Joliot avait, dès 1939, précisé les conditions dans lesquelles on pouvait espérer réaliser une réaction de fission nucléaire en chaîne.

La guerre terminée, il dirigea le Haut-Commissariat à l'Énergie Atomique et c'est à lui que revient le mérite de la création du Centre Atomique de Saclay et de la construction de la première pile atomique française, mise en service en décembre 1958.

EINSTEIN, Albert (1879-1955). Physicien allemand, né à Ulm, naturalisé Américain en 1940. « Par la nouveauté et la profondeur des idées qu'il a introduites en Physique, par les répercussions profondes que ces idées ont eues sur toute l'orientation de la science contemporaine, Albert Einstein mérite d'être regardé comme l'un des plus grands esprits scientifiques de tous les temps. » Parmi ses travaux les plus célèbres il convient de citer : les bases de la théorie de la Relativité, l'hypothèse des Quanta de Lumière, les lois du Mouvement brownien, le principe de l'inertie de l'énergie et la Dynamique relativiste. Disons, pour souligner toute l'importance de cette dernière partie de son œuvre, que toute la Physique nucléaire et la théorie de l'énergie atomique reposent sur le principe de l'inertie de l'énergie, découvert par Einstein.

FRESNEL, Jean-Augustin (1788-1827). Ancien élève de l'École Polytechnique, sorti dans le Corps des Ponts et Chaussées. Il aperçut que, seule, la théorie ondulatoire, soutenue jadis par Huyghens, pouvait expliquer les phénomènes d'interférences découverts par Young et les phénomènes de diffraction aperçus dès le XVII^e siècle par le Père Grimaldi. Son mémoire sur « l'Étude expérimentale et théorique des phénomènes de diffraction » lui valut, en 1819, le prix décerné par l'Académie des Sciences. Il inventa les lentilles à échelons qui équipent tous les projecteurs des phares. En collaboration avec Arago, il étudia la lumière polarisée et montra que la polarisation doit nécessairement s'interpréter dans le cadre de la conception ondulatoire avec l'hypothèse supplémentaire de la transversalité des vibrations. Il fut aussi le créateur de l'Optique cristalline.

GALILÉE (Galileo Galilei), né à Pise en 1564. Entré à seize ans à l'Université de Pise, il y étudia la philosophie puis la médecine. A dix-neuf ans, observant les oscillations du lustre de la cathédrale, il découvre que la période des oscillations

d'un pendule est indépendante de leur amplitude. A Pise également, du haut de la célèbre tour penchée, il observe le mouvement des corps tombants. Ses observations, confirmées par des expériences de chute ralentie le long d'un plan incliné, le conduisent à énoncer que l'accélération des mouvements de chute est constante.

Ces découvertes, qui font, à juste titre, considérer Galilée comme le promoteur de la méthode expérimentale en Physique et l'un des fondateurs de la Dynamique classique, battent en brèche les théories d'Aristote, enseignées par les maîtres de Galilée. En butte aux attaques de ceux-ci, Galilée quitte Pise pour Padoue en 1592, puis se fixe en 1610 à Florence où le grand duc de Toscane l'appelle à sa cour.

Avec la lunette qui porte son nom, il découvre les satellites de Jupiter et les phases de Vénus. Ses observations astronomiques le conduisent à admettre, à la suite de Copernic, que la Terre et les autres planètes gravitent autour du Soleil en tournant sur elles-mêmes. Cette conception du monde, considérée à l'époque comme une hérésie, est combattue par l'Eglise et Galilée est contraint, en 1633, de déclarer solennellement qu'elle est fautive.

Devenu aveugle, il meurt près de Florence, en 1642.

HERTZ, Heinrich-Rudolf. Physicien allemand, né à Hambourg en 1857 et mort à Bonn en 1894, à l'âge de trente-sept ans. La plus grande partie de sa courte vie fut consacrée à la recherche scientifique.

Dans le but de donner une base expérimentale à la théorie électromagnétique de la lumière, mise en équations par Maxwell, Hertz étudia systématiquement les champs électrique et magnétique créés par des circuits oscillants de capacité et d'inductance de plus en plus petites. Il parvint ainsi, en 1888, à mettre en évidence l'existence d'ondes électromagnétiques très courtes. La mesure directe de leurs longueurs d'onde lui permit de vérifier que la célérité de leur propagation est, conformément aux prévisions de Maxwell, égale à celle de la lumière.

Entre-temps, Hertz découvrit l'effet photo-électrique en montrant qu'une plaque de zinc électrisée négativement se décharge lorsqu'elle reçoit de la lumière ultraviolette (p. 276).

HUYGHENS, Christian (1629-1695). Physicien, géomètre et astronome hollandais, né à La Haye. Sur la proposition de Colbert, il fut invité par Louis XIV à faire partie de l'Académie Royale des Sciences qui venait d'être créée. Il séjourna à Paris de 1666 jusqu'à la révocation de l'Édit de Nantes. Dans le livre « *Der horlogium oscillatorum* » qu'il dédia à Louis XIV, il indique comment l'emploi d'un pendule permet de régulariser la marche d'une horloge. Plus tard, en 1675, il proposa l'utilisation d'un pendule à ressort spiral pour les montres.

En optique, ses travaux sont restés célèbres : il perfectionna la technique de la taille des verres d'optique et construisit la première lunette astro-

nomique avec laquelle il découvrit un satellite de Jupiter, l'anneau de Saturne et la nébuleuse d'Orion. Il publia en 1678 son « *Traité de la lumière* » (1) dans lequel se trouvent les lois de la réflexion, de la réfraction, une interprétation de la double réfraction dans le spath d'Islande, etc.

JOULE, James Prescott (1818-1889). Physicien anglais né à Manchester. Il étudia l'échauffement des conducteurs parcourus par un courant électrique et établit la loi de proportionnalité entre la quantité de chaleur dégagée et le carré de l'intensité du courant. On lui doit les premières déterminations précises de l'équivalent mécanique de la calorie et une importante étude sur les propriétés thermodynamiques des gaz, faite en collaboration avec W. Thomson.

KÉPLER, Johan (1571-1630). Illustre astronome et physicien allemand, né à Weil (Wurtemberg). Il étudia à Tubingen; fut professeur de mathématiques à Graetz (Styrie) de 1593 à 1599; il en partit sous la menace de persécutions religieuses et alla à Prague, appelé par l'astronome Tycho-Brahé, auquel il succéda.

Comme sa pension était rarement payée, il vécut difficilement, faisant de l'astrologie et tirant l'horoscope des gens de la cour de l'empereur Rodolphe II. Bien que d'esprit romantique et très fantaisiste, il apportait la plus grande rigueur dans ses raisonnements scientifiques. Delambre a bien résumé cela en disant de lui : « Nos faiseurs de systèmes n'ont pas imaginé plus de folies que Képler, mais ils ne calculent rien et Képler soumettait tout au calcul; il n'abandonnait pas une idée avant d'en avoir démontré l'exactitude ou la fausseté. » Ainsi, dans sa très célèbre publication « *Astronomica nova* », utilisant des observations de Tycho-Brahé, il démontra que l'orbite de Mars est elliptique, que le Soleil se trouve à l'un des foyers et que les aires balayées par la droite joignant le Soleil à l'astre sont proportionnelles au temps (*loi des aires* de Képler).

Il s'intéressa également à l'optique : dans une « *Dioptrique* » publiée en 1611, il énonça la loi de la réfraction, dite loi de Képler, qui est valable pour les petits angles d'incidence.

LAPLACE, Pierre-Simon. Mathématicien, astronome et physicien français né à Beaumont-sur-Auge (Calvados) en 1749, mort à Paris en 1827. Il fut l'un des fondateurs de l'École Polytechnique et de l'École Normale. Ce sont surtout ses travaux de mécanique céleste qui l'ont rendu célèbre. Il s'intéressa également à de nombreuses questions de physique : dilatation des solides, calorimétrie, électromagnétisme, vitesse du son, etc. Il siégea à la Convention où il rapporta le projet de loi relatif au système métrique. Il fut membre de l'Institut et de l'Académie française. Napoléon le fit comte et, sous la restauration, Louis XVIII le fit pair et marquis.

(1) Publié en France dans la collection des *Maîtres de la pensée scientifique* (Gauthier-Villard, Éditeurs).

MAXWELL



MAXWELL, James-Clerk (1831-1879). Illustre physicien anglais né à Edimbourg. Il fut étudiant à Cambridge. Il occupa pendant vingt-cinq ans une chaire de « philosophie naturelle » à Aberdeen, puis il enseigna au King's College à Londres et, à partir de 1870, à l'Université de Cambridge où il créa le laboratoire Cavendish et fonda l'École Anglaise de Physique Expérimentale de cette université.

Ses talents de mathématicien, joints à une remarquable intuition en physique, lui permirent d'apporter une très importante contribution à la théorie cinétique des gaz et surtout de prévoir, dans sa « Théorie Électromagnétique de la Lumière », l'existence des ondes dites hertziennes et l'identité de leur nature et de celle de la lumière. Les hypothèses de Maxwell ne reçurent leur première confirmation expérimentale qu'une vingtaine d'années plus tard, quand le physicien allemand *Hertz* découvrit les ondes électromagnétiques qui portent son nom.

NEWTON



NEWTON, Isaac. Né le jour de Noël 1642 au hameau de Woolsthorpe, dans le Lincolnshire. Fils d'un propriétaire terrien, il entra à l'âge de dix-huit ans à l'Université de Cambridge. Mathématicien et physicien de génie, il acquit une grande célébrité par ses découvertes sur le calcul infinitésimal, la nature de la lumière blanche, la gravitation universelle. Il est le fondateur de la mécanique céleste et terrestre et de la physique mathématique. Il présida la Royal Society (équivalent en Angleterre de notre Académie des Sciences) pendant vingt-trois ans. Il mourut en 1727 et fut enterré à Westminster Abbey. Voltaire assista à ses funérailles.

Sur sa statue, érigée au Trinity College, à Cambridge, on a gravé ces mots de Lucrèce : « Qui surpassa la race humaine par la puissance de sa pensée. »

PERRIN



PERRIN, Jean, physicien français né à Lille en 1870, mort aux États-Unis en 1942. Ses cendres furent ramenées au Panthéon en 1948.

A peine âgé de vingt-cinq ans, il réalisa l'expérience célèbre qui fournit la preuve directe du fait que les rayons cathodiques transportent de l'électricité négative, apportant ainsi une importante contribution à la découverte de l'électron.

Un peu plus tard, professeur de Chimie-Physique à la Sorbonne, il s'attacha à donner une base expérimentale à la théorie atomique, encore controversée. Ses expériences le conduisirent, en 1908, à l'une des premières déterminations incontestables du nombre d'Avogadro, et lui valurent, en 1926, le Prix Nobel de Physique.

PLANCK



PLANCK, Max, physicien théoricien allemand, né à Kiel en 1858, mort à Göttingen en 1947.

Professeur de Thermodynamique à l'Université de Kiel en 1885, puis à celle de Berlin en 1889, il fut pendant plus de cinquante ans membre éminent de l'Académie des Sciences de Prusse.

L'hypothèse célèbre qu'il exposa en 1900 à la Société de Physique de Berlin — selon laquelle

RUTHERFORD



l'énergie rayonnée par un oscillateur électromagnétique de fréquence ν est toujours un nombre entier de quanta $h\nu$ — est à l'origine de la « théorie des quanta », l'une des bases de la Physique moderne. Elle eut à l'époque un retentissement mondial et valut à son auteur, en 1914, le Prix Nobel de Physique.

RUTHERFORD, Ernest (plus tard, lord Rutherford) est né à Nelson (Nouvelle-Zélande) en 1871 et mort à Cambridge (Angleterre) en 1937.

A Cambridge, il fut l'élève du grand physicien anglais J.-J. Thomson. Nommé professeur, il enseigna à l'Université de langue anglaise de Montréal, au Canada, puis à Manchester et enfin à Cambridge.

Il s'intéressa d'abord à la radioactivité; en 1903, avec Soddy, son collègue de Montréal, il formula une théorie des transformations radioactives que les découvertes ultérieures ne firent que confirmer.

Un peu plus tard, il étudia les particules α émises par les éléments radioactifs et fut celui qui contribua le plus à établir leur nature. Il s'en servit ensuite comme projectiles dans une série d'expériences qui établirent l'existence des noyaux atomiques et l'amènèrent à imaginer le modèle planétaire de l'atome, que son élève Niels Bohr devait préciser et compléter. Le Prix Nobel lui fut attribué en 1908.

En 1919, il obtint de l'hydrogène et de l'oxygène en bombardant des atomes d'azote par des particules α , réalisant ainsi la première transmutation artificielle et ouvrant la voie à la Physique et à la Chimie nucléaires.

WATT, James (1736-1819). Ingénieur anglais, célèbre par les perfectionnements qu'il apporta à la machine à vapeur. Il en fit une machine industrielle à une époque où l'énergie mécanique était encore produite par les animaux de trait, les roues hydrauliques et les moulins à vent.

WATT

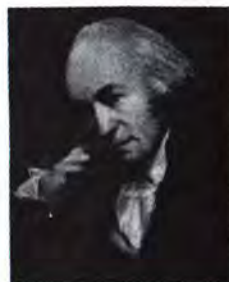


Table des rapports trigonométriques.

DEGRÉS.	RADIANS.	SINUS.	TAN- GENTE.	COT.	COSINUS.		
0	0,0000	0,0000	0,0000	∞	1,0000	1,5708	90
1	0,0175	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	1,5359	88
3	0,0524	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	1,5010	86
5	0,0873	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	1,4661	84
7	0,1222	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	1,4312	82
9	0,1571	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	1,3963	80
11	0,1920	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	1,3614	78
13	0,2269	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	1,3265	76
15	0,2618	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	1,3090	75
16	0,2793	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	1,2915	74
17	0,2967	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	1,2741	73
18	0,3142	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	1,2566	72
19	0,3316	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	1,2392	71
20	0,3491	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	1,2217	70
21	0,3665	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	1,2043	69
22	0,3840	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	1,1694	67
24	0,4189	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	1,1345	65
26	0,4538	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	1,1170	64
27	0,4712	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	1,0996	63
28	0,4887	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	1,0647	61
30	0,5236	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	1,0472	60
31	0,5411	0,5150	0,6009	1,664	0,8572	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	0,6249	1,600	0,8480	1,0123	58
33	0,5760	0,5446	0,6494	1,540	0,8387	0,9948	57
34	0,5934	0,5592	0,6745	1,483	0,8290	0,9774	56
35	0,6109	0,5736	0,7002	1,428	0,8192	0,9599	55
36	0,6283	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	0,9425	54
37	0,6458	0,6018	0,7536	1,327	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157	0,7813	1,280	0,7880	0,9076	52
39	0,6807	0,6293	0,8098	1,235	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428	0,8391	1,192	0,7660	0,8727	50
41	0,7156	0,6561	0,8693	1,150	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	0,9004	1,111	0,7431	0,8378	48
43	0,7505	0,6820	0,9325	1,072	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947	0,9657	1,036	0,7193	0,8029	46
45	0,7854	0,7071	1,0000	1,000	0,7071	0,7854	45
		COSINUS.	COT.	TAN- GENTE.	SINUS.	RADIANS.	DEGRÉS.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

CHAPITRE 1. Les incertitudes dans les mesures physiques	7
CHAPITRE 2. Rappels de cinématique	13
A. Les généralités	13
B. L'application au cas particulier des mouvements rectilignes	16

DYNAMIQUE

CHAPITRE 3. La chute libre	21
CHAPITRE 4. Les bases fondamentales de la dynamique	29
A. Le principe fondamental de la dynamique	29
B. La notion de masse. La relation entre le poids et la masse	31
C. Notions sur la mécanique des systèmes de points matériels	34
<i>Lecture. La gravitation universelle</i>	37
CHAPITRE 5. L'application de la relation fondamentale de la dynamique à des mouvements rectilignes	39
CHAPITRE 6. L'application de la relation fondamentale de la dynamique au mouvement rectiligne sinusoïdal et au mouvement circulaire uniforme	52
A. Le mouvement rectiligne sinusoïdal	52
B. Le mouvement circulaire uniforme	56
<i>Lecture. Les effets de l'inertie pour les corps en rotation</i>	65
CHAPITRE 7. La rotation d'un solide autour d'un axe fixe. La notion de moment d'inertie	67
A. La relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation	67
B. L'application au mouvement sinusoïdal de rotation	71
CHAPITRE 8. Le théorème de l'énergie cinétique	77
A. Le rappel des notions de travail et de puissance	77
B. Le théorème de l'énergie cinétique	80
<i>Les notions de quantité de mouvement et de moment cinétique</i>	86
A. La quantité de mouvement	86
B. Le moment cinétique	91
CHAPITRE 10. Le pendule pesant	96
A. Le cas général d'un pendule pesant quelconque	96
B. Le cas limite du pendule simple	100
C. Les applications du pendule pesant	103
CHAPITRE 11. La résistance de l'air	109
A. Généralités	109
B. Résistance proportionnelle au carré de la vitesse relative	113

CHAPITRE 12. Le système d'unités international (SI)	121
Le tableau des unités	125

ENERGÉTIQUE

CHAPITRE 13. L'énergie mécanique	127
A. L'énergie cinétique	127
B. L'énergie potentielle	129
C. L'énergie mécanique totale. Sa conservation	133
CHAPITRE 14. Les principes de la thermodynamique	139
A. Les rappels concernant les quantités de chaleur	139
B. Le principe de l'état initial et de l'état final	140
C. Le principe et le théorème de Carnot	148

LES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES

CHAPITRE 15. Généralités	153
A. Les caractères généraux des mouvements périodiques	153
B. Le cas particulier des vibrations sinusoïdales	155
C. L'étude expérimentale des mouvements périodiques	158
CHAPITRE 16. La propagation d'un mouvement vibratoire	163
A. La propagation d'un ébranlement. La célérité de la propagation	163
B. La propagation d'un mouvement vibratoire. La notion de longueur d'onde	166
CHAPITRE 17. La nature vibratoire du son. La célérité du son	172
A. Production et propagation du son	172
B. La célérité du son	175
CHAPITRE 18. La composition des mouvements vibratoires. Les interférences et les battements	177
A. La composition de deux vibrations sinusoïdales de même période et de même direction. La règle de Fresnel	177
B. Les interférences	181
C. Les battements	184
CHAPITRE 19. Les ondes stationnaires	187
CHAPITRE 20. Notions sommaires sur les vibrations forcées et la résonance	195

OPTIQUE PHYSIQUE

CHAPITRE 21. Les interférences lumineuses et la nature vibratoire de la lumière	203
A. Une expérience d'interférences lumineuses	203
B. Les radiations infrarouges et ultraviolettes	210

CHAPITRE 22. La polarisation de la lumière.	218	Lecture. Quelques applications des faisceaux d'électrons	284
A. La polarisation par réflexion	218		
B. La polarisation par double réfraction	221	CHAPITRE 28. Les rayons X	289
Lecture La nature du « vecteur lumineux ».	225		
ÉLECTRICITÉ ET PHÉNOMÈNES CORPUSCULAIRES			
CHAPITRE 23. Le rappel des notions fondamentales concernant le courant alternatif.	226	Lecture. Les principaux faits expérimentaux qui ont permis d'établir la nature électromagnétique des rayons X	295
CHAPITRE 24. L'influence de l'inductance et de la capacité en courant alternatif. L'impédance d'une portion de circuit.	237	Le double aspect ondulatoire et corpusculaire du rayonnement électromagnétique	296
A. La valeur instantanée et la valeur efficace d'une différence de potentiel (ou tension) alternative	237	La mécanique ondulatoire	296
B. L'influence de l'inductance et de la capacité sur la relation entre la différence de potentiel et l'intensité en courant alternatif	240	CHAPITRE 29. Masse et énergie. La relation d'Einstein. Le défaut de masse des noyaux atomiques.	297
CHAPITRE 25. La puissance moyenne. Le facteur puissance	251	A. Notions de mécanique relativiste. La relation d'Einstein	297
CHAPITRE 26. Les courants de haute fréquence. Les ondes électromagnétiques.	257	B. La stabilité des noyaux atomiques et l'énergie nucléaire	300
A. Les propriétés des courants alternatifs de haute fréquence	257	CHAPITRE 30. La radioactivité	303
B. La propagation des ondes électromagnétiques	261	A. Les rayonnements émis par les corps radioactifs	303
Lecture. Le principe des télécommunications hertziennes	267	B. Les caractères généraux de la radioactivité	306
CHAPITRE 27. Notions d'électronique	268	C. Le mécanisme nucléaire des transformations radioactives	307
A. L'effet thermoélectronique	268	Lecture. Libération d'énergie nucléaire par fission en chaîne de noyaux $^{235}_{92}\text{U}$	311
B. L'accélération des électrons par un champ électrique. Les propriétés des faisceaux d'électrons	270	Tableau périodique des éléments	312
C. L'effet photoélectrique. La nature corpusculaire de la lumière	276	Les symboles et les masses atomiques des 92 premiers éléments	313
		PROBLÈMES D'EXAMEN ET DE CONCOURS	315
		— Problèmes proposés au baccalauréat	316
		— Problèmes de concours général	342
		Index alphabétique des savants cités dans le volume	357
		Table des rapports trigonométriques	365

Sauf spécification contraire, les photos de cet ouvrage ont été prises spécialement par J.-C. Mallinod, ou font partie des archives Nathan.



